



سوال ۳۰۸

حسابان ۱ فصل ۳ و ۴ و ۵

۱ روی خطی به موازات محور y ها، نقاطه M و N ، به ترتیب، روی منحنیهای $y = x^3 - 2x^2 + 1$ و $y = x^3 + 2x - 3$ بین نقاط تلاقی دو منحنی قرار دارند. بیشترین مقدار طول پاره خط MN کدام است؟

۵/۵ (۴)

۴/۵ (۳)

۳/۵ (۲)

۲/۵ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲ خط d از مبدأ مختصات می‌گذرد و بر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{-2x^2 + x + 1}$ در نقطه A مماس است. عرض نقطه A کدام است؟

 $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۳ خط $y = -ax - 5$ در نقطه‌ای به طول ۳ بر نمودار تابع f مماس است. اگر $f'(3) - f(3) = 2$ باشد، $f(3)$ چند برابر $f'(3)$ است؟

 $\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{6}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۴ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{k[x] - 2}{x^2 - 4} = +\infty$ باشد، نقاط $(k\pi, \sin k\pi)$ در کدام ناحیه محوره‌ای مختصات قرار دارند؟

چهارم (۴)

سوم (۳)

دوم (۲)

اول (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۵ تابع $y = |f(x)|$ که در آن $f(x) = x(|x| + 3)$ است، چند نقطه بحرانی دارد؟

صفر (۴)

۱ (۳)

۳ (۲)

۵ (۱)

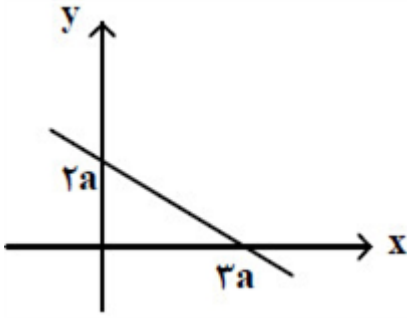
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x^2} & x \geq 1 \\ b + c\sqrt{x^2} & x < 1 \end{cases}$ در R پیوسته است. اگر f فقط در یک نقطه مشتق‌پذیر نباشد، مقدار $\frac{ab}{c^2}$ کدام است؟ ($c \neq 0$)

 $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷ اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^2(x)}{x|f^{-1}(x)|}$ کدام است؟



$-\frac{2}{27}$ (۴)

$-\frac{8}{9}$ (۳)

$-\frac{8}{27}$ (۲)

$-\frac{2}{9}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۸ اگر $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^+} \frac{[-x] + a}{\left|\frac{\sqrt{r}}{r}x + a\right| + a} = -\infty$ باشد، مقدار $[a]$ کدام است؟

-۴ (۴)

-۳ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹ تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 - 5|x|$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب، تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $y = |f(x)|$ باشند، مقدار $\frac{n}{m}$ کدام است؟

۲ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴ تیرماه

۱۰ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x^2} & x < 1 \\ b\sqrt{x^2} & x \geq 1 \end{cases}$ در R پیوسته است. اگر f فقط در یک نقطه مشتق پذیر نباشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

۲ (۴)

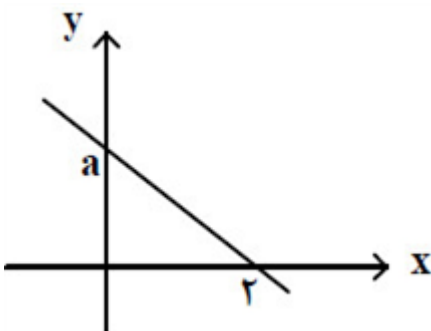
۱ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴ تیرماه

۱۱ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل داده شده است. اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{|2f(x) - af^{-1}(x)|} = 2$ باشد، مقدار غیرصحيح a کدام است؟



$2\sqrt{2}$ (۴)

$-1 + \sqrt{2}$ (۳)

$1 + \sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴ تیرماه



۱۲ اگر $\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{4}} \frac{x}{x^2 + ax + b} = +\infty$ باشد، مقدار $\left[\frac{b}{a}\right]$ کدام است؟

- ۱ (۱) -۲ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴ تیرماه

۱۳ نقاط A و B به ترتیب، روی منحنی‌های $y = x^3 - 2x - 3$ و $y = x^3 + x^2 + 1$ قرار دارند. اگر این نقاط روی خطی به موازات محور y ‌ها باشند، کمترین مقدار طول پاره خط AB کدام است؟

- ۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)

سراسری-تجربی-۱۴۰۴ تیرماه

۱۴ خط d از مبدأ مختصات می‌گذرد و بر نمودار تابع $f(x) = 2\sqrt{x}(4x^2 + 3)$ مماس است. شیب خط d چقدر است؟

- ۴ (۱) $8\sqrt{2}$ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴)

سراسری-تجربی-۱۴۰۴ تیرماه

۱۵ خط $y + ax = 2$ در نقطه‌ای به طول ۴ بر نمودار تابع f مماس است. اگر $f(4) + f'(4) = -1$ باشد، مقدار $f'(4)$ کدام است؟

- ۱ (۱) $0/6$ (۲) $-0/6$ (۳) -۱ (۴)

سراسری-تجربی-۱۴۰۴ تیرماه

۱۶ اگر $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - k[x]}{x^2 - 1} = -\infty$ باشد، نقاط $(k\pi, \cos k\pi)$ در کدام ناحیه محوره‌ای مختصات قرار دارند؟

- اول (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴)

سراسری-تجربی-۱۴۰۴ تیرماه

۱۷ نقطه A، نقطه برخورد تابع $y = \sqrt{x+2}$ با محور عرض‌ها است. کمترین فاصله نقطه A از منحنی $y = x + |x|$ کدام است؟

- ۱ (۱) $0/1\sqrt{10}$ (۲) $0/1\sqrt{5}$ (۳) $0/2\sqrt{10}$ (۴) $0/2\sqrt{5}$

سراسری-تجربی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۱۸ نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax - b$ در نقطه‌ای به طول ۲ بر محور x ‌ها مماس است. مقدار $b - a$ کدام است؟

- ۴ (۱) -۲ (۲) ۴ (۳) ۲ (۴)

سراسری-تجربی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۱۹ آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = 1 - \frac{a}{x}$ در بازه $[1, 3]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع در نقطه‌ای با کدام طول برابر است؟ ($a \neq 0$)

- ۱ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $\sqrt{6}$

سراسری-تجربی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۲۰ اگر $\lim_{x \rightarrow -2\pi} \frac{2 + k\left[\frac{x}{\pi}\right]}{\sin x} = +\infty$ باشد، مقدار $[-k]$ کدام است؟

- ۱ (۱) -۴ (۲) -۳ (۳) -۲ (۴)

سراسری-تجربی-اردیبهشت ۱۴۰۴



۲۱) ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2} |x - a|$ روی بازه $[0, a]$ برابر $1/5$ است. مقدار a کدام است؟

۴ ۱

۳ $1/5$

۲ ۲

۱ $2/5$

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۲۲) تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2bx + c & x > a \\ 3x^2 & x \leq a \end{cases}$ روی R مشتق‌پذیر است. مقدار $a^2 + b - c$ کدام است؟

۴ $(a-1)^2 + 1$

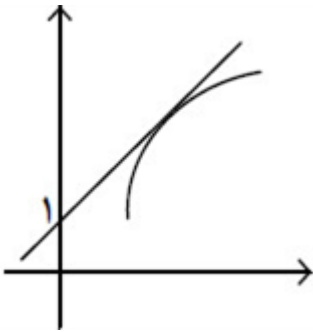
۳ $(a-1)^2 - 1$

۲ $(a+1)^2 + 1$

۱ $(a+1)^2 - 1$

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۲۳) نمودار تابع f و خط مماس بر آن در نقطه $(3, 5)$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $f'(3)$ کدام است؟



۴ $\frac{4}{3}$

۳ $\frac{2}{3}$

۲ ۱

۱ ۲

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۲۴) اگر $f(x) = \frac{|2x-4|}{\sqrt[3]{x^2}}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{3x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ باشد، مقدار $f'(1) - 2g'(1)$ کدام است؟

۴ $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

۳ $\frac{\sqrt{3}}{6}$

۲ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۱ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۲۵) حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cot x}{[x - \pi]}$ کدام است؟

۴ $-\infty$

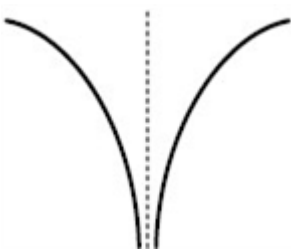
۳ $+\infty$

۲ ۱

۱ صفر

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۲۶) نمودار تابع $f(x) = \frac{a^2 x^2 - 2x + 1}{(x+a)(mx-2)}$ در همسایگی $x = -a$ به صورت شکل مقابل است. اگر $y = -4$ مجانب افقی تابع f باشد، مقدار a کدام است؟



۴ ۴

۳ ۲

۲ -۴

۱ -۲

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴



۲۷) مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی که دو رأس آن بر محور x ها و دو رأس دیگر آن یکی بر $y = \sqrt{x+1}$ و دیگری بر $y = \sqrt{2-x}$ قرار دارد، کدام است؟

- ۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲۸) خط مماس بر منحنی $f(x) = \frac{a}{2x-1}$ از نقاط $(2/5, 6)$ و $(-1/5, -12)$ می‌گذرد. مقدار $f(5)$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{6}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲۹) اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{f(x)}{\cos x} = +\infty$ باشد، کدام مورد می‌تواند ضابطه تابع f باشد؟

- ۱) $2\left[\frac{x}{\pi}\right] + 1$ ۲) $\left[\frac{2x}{\pi}\right] - 1$ ۳) $\left[\frac{2x}{\pi}\right] - 2$ ۴) $3\left[\frac{x}{\pi}\right] + 2$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۳۰) تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x|x|} - x$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی k و تعداد نقاط بحرانی تابع f باشند، مقدار $\frac{km+n}{k-n}$ کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۱) به ازای چند مقدار صحیح نامنفی m ، (a, b) یک نقطه گوشه‌ای برای $f(x) = \begin{cases} b & x < a \\ b + (x-a)^m & x \geq a \end{cases}$ است؟

- ۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۲) اگر $f(x) = \frac{27 - \sin^2 x}{9 - \sin^2 x}$ و $g(x) = \frac{2}{2 + \sin x}$ باشد، حاصل عبارت $3g'\left(\frac{5\pi}{3}\right) - f'\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۳) برای چند مقدار a تابع $f(x) = \frac{2x^2 + x - 6}{ax^2 + (a-2)x + 4}$ یک مجانب قائم دارد؟

- ۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۴) اگر مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی که دو رأس آن بر محور x ها و دو رأس دیگر آن، یکی بر $y = \sqrt{x}$ و دیگری بر $y = \sqrt{a-x}$ واقع است برابر $\sqrt{2}$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۳

۳۵ خط مماس بر منحنی $f(x) = \sqrt{ax-1}$ در نقطه A از نقاط $(-1, 1)$ و $(2, 2)$ می‌گذرد. مقدار $f(5)$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{32}}{3}$ (۴)

$\frac{\sqrt{23}}{2}$ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۳

۳۶ اگر $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x)}{\sin x} = -\infty$ باشد، کدام مورد می‌تواند ضابطه f باشد؟

$\left[\frac{2x}{\pi}\right] - 2$ (۴)

$2\left[\frac{x}{\pi}\right] + 2$ (۳)

$3\left[\frac{x}{\pi}\right] + 1$ (۲)

$\left[\frac{2x}{\pi}\right] - 1$ (۱)

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۳

۳۷ تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x(1-|x|)}$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و k تعداد نقاط بحرانی تابع f باشند، مقدار $m+n+k$ کدام است؟

۳ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۳۸ به ازای چند مقدار صحیح m ، تابع $f(x) = \begin{cases} b & x < a \\ b + (x-a)^m & x \geq a \end{cases}$ دارای نقطه گوشه‌ای است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

بیش از ۲ (۲)

صفر (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۳۹ اگر $f(x) = \frac{\Lambda + \cos^2 x}{4 - \cos^2 x}$ و $g(x) = \frac{2}{2 - \cos x}$ باشد، حاصل عبارت $f'\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 2g'\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴)

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۴۰ برای چند مقدار a ، تابع $f(x) = \frac{3x^2 - 8x - 3}{ax^2 + (1-a)x + a + 1}$ یک مجانب قائم دارد؟

۷ (۴)

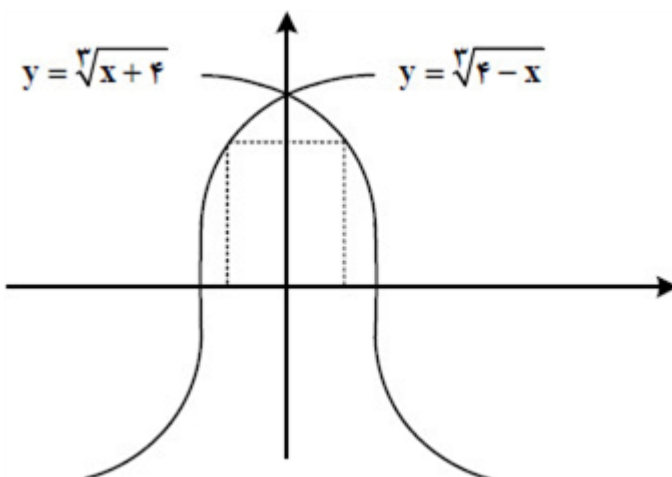
۵ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۴۱ مساحت بزرگ‌ترین مستطیل واقع در ناحیه‌های اول و دوم که دو رأس آن بر محور x ها و دو رأس دیگر آن بر نمودارهای داده شده در شکل مقابل قرار دارد، کدام است؟



۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت

www.sejall.ir

تست های طبقه بندی شده و فصل به فصل کنکور سراسری همراه با پاسخ کامل تشریحی

۴۲ مقدار مینیمم نسبی تابع $y = x^3 - 12x + 2$ ، کدام است؟

۴ -۷

۳ -۹

۲ -۱۱

۱ -۱۴

سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۴۳ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = (x^2 + 1)^3(ax + 1)$ در بازه $[-1, 0]$ برابر ۱۱- است. آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع در نقطه $x = -2a$ کدام است؟

۴ -۸

۳ ۸

۲ -۱

۱ ۱

سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۴۴ خط $7y - x = 5$ در ناحیه اول صفحه مختصات بر منحنی $y = \frac{ax - 1}{2x + 1}$ مماس است. مقدار a کدام است؟

۴ $\frac{9}{7}$

۳ $\frac{4}{7}$

۲ ۴

۱ ۳

سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۴۵ اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{a + 3[-x]}{1 - 2x} = -\infty$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \left[\frac{x}{a} - x \right]$ کدام است؟

۴ -۱

۳ ۱

۲ -۲

۱ صفر

سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۴۶ تابع $y = (x - 1)|x|$ در بازه (a, b) اکیداً نزولی است. مقدار $a + b$ کدام است؟

۴ $\frac{3}{4}$

۳ $\frac{3}{2}$

۲ $\frac{1}{2}$

۱ $\frac{1}{4}$

سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۴۷ خط مماس بر منحنی $y = x^3 + ax^2 + bx - 1$ در نقطه $(-1, -4)$ از منحنی عبور می‌کند. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۴ $0/8$

۳ $0/6$

۲ $0/4$

۱ $0/3$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۴۸ به ازای هر مقدار حقیقی و ناصفر a ، تابع $f(x) = \begin{cases} bx + c & x < a \\ \frac{1}{x} & x \geq a \end{cases}$ روی R مشتق‌پذیر است. مقدار ac کدام است؟

۴ ۲

۳ -۲

۲ ۱

۱ -۱

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۴۹ به ازای چند مقدار صحیح m ، تابع $y = \frac{mx + 2}{x - 1 + m}$ روی بازه $(1, +\infty)$ نزولی است؟ ($m \neq 2$)

۴ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۵۰ اگر $f(x) = \sqrt{x+8} - \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+8} + \sqrt{x}}$ باشد، حاصل عبارت $f'(1)g(1) - g'(1)f(1)$ کدام است؟

۴ ۲

۳ ۳

۲ ۱

۱ صفر

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۵۱) اگر $f(x) = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$ و $g(x) = \frac{1}{x-1}$ باشد، نقطه تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $f - g$ کدام است؟

(۱, ۰) **۴**

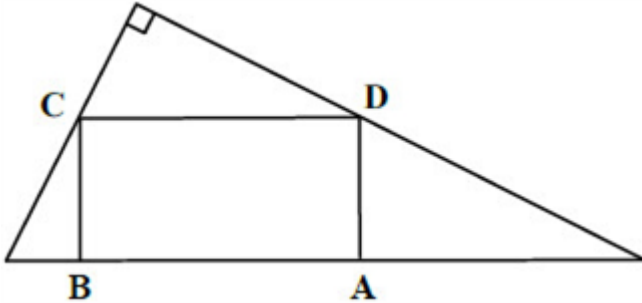
(۳, ۱) **۳**

(-۳, ۰) **۲**

(-۱, ۱) **۱**

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۵۲) در شکل مقابل، یکی از اضلاع قائمه مثلث بزرگ نصف دیگری است. اگر مساحت مستطیل ABCD ماکزیمم باشد، نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟



۲/۵ **۴**

۲ **۳**

۱/۵ **۲**

۱ **۱**

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۵۳) اگر $f(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{x+|x|}}$ و $g(x) = \frac{1}{x^5 + |x^5|}$ باشد، مقدار $g'(\sqrt[5]{3})f'(g(\sqrt[5]{3}))$ کدام است؟

۱ **۴**

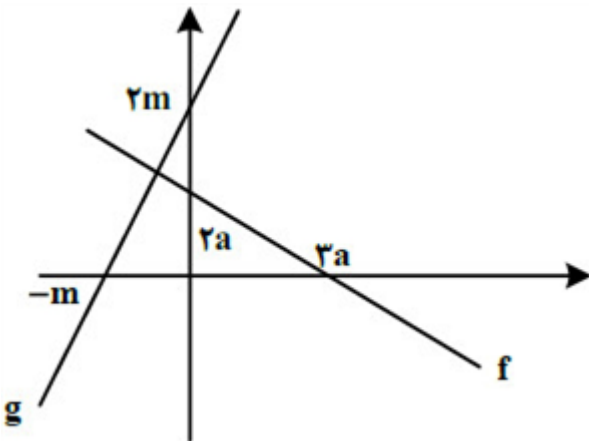
-۱ **۳**

$-\frac{1}{3}$ **۲**

$\frac{1}{3}$ **۱**

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۵۴) شکل مقابل، نمودار توابع f و g را نشان می‌دهد. حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{|f(x)|}$ کدام است؟



۳ **۴**

-۳ **۳**

$-\frac{1}{3}$ **۲**

$\frac{1}{3}$ **۱**

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۵۵) اگر $A = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\log_8 x + 4 \log_2 x^3}} : x > 1 \right\}$ باشد، بزرگ‌ترین عضو مجموعه A کدام است؟

$\sqrt{3}$ **۴**

$\sqrt{6}$ **۳**

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ **۲**

$\frac{\sqrt{6}}{2}$ **۱**

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۵۶) کمترین فاصله نقاط واقع بر منحنی $y = -\sqrt{-x - [x^2]}$ از خط $x - y - 1 = 0$ کدام است؟

۴ $\frac{3\sqrt{2}}{8}$

۳ $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

۲ $\frac{3\sqrt{2}}{5}$

۱ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۷) به ازای چند مقدار صحیح k ، نقطه عطف منحنی $y = \frac{k}{2}x^3 - (k+2)x^2$ در ناحیه سوم محورهای مختصات قرار دارد؟

۴ صفر

۳ ۱

۲ ۲

۱ بیش از ۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۸) خط d موازی محور x ها، سهمی $y = x^2 - 1$ را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم شده در این نقاط بر هم عمودند. مجموع عرض‌های این دو نقطه کدام است؟

۴ $-\frac{3}{4}$

۳ $-\frac{1}{4}$

۲ $-\frac{1}{2}$

۱ $-\frac{3}{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۹) اگر $f(x) = \frac{5 \cos x}{1 - \sin x}$ و $f(x) = xg(x) - 2x + 5$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ کدام است؟

۴ وجود ندارد.

۳ صفر

۲ ۷

۱ ۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶۰) اگر f تابع هموگرافیک و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)}$ باشد، کدام مورد می‌تواند محل تقاطع مجانب‌های تابع f باشد؟

۴ $(1, 2)$

۳ $(-1, 1)$

۲ $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

۱ $(\sqrt{\pi}, \pi)$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶۱) اگر $A = \left\{ \log_9 x + 3 \log_{x^2} 3 : x > 1 \right\}$ باشد، کوچک‌ترین عضو مجموعه A کدام است؟

۴ $\sqrt{3}$

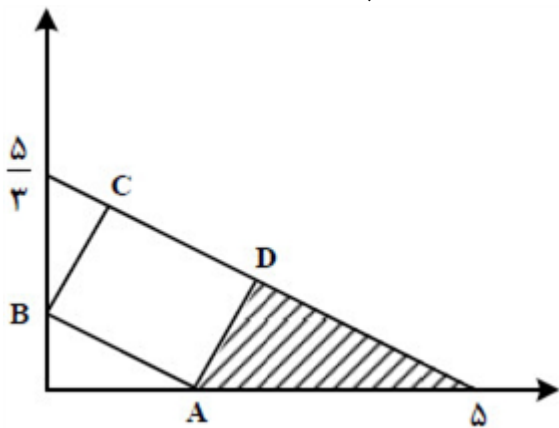
۳ $\sqrt{6}$

۲ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه

۶۲ در شکل مقابل، مساحت مستطیل ABCD ماکزیمم است. مساحت مثلث هاشورخورده چقدر است؟



۲۵
۲۴ (۴)

۲۵
۱۲ (۳)

۱۵
۱۶ (۲)

۱۵
۸ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه

۶۳ اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2 - |x^3|}$ باشد، مقدار $g'(-\sqrt[3]{2})f'(g(-\sqrt[3]{2}))$ کدام است؟

-۱ (۴)

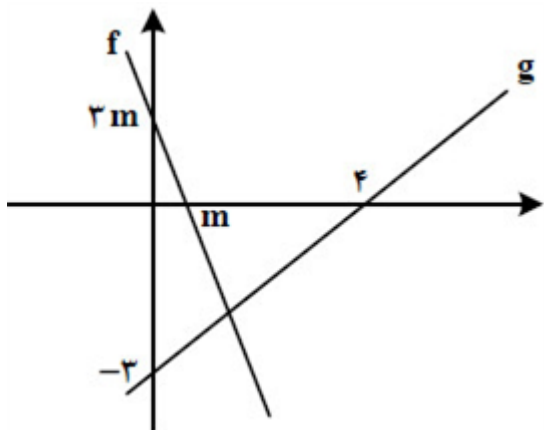
۱ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه

۶۴ شکل مقابل، نمودار تابع f و g را نشان می‌دهد. حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)}$ کدام است؟



۴ (۴)

-۴ (۳)

۳ (۲)

-۳ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه

۶۵ کمترین فاصله نقاط واقع بر منحنی $y = \sqrt{x - [x^2]}$ از خط $2x - y + 2 = 0$ کدام است؟

$\frac{3\sqrt{5}}{10}$ (۴)

$\frac{\sqrt{5}}{10}$ (۳)

$\frac{3\sqrt{5}}{8}$ (۲)

$\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۶۶ به ازای چند مقدار صحیح و منفی k ، نقطه عطف منحنی $y = kx^3 + (k+1)x^2$ در ناحیه دوم محورهای مختصات قرار دارد؟

صفر (۴)

بیش از ۲ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه



۶۷ خط d موازی محور x ها، قرینه سهمی $y = x^2 + 1$ نسبت به محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم شده در این نقاط بر هم عمودند. فاصله خط d از مبدأ مختصات کدام است؟

- ۱/۲۵ (۱) ۳/۲۵ (۲) ۰/۷۵ (۳) ۲/۷۵ (۴)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۶۸ اگر $f(x) = \left(\frac{-1 + \sin x}{1 + \sin x}\right)^2$ و $f(x) = xg(x) + 1$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ کدام است؟

- ۴ (۱) ۲ (۲) -۴ (۳) -۲ (۴)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۶۹ f تابع هموگرافیک، $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g^{-1}(x)}$ است، کدام عدد می‌تواند حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x)$ باشد؟

- صفر (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۷۰ یک سازنده جعبه‌های مقوایی می‌خواهد از مقواهای مربع شکل به ضلع ۱۲ cm، با بریدن مربع‌های مساوی از چهار گوشه و بالا بردن اضلاع جعبه‌های باز بسازد. طول ضلع مربعی را که باید بُرید چند سانتی‌متر باشد تا جعبه بیش‌ترین حجم را داشته باشد؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۷۱ آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$ در نقطه $x = 4$ کدام است؟

- $\frac{2}{9}$ (۱) $\frac{5}{9}$ (۲) $\frac{4}{27}$ (۳) $\frac{5}{27}$ (۴)

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۷۲ خط مماس در دو نقطه از نمودار تابع $y = \frac{1-5x}{1+2x}$ بر خط $y = 7x - 2$ عمود است. فاصله بین این دو نقطه، کدام است؟

- $2\sqrt{13}$ (۱) $7\sqrt{13}$ (۲) $5\sqrt{2}$ (۳) $7\sqrt{2}$ (۴)

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۷۳ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x+1} & x \geq 2 \\ ax^2 + bx & x < 2 \end{cases}$ ، روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. مقدار b کدام است؟

- $\frac{7}{3}$ (۱) $\frac{7}{6}$ (۲) $-\frac{5}{6}$ (۳) $-\frac{5}{12}$ (۴)

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۷۴ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax + \sqrt{x^2 + 12}}{x + 2}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ باشد، حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow -2$ ، کدام است؟

- ۰/۵ (۱) ۱ (۲) ۱/۵ (۳) ۲ (۴)

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۷۵ به ازای مقادیری از α ، تابع $f(x) = \frac{(1-\alpha)x-3}{x-\alpha(1+x)}$ موازی خط $y + \alpha = 0$ است. به ازای مقادیر مختلف α ، مجموع فاصله‌های مقادیر تابع f تا خط $y + \alpha = 0$ ، کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۸ (۲)

۱۰ (۱)

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۷۶ نقطه $A(-1, 2)$ ، نقطه ماکزیمم نسبی تابع $y = ax^2 + b|x|$ است. مقدار ab کدام است؟

-۸ (۴)

$-\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{8}{9}$ (۲)

۱ (۱)

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۷۷ آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \frac{\pi}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)$ در بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ، چند برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع در

$x = \frac{3\pi}{8}$ است؟

$-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ (۴)

$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ (۳)

$-\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ (۱)

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۷۸ تابع f مشتق‌پذیر و با دوره تناوب $\frac{\pi}{8}$ است. اگر $f'(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $f(2x - \frac{23\pi}{24}) = f(x - \frac{\pi}{3}) + h(x)$ باشد، حاصل $h'(\frac{\pi}{2})$ کدام است؟

$-\sqrt{3}$ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

$-\frac{2}{\sqrt{3}}$ (۲)

$\frac{2}{\sqrt{3}}$ (۱)

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۷۹ در نقطه تلاقی منحنی‌های $f(x) = -\sqrt[3]{x}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x^2} - 2$ در ناحیه دوم دستگاه مختصات، خط مماسی بر $g(x)$ رسم می‌شود. فاصله نقطه برخورد این خط با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات، کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{4}{3}$ (۲)

$\frac{5}{3}$ (۱)

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۸۰ تابع $f(x) = \frac{|x| + |a|x}{|2x-1| + b}$ دارای دو جانب افقی و دو جانب قائم است. اگر $y = \alpha$ و $y = 2\alpha$ جانب‌های افقی و $x = \beta$ و $x = 2\beta$ جانب‌های قائم باشند، کدام مورد برابر b است؟

$-2|a|$ (۴)

$2|a|$ (۳)

$|a|$ (۲)

$-|a|$ (۱)

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۸۱ خط d در نقطه $(-1, 5)$ بر نمودار تابع f مماس است. اگر شیب خط d برابر $-\frac{1}{2}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}f(x)$ باشد، مقدار $g'(-1)$ کدام است؟

$\frac{13}{6}$ (۴)

$\frac{7}{6}$ (۳)

$-\frac{10}{3}$ (۲)

$-\frac{4}{3}$ (۱)

سراسری-تجربی-دی ۱۴۰۱

۸۲ حاصل ضرب بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{a-2x}$ برابر $\sqrt{12}$ است. اگر $a > 0$ باشد، مقدار $[a]$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۴ ۳ ۶ ۴ ۱۲

سراسری-تجربی-دی ۱۴۰۱

۸۳ اگر $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{ax+b}{a \cos x - \sin x} = -\infty$ باشد، کمترین مقدار صحیح b کدام است؟

- ۱ -۴ ۲ -۳ ۳ -۲ ۴ -۱

سراسری-تجربی-دی ۱۴۰۱

۸۴ نمودار تابع $f(x) = (m^2 + 1)x^2 + (2 - m)x - 5$ محور x ها را در α و β قطع می‌کند. اگر مجموع α و β بیشترین مقدار باشد، m کدام است؟

- ۱ $2 + \sqrt{5}$ ۲ $2 + \sqrt{3}$ ۳ $2 - \sqrt{5}$ ۴ $2 - \sqrt{3}$

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۸۵ به ازای کدام مقدار a ، اختلاف شیب نیم‌خط‌های مماس چپ و راست بر منحنی تابع $f(x) = |4x - 3|\sqrt{ax}$ ، در نقطه $x = \frac{3}{4}$ برابر $2\sqrt{6}$ می‌شود؟

- ۱ ۲ ۲ ۸ ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ $\frac{1}{8}$

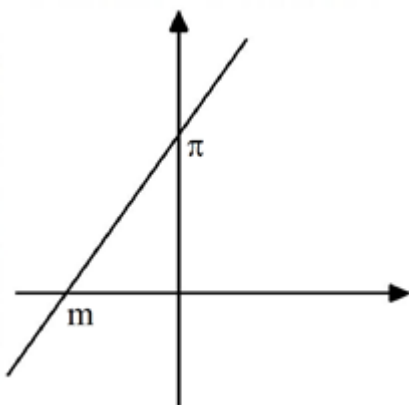
سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۸۶ تابع $f(x) = \frac{x}{1 - x|x|}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

- ۱ صفر ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ ۳

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۸۷ شکل مقابل، نمودار تابع f^{-1} را نشان می‌دهد. اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \pi$ باشد، مقدار m کدام است؟



- ۱ $-\sqrt{\pi}$ ۲ $-\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ۳ $-\frac{1}{\pi}$ ۴ $-\pi\sqrt{\pi}$

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۸۸ در ساخت قوطی‌های حلبی دریا به شکل مکعب مستطیل با قاعده مربع و حجم ۴ واحد مکعب، حداقل حلب استفاده شده در هر قوطی، چند واحد مربع است؟

- ۱ ۱۴ ۲ ۱۲ ۳ ۱۰ ۴ ۸

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۸۹ نمودار تابع $y = x^3 + ax^2 - 2bx - 4$ در نقاطی به طول صفر و ۲- دارای اکسترمم نسبی است. فاصله بین نقاط اکسترمم نسبی این تابع، چقدر است؟

- ۱ $2\sqrt{5}$ ۲ $2\sqrt{11}$ ۳ $2\sqrt{15}$ ۴ $2\sqrt{101}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۹۰ اگر $y = 2x + b$ بر نمودار $y = \frac{x+a}{ax+1}$ در نقطه‌ای به طول واحد مماس باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟

- ۱ صفر ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ $\frac{2}{3}$ ۴ ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۹۱ اگر $f(x) = \sqrt{ax^2 + x + 1}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x+2} = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left[\frac{1}{x} \right] f(x)$ چقدر است؟

- ۱ $-\frac{1}{2}$ ۲ ۱ ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ -۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۹۲ نقاط $A(0,0)$ و $B(1,1)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ هستند. حاصل ab کدام است؟

- ۱ -۳ ۲ -۶ ۳ ۳ ۴ ۶

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۳ در بازه $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin x \cos 2x$ چند برابر آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ است؟

- ۱ -۱ ۲ ۱ ۳ $-\frac{1}{2}$ ۴ $\frac{1}{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۴ اگر f تابع مشتق‌پذیر، $g(x) = f(\tan^2 x + \sqrt{2} \cos x)$ و $g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ باشد، مقدار $f'(2)$ چقدر است؟

- ۱ $\frac{1}{2}$ ۲ $\frac{2}{3}$ ۳ $\sqrt{3}$ ۴ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۵ در کدام نقطه از منحنی $y = x^2 - 4x + 5$ ، خط مماس بر منحنی، بر خط $6y - 3x = 1$ عمود است؟

- ۱ $(-2, 17)$ ۲ $(-1, 10)$ ۳ $(1, 2)$ ۴ $(2, 1)$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۶ نقطه $A\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ محل تلاقی مجانب‌های نمودار $y = \frac{bx^2 + 7}{2x^2 + ax + 1}$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ $\frac{3}{4}$ ۳ $\frac{1}{4}$ ۴ ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی



۹۷ از بین مخروط های حاصل که از دوران کامل پاره خط AB با اندازه $3\sqrt{3}$ حول خط L به دست می آیند، ارتفاع مخروطی با بیشترین حجم، کدام است؟ (فقط نقطه A روی خط L واقع است).

۴ $\sqrt{3}$

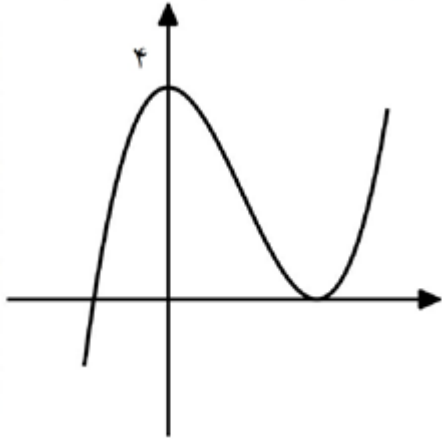
۳ $2\sqrt{3}$

۲ ۳

۱ ۶

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۱

۹۸ نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است. طول نقطه مینیمم نسبتی تابع، کدام است؟



۴ ۳

۳ $\frac{3}{2}$

۲ ۲

۱ $\frac{1}{2}$

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۱

۹۹ معادله خط مماس بر نمودار $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + 3}$ در نقطه ای به طول واحد بر روی نمودار، به صورت $4y - 3x = n$ است. مقدار $m + n$ چقدر است؟

۴ ۳

۳ ۲

۲ -۲

۱ -۳

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۱

۱۰۰ اگر $f(x) = x \left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}} \right)^2$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ کدام است؟

۴ $\frac{3}{14}$

۳ $\frac{2}{7}$

۲ $\frac{1}{9}$

۱ $\frac{1}{27}$

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۱

۱۰۱ اگر $g(x) = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{|x - 1|}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} (4 - [x])g(x) = 6$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ کدام است؟

۴ -۲

۳ ۲

۲ ۱

۱ -۱

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۱

۱۰۲ محل تلاقی مجانب های تابع $y = \frac{ax + 3}{(a+1)x + (a-1)}$ ، نقطه مینیمم تابع $y = \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{6}$ است. نمودار این تابع هموگرافیک، محور x ها را در نقطه ای با کدام طول قطع می کند؟

۴ $-\frac{3}{2}$

۳ $\frac{3}{2}$

۲ -۳

۱ ۳

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱



۱۰۳ نقطه $A(-1, 1)$ اکستریمم نسبی تابع $y = x^2|x| + 3ax^2 + b$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

- ۱ -۳ ۲ $-\frac{1}{3}$ ۳ ۳ ۴ $\frac{1}{3}$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۱۰۴ اگر $f(x) = (x-2)\sqrt{x+3}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(5-h) - 3f(5-h) + 2}{h(5-h)}$ کدام است؟

- ۱ $\frac{13}{30}$ ۲ $-\frac{5}{12}$ ۳ $\frac{5}{6}$ ۴ $-\frac{13}{15}$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۱۰۵ تابع f مشتق‌پذیر و با دوره تناوب ۵ است. اگر $f'(-1) = \frac{3}{2}$ و $g(x) = f(x+1) + f(3x+10)$ باشد، حاصل $g'(-2)$ کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ $\frac{7}{2}$ ۳ ۶ ۴ $\frac{13}{2}$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۱۰۶ در نقطه تلاقی منحنی‌های $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cos x$ و $g(x) = \frac{3}{2}\sin x$ در بازه $[0, \pi]$ خط مماسی بر منحنی $f(x)$ رسم می‌شود. این خط، محور x ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

- ۱ $\frac{\pi}{4} - 1$ ۲ $\frac{\pi}{4} - 3$ ۳ $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{8}$ ۴ $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{8}$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۱۰۷ تابع $f(x) = \frac{|ax+1|+2x}{|x|+b}$ دارای دو مجانب افقی و دو مجانب قائم است. اگر هر ریشه مخرج با یکی از حدهای تابع در بی‌نهایت برابر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ کدام است؟

- ۱ -۳ ۲ ۱ ۳ $-\frac{1}{2}$ ۴ $\frac{1}{4}$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۱۰۸ کوتاه‌ترین فاصله‌ی سهمی $y^2 = 4x$ از نقطه‌ی $M(3, 0)$ ، کدام است؟

- ۱ $\sqrt{2}$ ۲ $\frac{3}{2}$ ۳ $2\sqrt{2}$ ۴ ۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۰۹ فرض کنید $g(x) = ax^2 + 5x + b$. اگر $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \leq 2 \\ g'(x) & x > 2 \end{cases}$ مشتق‌پذیر باشد، مقدار $a+b$ ، کدام است؟

- ۱ $-\frac{15}{2}$ ۲ $-\frac{5}{2}$ ۳ $\frac{5}{2}$ ۴ $\frac{15}{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۱۰ فرض کنید $f(x) = (x[x])^3$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. مقدار مشتق چپ تابع fog در $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ چند برابر $(-48\sqrt{5})$ است؟ (نماد جزء صحیح است.)

۸ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۱۱ قرینه‌ی نقطه‌ی A واقع بر منحنی $f(x) = \sqrt[3]{-x}$ را در دامنه‌ی $[0, 1]$ نسبت به نیمساز ناحیه‌ی دوم و چهارم صفحه‌ی مختصات تعیین و آن را A' می‌نامیم. ماکزیمم طول پاره‌خط AA' کدام است؟

$\frac{4}{3\sqrt{2}}$ (۴)

$\frac{2}{3\sqrt{2}}$ (۳)

$\frac{4}{3\sqrt{6}}$ (۲)

$\frac{2}{3\sqrt{6}}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۱۲ مینیمم مطلق تابع $f(x) = x|3 - x^2|$ در بازه‌ی $[-1/5, \sqrt{3}]$ ، کدام است؟

$-\frac{9}{8}$ (۴)

$-\sqrt{3}$ (۳)

-۲ (۲)

$-\frac{9}{4}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۱۳ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ را در نظر بگیرید. شیب خط مماس بر منحنی $f^{-1}(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، کدام است؟

۱۲ (۴)

۸ (۳)

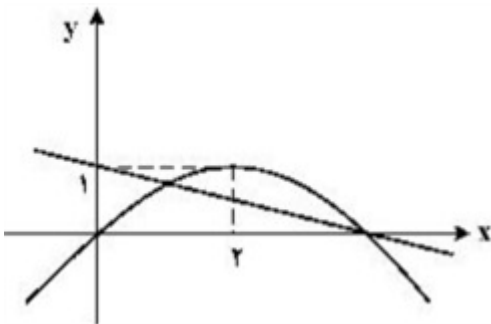
-۸ (۲)

-۱۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۱۴ نمودار تابع سهمی f و خط راست g در شکل زیر داده شده است.

مقدار $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) + g(x)}{4 - x}$ ، کدام است؟



$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{5}{4}$ (۳)

$-\frac{5}{4}$ (۲)

$-\frac{3}{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۱۵ مقدار $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1} - x^2}{x}$ ، کدام است؟

-۱ (۴)

صفر (۳)

۱ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی



۱۱۶ فرض کنید A و B نقاط مینیمم نسبی و C و D نقاط عطف تابع $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ باشند. زاویه‌ی بین پاره‌خط‌های AB و CD، کدام است؟

- ۱) صفر ۲) ۳۰ ۳) ۴۵ ۴) ۶۰

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱۷ تعداد بازه‌هایی که تابع $f(x) = \frac{x^4 - 3}{x^2 - 2}$; $x \in (-2, 2)$ در آن‌ها اکیداً نزولی باشد، کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱۸ مجموعه‌ی مقادیری از اعداد حقیقی که در آن تابع $f(x) = 3\sqrt{x} + |x|$ صعودی باشند، کدام است؟

- ۱) $[-1, \infty)$ ۲) $(-\infty, \infty)$ ۳) $[-1, 0) \cup (0, \infty)$ ۴) $[-3\sqrt{3}, 0]$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱۹ از محل تقاطع نمودار منحنی $f(x) = \sqrt{x} + 2$ با وارون آن دو خط مماس یکی بر f و دیگری بر f^{-1} رسم می‌کنیم. اگر α زاویه‌ی حاده‌ی بین دو خط مماس باشد، مقدار $\sin(2\alpha)$ ، کدام است؟

- ۱) $\frac{7}{15}$ ۲) $\frac{8}{15}$ ۳) $\frac{225}{289}$ ۴) $\frac{240}{289}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲۰ فرض کنید $f(x) = \sin^n(x^2)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)f'(x)}{(1 - \cos(x))^m} = 32\sqrt{2}$ مقدار $2m + n$ ، کدام است؟

- ۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲۱ اگر تابع $f(x) = \frac{x^3 - 5x + 4}{(x - a)(4x^2 - 4x + 1)}$ فقط دارای دو مجانب باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a ، کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲۲ مقدار $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{16x - \left[-\frac{2}{x^2}\right]}{24x + \left[\frac{2}{x^2}\right]}$ ، کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است).

- ۱) $-\infty$ ۲) $+\infty$ ۳) صفر ۴) $\frac{2}{3}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲۳ باقیمانده و خارج‌قسمت تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x^2 + 2x$ به ترتیب $3x + 1$ و $Q(x)$ است. اگر $Q(-2) = 3$ ، آن‌گاه مقدار باقیمانده‌ی تقسیم $P'(x)$ بر $x + 2$ ، کدام است؟

- ۱) -۶ ۲) -۵ ۳) -۴ ۴) -۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲۴ حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون یک کره به شعاع $۲\sqrt{۲}$ محاط می‌شود، کدام است؟

$\frac{۵۱۲\pi}{۳}$ (۴)

$\frac{۲۵۶\pi}{۳}$ (۳)

۶۴π (۲)

۳۲π (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۰

۱۲۵ فرض کنید $g(x) = ax^r + bx + c$ ، $(a \neq ۰)$ و $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq k \\ g'(x) & x < k \end{cases}$ باشد. اگر f یک تابع مشتق‌پذیر باشد، حداکثر مقدار k به شرط $b + c = a$ ، کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۱ (۲)

$\frac{۳}{۴}$ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۰

۱۲۶ فرض کنید $f(x) = \left(x \left[x^r + \frac{1}{r}\right]\right)^r + ۱$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt[r]{x^r - 1}}$. مقدار مشتق تابع $f \circ g$ در $x = \frac{r}{\sqrt{r}}$ ، چند برابر $(-۱۲۸\sqrt{r})$ است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

-۴ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۰

۱۲۷ قرینه‌ی نقطه‌ی A واقع بر سهمی $f(x) = x^r$ را نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم صفحه‌ی مختصات تعیین کرده و آن را A' می‌نامیم. اگر طول نقطه‌ی A بین دو طول متوالی از محل تقاطع تابع f با خط نیمساز موردنظر باشد، ماکزیمم طول پاره‌خط AA' ، کدام است؟

$\frac{\sqrt{r}}{۸}$ (۴)

$\frac{\sqrt{r}}{۴}$ (۳)

$\frac{\sqrt{r}}{۲}$ (۲)

$\sqrt{r}$ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۰

۱۲۸ تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^r}{x^r - ۱} |x^r - ۴|$ ، کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۰

۱۲۹ مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}} \right)$ ، کدام است؟

$\sqrt{r}$ (۴)

$\frac{\sqrt{r}}{۲}$ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۰

۱۳۰ فرض کنید A و B نقاط اکسترمم تابع $f(x) = ۲x^r - ۳x^r - ۱۲x + ۱$ باشند. چند نقطه روی منحنی f وجود دارد که خطوط مماس بر آن‌ها، موازی پاره‌خط AB است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۱۳۱ بازه‌هایی که تابع $f(x) = \frac{x^r}{x^r - ۸}$ در آن‌ها اکیداً نزولی است را در نظر بگیرید. مینیمم طول این بازه‌ها، کدام است؟

$۲(\sqrt[۳]{۴} - ۱)$ (۴)

$۲\sqrt[۳]{۴}$ (۳)

$\sqrt[۳]{۴} - ۱$ (۲)

۲ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۱۳۲ کدام عبارت، برای تابع $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt{x^2-1}}$ درست است؟

- ۱ تابع f در بازه $(0, 1) \cup (1, \infty)$ صعودی است.
 ۲ تابع f در بازه‌های $(0, 1)$ و $(1, \infty)$ صعودی است.
 ۳ تابع f در بازه $(1, \infty)$ صعودی و در بازه $(0, 1)$ نزولی است.
 ۴ تابع f در بازه $(1, \infty)$ نزولی و در بازه $(0, 1)$ صعودی است.

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۱۳۳ خطوط مماس بر منحنی تابع $f(x) = |\sin(2x)| + 1$ را در نقطه‌ای به طول $x = 0$ رسم می‌کنیم. اگر A و B به ترتیب نقاط برخورد خطوط مماس با نیمساز ربع دوم و چهارم باشند، طول پاره خط AB ، کدام است؟

- ۱ صفر ۲ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۳ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ۴ $2\sqrt{2}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۱۳۴ فرض کنید $f(x) = \cos^3(2x) + ax^2 + b$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{x} = 2$ ، مقدار $a + b$ ، کدام است؟

- ۱ ۸ ۲ ۶ ۳ ۴ ۴ -۸

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۱۳۵ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[n]{(a^2x^2-1)(a^2x^2-1)\dots(a^{100}x^{100}-1)}}{a^{29}x^k-1} = -1$ ، آن‌گاه مقدار a و k ، کدام‌اند؟

- ۱ $k = 51, a = -1$ ۲ $k = 51, a = 1$ ۳ $k = 49, a = -1$ ۴ $k = 49, a = 1$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۱۳۶ تابع $f(x) = \frac{ax^3 - bx^2 + 2}{ax^2 - bx + 2}$ در دو نقطه ناپیوسته و فقط دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد. مقدار a و b ، کدام‌اند؟

- ۱ $a = 0, b = 2$ ۲ $a = 8, b = 10$ ۳ $a = -2, b = 0$ ۴ $a = -8, b = -6$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۱۳۷ مقدار $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{10x - 5 + \left[\frac{2}{x^2}\right]}{16x - \left[-\frac{2}{x^2}\right]}$ ، کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- ۱ $-\infty$ ۲ صفر ۳ $\frac{5}{8}$ ۴ $+\infty$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۱۳۸ فرض کنید $f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = 1 - x^2$. تعداد عناصر مجموعه نقاطی که fog یا gof در آن‌ها مشتق‌پذیر نیست، کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ ۵

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰



۱۳۹

تابع چندجمله‌ای درجه‌ی دوم با ضرایب طبیعی $P(x)$ مفروض است. اگر باقیمانده و خارج قسمت تقسیم $P(x)$ بر $P'(x)$ (مشتق تابع $P(x)$) به ترتیب ۲- و $\frac{1}{3}x + 1$ باشند، کمترین مقدار مجموع ضرایب $P(x)$ ، کدام است؟

۹ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۱۴۰

در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} & ; 0 \leq x < 4 \\ \left[\frac{x}{4}\right](x^2 - 9x) & ; 4 \leq x < 8 \end{cases}$ مقدار $f'(5) - f'(2)$ ، کدام است؟

 $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۴۱

فرض کنید نمودارهای دو تابع $y = x\sqrt{x}$ و $y = x^2 + ax + b$ در یک نقطه‌ی مشترک، بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطه‌ی مشترک ۴ باشد، مقدار b کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۴۲

اگر f یک تابع مشتق‌پذیر، $g(x) = f\left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}\right)$ و $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ باشند، مقدار $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ ، کدام است؟

 $-\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{4}{3}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۴۳

نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax^2 + 7x}{2x^2 + bx + c}$ ، فقط یک مجانب قائم $x = 2$ دارد. اگر $f(3) = 6$ باشد، معادله‌ی مجانب افقی آن، کدام است؟

 $y = \frac{3}{2}$ (۴) $y = \frac{1}{2}$ (۳) $y = -\frac{1}{2}$ (۲) $y = -1$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۴۴

فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ ، حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}}$ ، کدام است؟

 $-\frac{1}{2}$ (۴)

۰ (۳)

 $\frac{1}{2}$ (۲) $+\infty$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۴۵

فاصله‌ی نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x) = \frac{x^3}{x-2}$ ، از خط $y = -2$ ، کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۴۶

کوتاه‌ترین فاصله‌ی نقطه $A(5, 0)$ از نقاط منحنی به معادله‌ی $y = \sqrt{2x+7}$ ، کدام است؟

 $3\sqrt{2}$ (۴)

۵ (۳)

 $4/5$ (۲)

۴ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی



۱۴۷) مقدار ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}$ ، کدام است؟

- ۱) $-1 + \sqrt{5}$ ۲) $1 + \sqrt{5}$ ۳) $-1 + \sqrt{3}$ ۴) $1 + \sqrt{3}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۴۸) مقدار مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt[2]{\left(\frac{2x - x^2}{3x + 5}\right)^2}$ ، در نقطه‌ی $x = -2$ ، کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۴۹) خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ و $g(x) = ax^2 + bx$ ، در نقطه‌ی $x = 2$ ، مشترک‌اند. مقدار b ، کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۵۰) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{4x^n - 6x^2 + 1}{ax^2 + 7x^2 - 2}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ ، کدام است؟

- ۱) $-\frac{4}{17}$ ۲) $-\frac{6}{17}$ ۳) $-\frac{5}{12}$ ۴) $-\frac{6}{11}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۵۱) خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \frac{5x - 2}{\sqrt{x}}$ در نقطه‌ی $x = 4$ واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

- ۱) -۴ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) ۳

سراسری-ریاضی-۹۹

۱۵۲) آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sqrt{21 - x^2} + 4x$ در بازه‌ی $[5, 6]$ ، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، با کدام مقدار x است؟

- ۱) $4 + \sqrt{2}$ ۲) $3 + 2\sqrt{2}$ ۳) $2 + \frac{2}{3}\sqrt{2}$ ۴) $2 + \frac{5}{3}\sqrt{2}$

سراسری-ریاضی-۹۹

۱۵۳) اگر f یک تابع مشتق‌پذیر، $g(x) = f(\sqrt{1 + \tan^2 x})$ و $g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، مقدار $f'(2)$ ، کدام است؟

- ۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

سراسری-ریاضی-۹۹

۱۵۴) نمودار تابع $f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{ax^2 + bx + c}$ دارای خط‌های مجانب $y = -1$ ، $x = -2$ و $x = 1$ است. $f(-1)$ کدام است؟

- ۱) $1/25$ ۲) $1/5$ ۳) $1/75$ ۴) $-1/5$

سراسری-ریاضی-۹۹



۱۵۵ فرض کنید $n \in \mathbb{N}$. حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}}$ ، کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) -1 (۴)

سراسری-ریاضی-۹۹

۱۵۶ فاصله‌ی دو نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 - 6}{x^2 + 3}$ ، کدام است؟

- ۱ (۱) $\sqrt{3}$ (۲) 2 (۳) $\sqrt{5}$ (۴) 3

سراسری-تجربی-۹۹

۱۵۷ از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازه‌ی وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیش‌ترین باشد؟

- ۱ (۱) $\frac{2}{1}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{1}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{1}$

سراسری-تجربی-۹۹

۱۵۸ فاصله‌ی نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x + \sqrt{4x - x^2}$ ، از نیمساز ناحیه‌ی اول کدام است؟

- ۱ (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) 2 (۳) $2\sqrt{2}$ (۴)

سراسری-تجربی-۹۹

۱۵۹ مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x^2 - x} \right)^2$ ، در نقطه‌ی $x = 2$ ، کدام است؟

- ۱ (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{5}{4}$ (۳) $-\frac{5}{2}$ (۴) $-\frac{15}{4}$

سراسری-تجربی-۹۹

۱۶۰ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-2x} & ; x \leq -2 \\ -\frac{1}{4}x^2 + bx + c & ; x > -2 \end{cases}$ ، در $x = -2$ ، مشتق‌پذیر است. مقدار c کدام است؟

- ۱ (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

سراسری-تجربی-۹۹

۱۶۱ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax - \sqrt{x^2 - 1}}{4x^n - 12}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{6}$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ، کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{1}{24}$ (۲) $\frac{1}{18}$ (۳) $\frac{1}{12}$ (۴) $\frac{5}{36}$

سراسری-تجربی-۹۹

۱۶۲ حاصل $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{[x] + 3}{x + 2}$ ، کدام است؟

- ۱ (۱) $-\infty$ (۲) -1 (۳) صفر (۴) 1

سراسری-تجربی-۹۹



۱۶۳ فاصله‌ی نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع $f(x) = \frac{2x - x^2}{(x + 1)^2}$ از خط مجانب افقی آن، کدام است؟

۴ $\frac{3}{2}$

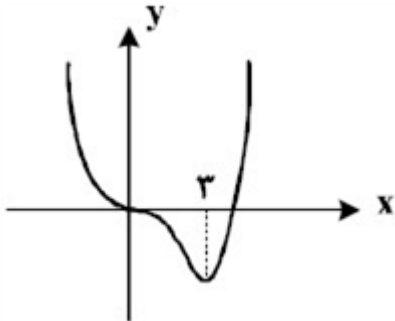
۳ $\frac{4}{3}$

۲ ۱

۱ $\frac{2}{3}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۶۴ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx^2$ است. $f(-2)$ کدام است؟



۴ ۴۸

۳ ۴۰

۲ ۳۶

۱ ۳۲

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۶۵ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه‌ی $[0, 4]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = \frac{3}{2}$ ، چه قدر کمتر است؟

۴ 0.06

۳ 0.05

۲ 0.04

۱ 0.03

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۶۶ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{|x^3 - 2x|}{x}$ ، در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۴ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۶۷ خط به معادله‌ی $y = 3x - 5$ در نقطه‌ی $x = 2$ بر نمودار تابع $y = g(x)$ مماس است.

اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2x - 2} = \frac{2}{3}$ باشد، $(fog)'(2)$ کدام است؟

۴ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۶۸ نمودار تابع $y = \frac{2x^2 - x - 2}{x^2 + 2x}$ ، نسبت به مجانب افقی خود، در بی‌نهایت کدام وضع را دارد؟



۲



۱



۴



۳

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۶۹ بیش‌ترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟

۴ ۳۶

۳ ۲۷

۲ ۲۴

۱ ۱۸

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی



۱۷۰ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x|x| - 2x$ ، فاصله‌ی دو نقطه‌ی ماکسیمم نسبی و می‌نیمم نسبی آن، کدام است؟

۴ (۴)

$3\sqrt{2}$ (۳)

۳ (۲)

$2\sqrt{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۷۱ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{4x-5}{x+1}$ و دامنه‌ی $[0, 8]$ ، خط مماس بر نمودار آن موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای

منحنی را به هم وصل کند، این خط مماس، محور y ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

-0.5 (۴)

-۱ (۳)

-1.5 (۲)

-۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۷۲ مشتق تابع $f(x) = x\sqrt{\frac{2x+1}{x+2}}$ در نقطه‌ی $x = -3$ ، کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{4}{3}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۷۳ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{ax+b} & ; x > 2 \\ -x^2 + 6x & ; x \leq 2 \end{cases}$ ، اگر $f'(2)$ موجود باشد، a کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۷۴ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}}$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{2}+h) - f(\frac{1}{2})}{h}$ ، کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۷۵ اگر $f(x) = x - \sqrt{4x^2 + x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ، کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۷۶ در مورد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\sin x}{1+2\cos x}$ ، کدام بیان، درست است؟

$\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^+} f(x) = +\infty$ (۲)

$\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^+} f(x) = -\infty$ (۱)

$\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^-} f(x) = +\infty$ (۴)

$\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^-} f(x) = -\infty$ (۳)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۷۷ بیش‌ترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادله‌ی

$y = \sqrt{12-x}$ در ناحیه‌ی اول واقع شود، کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

$8\sqrt{3}$ (۲)

$8\sqrt{2}$ (۱)

سراسری - تجربی - ۹۸



۱۷۸ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x|x - 4|$ ، فاصله‌ی دو نقطه ماکسیمم نسبی و می‌نیمم نسبی آن، کدام است؟

- ۱ $\sqrt{5}$ ۲ $2\sqrt{2}$ ۳ $3\sqrt{2}$ ۴ $2\sqrt{5}$

سراسری-تجربی-۹۸

۱۷۹ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$ ، اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x = 2$ ، از آهنگ تغییر متوسط در بازه‌ی $[1, 4]$ ، کدام است؟

- ۱ $0/25$ ۲ $0/5$ ۳ $0/45$ ۴ $0/75$

سراسری-تجربی-۹۸

۱۸۰ اگر $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $(f \circ g)'(2) = 6$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟

- ۱ -2 ۲ -1 ۳ 2 ۴ 3

سراسری-تجربی-۹۸

۱۸۱ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & ; x \geq 2 \\ -x^2 + ax + b & ; x < 2 \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

- ۱ -2 ۲ -1 ۳ 1 ۴ 2

سراسری-تجربی-۹۸

۱۸۲ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{5-2x}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$ کدام است؟

- ۱ $\frac{4}{9}$ ۲ $\frac{5}{12}$ ۳ $\frac{7}{12}$ ۴ $\frac{5}{6}$

سراسری-تجربی-۹۸

۱۸۳ اگر $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ کدام است؟

- ۱ -1 ۲ $-\frac{1}{2}$ ۳ $-\frac{1}{4}$ ۴ صفر

سراسری-تجربی-۹۸

۱۸۴ در مورد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + |x|}$ ، کدام بیان، درست است؟

- ۱ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ۲ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ ۳ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ۴ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

سراسری-تجربی-۹۸

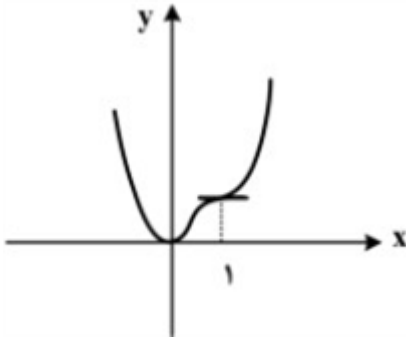
۱۸۵ فاصله‌ی نقطه‌ی می‌نیمم مطلق تابع $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2}$ ، از خط مجانب قائم آن کدام است؟

- ۱ 1 ۲ $\frac{4}{3}$ ۳ $\frac{3}{2}$ ۴ 2

سراسری-ریاضی-۹۸



۱۸۶ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x) = 3x^2 + ax^2 + bx^2 + cx$ است. a کدام است؟



۴ (۴)

۵ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۸

۱۸۷ در تابع با ضابطه $f(x) = (x+2)\sqrt{4x+1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه $[0, 2]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = \frac{3}{4}$ چه قدر بیش‌تر است؟

۲۵ (۴)

۲۰ (۳)

۱۵ (۲)

۱۰ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۸

۱۸۸ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 2x| & ; x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & ; x \geq 2 \end{cases}$ ، در نقطه‌ی $x = 2$ مشتق‌پذیر است. $a + b$ کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۸

۱۸۹ اگر $g(x) = x + \sqrt{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3}$ باشد، $(f \circ g)'(1)$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۸

۱۹۰ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 5}{x^2 + ax + b} = -\infty$ باشد، $a + b$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

-۱ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۸

۱۹۱ اگر $f(x) = \frac{x^2}{|1-x|}$ باشد، $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ ، کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۹۲ با توجه به نمودار تابع $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 + 12x$ ، به ازای کدام مقادیر m خط به معادله‌ی $y = m$ با نمودار تابع مفروض فقط در دو نقطه مشترک است؟

$-\frac{16}{3}$ و ۲۷ (۴)

$-\frac{16}{3}$ و ۲۴ (۳)

$-\frac{44}{3}$ و ۲۴ (۲)

$-\frac{44}{3}$ و ۲۷ (۱)



۱۹۳ مشتق عبارت $\tan^2 x$ ، به ازای $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

۱) ۲۴

۲) ۳۶

۳) ۵۴

۴) ۷۲

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۹۴ اگر $A(1, -2)$ نقطه‌ی عطف منحنی به معادله‌ی $y = ax^2 + bx^2 - 2x - 1$ باشد. مقدار تابع در نقطه‌ی ماکزیمم نسبی آن، کدام است؟

۱) ۴

۲) ۵

۳) ۶

۴) فاقد ماکزیمم نسبی

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۹۵ مشتق تابع $y = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ ، کدام است؟

۱) -۱

۲) صفر

۳) ۱

۴) ۲

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۹۶ حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x + 1}$ ، کدام است؟

۱) -۲

۲) $-\frac{3}{2}$

۳) ۱

۴) $\frac{3}{2}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۹۷ اگر تابع f در $x = -2$ مشتق‌پذیر و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 3}{h} = \frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه مشتق $f'(x)$ در $x = -2$ ، کدام است؟

۱) ۸

۲) ۱۰

۳) ۱۲

۴) ۱۴

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۹۸ اگر $A(1, -11)$ نقطه‌ی عطف نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 + ax^2 + bx$ باشد، آن‌گاه مقدار $f(-1)$ کدام است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۹۹ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{1 + \cos x} & ; x > 0 \\ \sin 2x & ; x \leq 0 \end{cases}$ مقدار $f'_-(0) - f'_+(0)$ ، کدام است؟

۱) 0.75

۲) ۱

۳) $1/25$

۴) $1/5$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۰۰ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{\frac{2x+5}{x+3}}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ ، کدام است؟

۱) $\frac{7}{48}$

۲) $\frac{5}{24}$

۳) $\frac{7}{24}$

۴) $\frac{7}{16}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۰۱ طول نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $y = (x-1)^2 \sqrt{x^2}$ ، کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$

۲) $\frac{1}{3}$

۳) $\frac{1}{2}$

۴) $\frac{2}{3}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی



۲۰۲ تابع f در $x = 2$ مشتق پذیر است. اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 9}{h} = \frac{3}{2}$ باشد، مشتق تابع $g(x) = x\sqrt{f(x)}$ در $x = 2$ کدام است؟

۴ (۴)

۳/۵ (۳)

۳ (۲)

۲/۵ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۰۳ به ازای کدام مقدار a به معادله $y = -3x + 2$ بر منحنی به معادله $y = \frac{x^2 + a}{x - 2}$ مماس است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

-۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۰۴ اگر عبارت $x^4 + ax^2 - bx + 4$ بر $(x - 1)^2$ بخش پذیر باشد، b کدام است؟

۶ (۴)

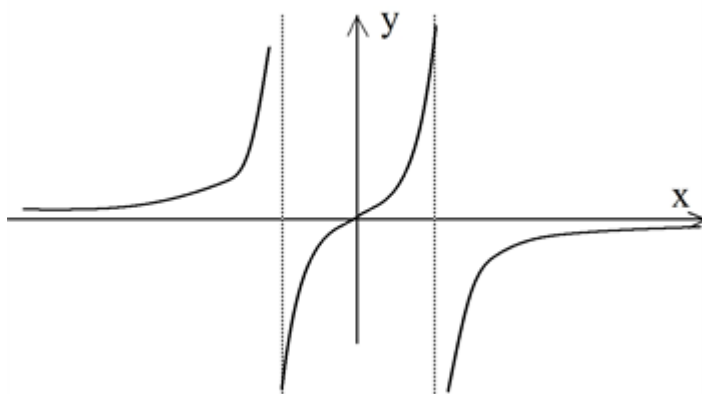
۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۰۵ شکل روبه‌رو، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x}{ax^2 + bx + 1}$ است. مقادیر a و b چگونه است؟



$a < 0, b = 1$ (۴)

$a > 0, b = 1$ (۳)

$a > 0, b = 0$ (۲)

$a < 0, b = 0$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۰۶ اگر تابعی به صورت $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - (m - 1)x^2 + 8x$ ، دارای ماکزیمم و مینیمم، با طول‌های منفی باشند. آن‌گاه مجموعه‌ی طول نقاط عطف این توابع، در کدام بازه است؟

$(-\infty, -4)$ (۴)

$(-\infty, -2)$ (۳)

$(-4, -1)$ (۲)

$(-5, -\frac{1}{2})$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۰۷ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x ، در نقطه‌ی $x = 1$ با نمو 0.44 ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

$\frac{1}{6}$ (۴)

$\frac{1}{12}$ (۳)

$\frac{1}{24}$ (۲)

$\frac{1}{30}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی



۲۰۸ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax^n - 6}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، کدام است؟

- ۱ $-\frac{1}{6}$ ۲ $-\frac{1}{8}$ ۳ $\frac{1}{4}$ ۴ $\frac{1}{3}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲۰۹ در کدام بازه تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2$ ، صعودی و تقعر نمودار آن، رو به پایین است؟

- ۱ $(-2, 0)$ ۲ $(-2, 1)$ ۳ $(-1, 2)$ ۴ $(0, 1)$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲۱۰ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} - 5 & ; x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & ; x < 1 \end{cases}$ ، در نقطه‌ی $x = 1$ مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

- ۱ 1 ۲ 2 ۳ 3 ۴ 4

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲۱۱ مشتق $y = \sin^2 \sqrt{2x}$ ، به‌ازای $x = \frac{\pi^2}{18}$ ، کدام است؟

- ۱ $\frac{9}{8\pi}$ ۲ $\frac{9}{4\pi}$ ۳ $\frac{27}{8\pi}$ ۴ $\frac{27}{4\pi}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲۱۲ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطه‌ی $x = 4$ تا $x = 6/25$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه‌ی $x = 4$ ، چقدر کمتر است؟

- ۱ $\frac{1}{36}$ ۲ $\frac{1}{18}$ ۳ $\frac{5}{72}$ ۴ $\frac{1}{12}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲۱۳ دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = 3x + |x|$ و $g(x) = \frac{3}{4}x + a|x|$ به‌ازای کدام مقدار a ، تابع g of f در مبدأ مختصات، مشتق‌پذیر است؟

- ۱ $-\frac{1}{4}$ ۲ $-\frac{1}{2}$ ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ هیچ مقدار a

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۱۴ حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + \sqrt{x^2 - 8})$ کدام است؟

- ۱ -8 ۲ صفر ۳ 4 ۴ ∞

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۱۵ مشتق تابع $y = x\sqrt{x}$ به‌ازای $x = 4$ کدام است؟

- ۱ $\frac{3}{2}$ ۲ 3 ۳ 6 ۴ 12

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-تجربی



۲۱۶ اگر $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$, $g(x) = \frac{(x+1)^2}{x}$ باشد، حاصل $(f(x) \cdot g(x))'$ به ازای $x = 2$ کدام است؟

۸ (۴)

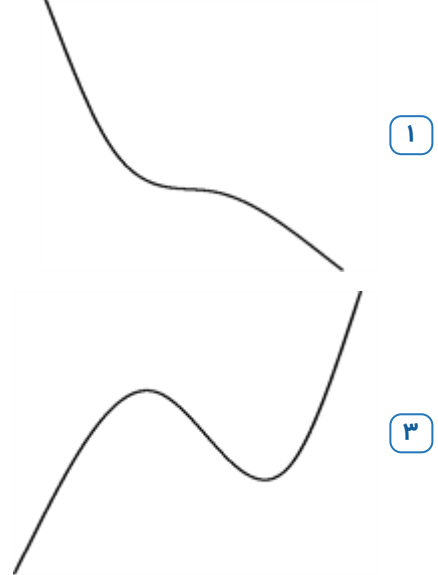
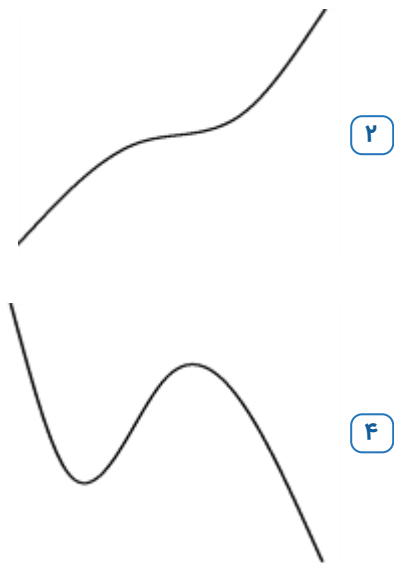
۵ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-تجربی

۲۱۷ شکل تقریبی تابع $y = -x^2 - 2x + 1$ کدام است؟



کنکورهای خارج از کشور-آزاد-تجربی

۲۱۸ اگر $2x + y = 6$ ، آنگاه بیشترین مقدار xy کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

۹ (۳)

$\frac{9}{4}$ (۲)

$\frac{9}{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۲۱۹ تابع $y = x|x^2 - x|$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

۳ (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۲۲۰ مشتق دوم تابع $y = x^2\sqrt{x}$ در $x = 1$ کدام است؟

$\frac{5}{4}$ (۴)

$\frac{15}{4}$ (۳)

$\frac{5}{2}$ (۲)

$\frac{15}{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۲۲۱ حد تابع $y = \sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 - 4x}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ کدام است؟

-۱ (۴)

۱ (۳)

-۳ (۲)

۳ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۲۲۲ به ازای کدام مقدار a ، نقطه‌ی عطف نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + ax$ بر روی نیمساز ناحیه‌ی چهارم قرار دارد؟

۲ (۴)

۱ (۳)

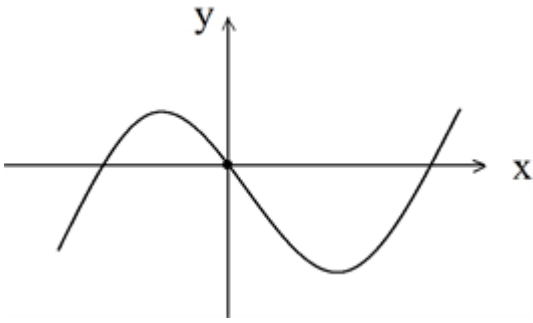
-۱ (۲)

-۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی



۲۲۳ شکل مقابل، نمودار تابع $y = \frac{2}{3}x^3 + ax^2 + bx$ است. زوج مرتب (a, b) به کدام صورت می‌تواند باشد؟



(۱, ۴) ۴

(۱, -۴) ۳

(-۱, ۴) ۲

(-۱, -۴) ۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۲۴ اگر $U = x + \sqrt{x}$ و $y = \tan^2(\pi U)$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x = \frac{1}{4}$ کدام است؟

8π ۴

4π ۳

-4π ۲

-8π ۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۲۵ در تابع $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ، روی بازه $[2, 2.02]$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x ، از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x = 2$ ، چه قدر بیشتر است؟

$\frac{2}{51}$ ۴

$\frac{1}{51}$ ۳

$\frac{1}{1.1}$ ۲

$\frac{1}{2.2}$ ۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۲۶ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x|x^2 - 3|$ ، در چند نقطه، اکسترمم نسبی دارد؟

۴ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۲۷ اگر $f(x) = 1 - |x|$ ، تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر تابع با ضابطه‌ی $y = f(f(x))$ کدام است؟

صفر ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۲۸ بیش‌ترین مساحت، از بین مستطیل‌هایی که یک ضلع آن‌ها منطبق بر محور x ها و دو رأس آن‌ها بر منحنی

$$y = \frac{3}{2}\sqrt{8 - x^2}$$
 قرار گیرند کدام است؟

۱۲ ۴

۹ ۳

$6\sqrt{2}$ ۲

۶ ۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۲۹ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ، در کدام بازه، صعودی و تقعر آن رو به پایین است؟

$(1, +\infty)$ ۴

$(0, 1)$ ۳

$(-1, 0)$ ۲

$(-\infty, -1)$ ۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۳۰ اگر $f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}$ ، مقدار $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ برابر کدام است؟

۴ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی



۲۳۱) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x - 1} - \frac{1}{x} \right)$ کدام است؟

۴) $+\infty$

۳) صفر

۲) $-\frac{1}{2}$

۱) $-\infty$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۳۲) تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 1 \\ -x + 2 & ; 0 < x < 1 \\ x^2 & ; x \leq 0 \end{cases}$

۲) مینیمم نسبی دارد اما مطلق ندارد.

۱) ماکزیمم نسبی دارد.

۴) مینیمم نسبی و مطلق دارد.

۳) مینیمم نسبی و مطلق ندارد.

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-تجربی

۲۳۳) نقطه‌ی تلاقی مجانب‌های تابع $y = \frac{3x-1}{x+1}$ روی کدام خط است؟

۴) $y = x + 1$

۳) $y = 9x + 12$

۲) $y = 9x + 3$

۱) $y = -9x + 12$

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-تجربی

۲۳۴) مختصات نقطه‌ای از تابع $y = x^3 + 3x$ که خط مماس در آن نقطه بر خط $x + 6y = 1$ عمود است، کدام است؟

۴) $(1, -1)$

۳) $(1, -4)$

۲) $(-1, -4)$

۱) $(-1, 4)$

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-تجربی

۲۳۵) تقعر منحنی به معادله‌ی $y = x^2 + \sqrt{x}$ در کدام بازه روبه پایین است؟

۴) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

۳) $(0, 1)$

۲) $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

۱) $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲۳۶) منحنی به معادله‌ی $y = \frac{x^2 + 3x}{ax^2 + 2x - 1}$ و $a \neq 0$ فقط دو خط مجانب دارد. مختصات نقطه‌ی تلاقی مجانب‌ها کدام می‌تواند باشد؟

۴) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

۳) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

۲) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

۱) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲۳۷) خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y = x^3 - x^2$ در نقطه‌ی $x = 1$ واقع بر آن، منحنی را در نقطه‌ی دیگر A قطع می‌کند، عرض نقطه‌ی A کدام است؟

۴) ۳

۳) ۲

۲) -۲

۱) -۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲۳۸) در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3$ ، آهنگ متوسط تغییر این تابع وقتی $x = 3$ و $\Delta x = 0.1$ ، از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه‌ی $x = 3$ چه قدر بیشتر است؟

۴) 0.91

۳) 0.62

۲) 0.42

۱) 0.31

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی



۲۳۹ در کدام بازه تعقر منحنی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^{\frac{6}{5}} - 12x^{\frac{1}{5}}$ روبه پایین است؟

- (۱) $(-\infty, -8)$ (۲) $(-8, 0)$ (۳) $(-4, 2)$ (۴) $(0, 2)$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۴۰ نقطه‌ی بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)^{\frac{1}{3}}$ روی بازه‌ی $(-1, 2)$ چگونه است؟

- (۱) مینیمم (۲) ماکسیمم (۳) عطف (۴) مشتق‌ناپذیر

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۴۱ اگر $f(x) = x |\sin \pi x|$ ، مقدار $f'(1^+)$ کدام است؟

- (۱) $-\pi$ (۲) -1 (۳) 1 (۴) π

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۴۲ خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y = x^3 - 3x^2 + 4$ در نقطه‌ی عطف آن، محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) 2 (۴) 3

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۴۳ مقدار مشتق $\sin x \cos 3x$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 2

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۴۴ حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9x}}{3x + \sqrt{x}}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۴۵ طول نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 4x^2$ کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -1 (۳) 0 (۴) 1

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۴۶ منحنی‌های توابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x^2 + bx + 3$ برخط به معادله‌ی $y = 7$ مماس‌اند. فاصله‌ی دو نقطه‌ی تماس کدام است؟

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 6

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

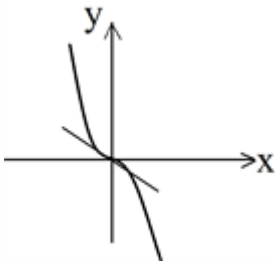
۲۴۷ معادله‌ی خط قائم بر منحنی به معادله‌ی $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + x$ ، در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن، کدام است؟

- (۱) $y - 2x = 0$ (۲) $2y - x = 3$ (۳) $y + x = 3$ (۴) $y + 2x = 4$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی



۲۴۸ شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx$ است. دوتایی (a, b) کدام می‌تواند باشد؟



(۱, ۰) ۴

(۰, ۱) ۳

(۰, -۱) ۲

(-۱, ۰) ۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۴۹ اندازه‌ی مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sqrt{3 + 2\cos \frac{\pi}{x}}$ به ازای $x = 3$ کدام است؟

$\frac{1}{4}$ ۴

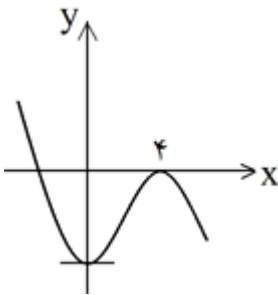
$\frac{1}{6}$ ۳

$\frac{1}{9}$ ۲

$\frac{1}{12}$ ۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۵۰ شکل مقابل نمودار تابع به معادله‌ی $y = ax^3 + bx^2 - 16$ است. a کدام است؟



$-\frac{2}{3}$ ۴

$-\frac{1}{2}$ ۳

$\frac{1}{2}$ ۲

-۱ ۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۵۱ اگر $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$ حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$ کدام است؟

$\frac{4}{3}$ ۴

$\frac{2}{3}$ ۳

۳ ۲

۲ ۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۵۲ فاصله‌ی نقطه‌ی ماکسیمم نسبی و یک نقطه‌ی عطف منحنی به معادله‌ی $y = x^4 - 6x^3 + 5$ کدام است؟

$\sqrt{26}$ ۴

$\sqrt{17}$ ۳

$\sqrt{13}$ ۲

$\sqrt{10}$ ۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۵۳ نقطه‌ی $M(x, y)$ بر روی منحنی به معادله‌ی $y = \sqrt{x+8}$ در حرکت است. T فاصله‌ی نقطه‌ی M تا مبدا مختصات است. آهنگ لحظه‌ای تغییر T در نقطه‌ی $x = 7$ کدام است؟

$\frac{5}{4}$ ۴

$\frac{3}{7}$ ۳

$\frac{15}{8}$ ۲

$\frac{15}{16}$ ۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی



۲۵۴ عرض از مبدا خط قائم به نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{2x-1}{x+1}$ در نقطه‌ی تقاطعش با محور طول‌ها کدام است؟

- ۱ $\frac{3}{4}$ ۲ $\frac{3}{8}$ ۳ $-\frac{1}{4}$ ۴ $-\frac{2}{3}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲۵۵ تابع $y = (x-1)^v(x-2)^h$

- ۱ فقط یک ماکزیمم نسبی دارد. ۲ فقط یک می‌نیمم نسبی دارد. ۳ ماکزیمم و می‌نیمم نسبی ندارد. ۴ یک ماکزیمم نسبی و یک می‌نیمم نسبی دارد.

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۲۵۶ حجم بزرگ‌ترین استوانه‌ای که در کره‌ای به شعاع ۴ محاط است، کدام است؟

- ۱ $\frac{64\pi}{3\sqrt{3}}$ ۲ $\frac{256\pi}{3\sqrt{3}}$ ۳ $\frac{256\pi}{\sqrt{3}}$ ۴ $\frac{256\pi}{9\sqrt{3}}$

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۲۵۷ اگر $f(x) = \sqrt{x^3\sqrt{x}}$ و $g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ ، حاصل $f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ در $x = 1$ کدام است؟

- ۱ $\frac{21}{12}$ ۲ ۱ ۳ $-\frac{21}{12}$ ۴ $\frac{5}{12}$

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۲۵۸ حد کسر $\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} - \sqrt{4x+12}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x} - \sqrt{4x+12}}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، کدام است؟

- ۱ $-\frac{3}{4}$ ۲ ۱ ۳ -۱ ۴ $\frac{3}{4}$

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۲۵۹ نقطه‌ای به طول $x = 1$ ، برای تابع $y = (x-1)^4(x+2)^2 + 7$ چه نقطه‌ای است؟

- ۱ عطف ۲ ماکزیمم نسبی ۳ می‌نیمم نسبی ۴ هیچ‌کدام

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۲۶۰ اگر $x + y = 18$ باشد، بیشترین مقدار x^2y کدام است؟ ($x, y > 0$)

- ۱ ۲۱۶ ۲ ۷۲۹ ۳ ۸۶۴ ۴ ۶۴۸

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۲۶۱ حد عبارت $\sqrt{x^2+4x} + \sqrt{x^3+9x^2}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ -۱ ۳ ۵ ۴ -۵

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۲۶۲ مشتق تابع $y = \frac{(x-1)^3}{x^2+x+1} + \frac{x^2-1}{x+\sqrt{x}}$ به ازای $x = 1$ کدام است؟

- ۱ صفر ۲ ۴ ۳ $\frac{1}{3}$ ۴ ۱

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی



۲۶۳ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x|x^2 - 1|$ و دامنه‌ی $(-2, 2)$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

۴ ۶

۳ ۵

۲ ۴

۱ ۳

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۶۴ اگر $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sin(\pi x)$ ، شیب خط مماس بر منحنی تابع $g \circ f$ در نقطه‌ی تلاقی آن با محور x ها، روی بازه‌ی $(0, \pi)$ کدام است؟

۴ ۰

۳ π

۲ $-\frac{\pi}{2}$

۱ $-\pi$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۶۵ حاصل $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$ کدام است؟

۴ $+\infty$

۳ $-\infty$

۲ ۱

۱ -۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۶۶ تقعر نمودار تابع $y = x^2|x - 3|$ در بازه‌ی (a, b) به طرف y های منفی است، بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۴ ۳

۳ ۲

۲ $\frac{5}{3}$

۱ $\frac{4}{3}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۶۷ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \left[x + \frac{1}{3}\right] + [x]$ روی بازه‌ی $(0, 3)$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۴ ۵

۳ ۴

۲ ۳

۱ ۲

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۶۸ اگر $f(x) = \frac{x + \sqrt{2x}}{x - 1} \cot \frac{\pi}{x}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ کدام است؟

۴ π

۳ $\frac{\pi}{2}$

۲ $-\frac{\pi}{2}$

۱ $-\pi$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۶۹ حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x + 19}{x^2 + 3x - 4} + \frac{3}{x + 4} \right)$ کدام است؟

۴ $\frac{2}{3}$

۳ $\frac{2}{5}$

۲ $-\frac{2}{3}$

۱ $-\frac{4}{5}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۷۰ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{1 + |x|}$ در نقطه‌ی $x = \alpha$ مشتق ندارد. مقدار $f'_+(\alpha) - f'_-(\alpha)$ کدام است؟

۴ تعریف نشده

۳ ۱

۲ $\frac{1}{2}$

۱ -۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۷۱ خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y = \frac{x^2}{x - 1}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۴ ۴

۳ ۲

۲ ۱

۱ ۰

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی



۲۷۲ اگر $f'(x) = \frac{1}{x}$ ، مشتق تابع $f(x + \sqrt{1+x^2})$ کدام است؟

۴ $\sqrt{1+x^2}$

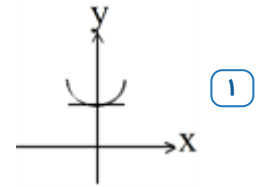
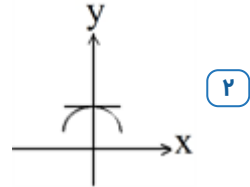
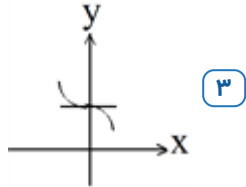
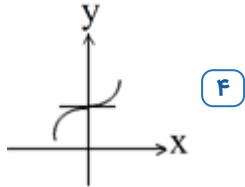
۳ $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

۲ $x - \sqrt{1+x^2}$

۱ $-x + \sqrt{1+x^2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۷۳ نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{x^2+1}{x^2+1}$ در نزدیکی نقطه $x = 0$ چگونه است؟



کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۷۴ حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 2x}}$ کدام است؟

۴ $\frac{1}{2}$

۳ ۲

۲ -۱

۱ ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۷۵ بیشترین مساحت زمینی مستطیل شکل را که می‌توان توسط یک طناب، از زمینی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، ۶۴۸ متر مربع است. طول طناب چند متر است؟

۴ ۷۲

۳ ۷۱

۲ ۷۰

۱ ۶۸

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۷۶ اگر $f(x) = x + \cos^5(g(x))$ و $g(0) = \frac{\pi}{6}$ و $f'(0) = 1$ مقدار $f''(0)$ چند برابر $g''(0)$ است؟

۴ $-\frac{45}{22}$

۳ $\frac{45}{22}$

۲ $\frac{45}{16}$

۱ $-\frac{45}{16}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۷۷ نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x) = (x-1)|x^2 + x - 2|$ سه رأس مثلثی هستند، مساحت این مثلث کدام است؟

۴ ۸

۳ ۶

۲ ۴/۵

۱ ۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۷۸ به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، طول یکی از نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 - 8x$ ، در بازه $(1, 4)$ قرار می‌گیرد؟

۴ $-5 < a < 2/5$

۳ $-5 < a < 1/5$

۲ $-3 < a < 2/5$

۱ $-3 < a < 1/5$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۷۹ اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ و $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ حاصل $f'(x) \cdot g'(f(x))$ کدام است؟

۴ $\frac{1}{2}x$

۳ x

۲ ۱

۱ -۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی



۲۸۰

خط گذرا بر دو نقطه‌ی $(1, 2)$ و $(-1, 3)$ ، بر منحنی پیوسته‌ی $y = f(x)$ در نقطه‌ی $x = 3$ مماس است. حد عبارت $\frac{f^2(x) + 4(x) - 5}{3 - x}$ وقتی $x \rightarrow 3$ کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۵

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۸۱

در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & x < 1 \end{cases}$ ، مقدار $f'(1)$ موجود است، $f(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟

۱) $3 - \sqrt{2}$ ۲) $2 - \sqrt{2}$ ۳) $2 - 2\sqrt{2}$ ۴) $3 - 2\sqrt{2}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۸۲

تقعر نمودار تابع $y = (x + 3)\sqrt{x}$ ، در بازه‌ی (a, b) رو به پایین است. بیش‌ترین مقدار $b - a$ ، کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) $+\infty$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۸۳

کم‌ترین مقدار تابع $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2$ ، کدام است؟

۱) -۳۶

۲) -۳۲

۳) -۲۴

۴) -۱۸

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۸۴

حد عبارت $\frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{2[x]}{2-x}$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ ، کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

۱) $-\infty$ ۲) $-\frac{1}{2}$

۳) ۱

۴) $+\infty$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۸۵

اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} 1 + a \cos \pi x & x > 1 \\ bx^2 + x & x \leq 1 \end{cases}$ بر روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، a کدام است؟

۱) ۱

۲) $-\frac{1}{2}$

۳) -۱

۴) $\frac{1}{2}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۸۶

بیش‌ترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟

۱) ۹۵۸

۲) ۹۶۸

۳) ۹۷۸

۴) ۹۸۸

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۸۷

اگر $f'(0) = g(0) = 1$ و $f(x) = x + 1 + (g(x))^5$ ، مقدار $f''(0)$ برابر کدام است؟

۱) $4g'''(0)$ ۲) $5g'''(0)$ ۳) $4g'''(0) + 20$ ۴) $5g'''(0) + 20$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۸۸

منحنی نمایش تابع $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$ در کدام بازه نزولی و تقعر آن روبه‌بالا است؟

۱) $(-1, 0)$ ۲) $(-1, 3)$ ۳) $(0, 3)$ ۴) $(0, +\infty)$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی



۲۸۹ مقدار مشتق $\sqrt{1 + \tan^2\left(\frac{1}{x}\right)}$ به ازای $x = \frac{3}{\pi}$ کدام است؟

۴ $\frac{2\pi^2\sqrt{3}}{9}$

۳ $\frac{2\pi^2}{9}$

۲ $\frac{-2\pi^2}{9}$

۱ $\frac{-2\pi^2\sqrt{3}}{9}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۹۰ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^n - 3x + 1}{3x^2 + x}$ اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3}$ باشد، $f(-1)$ کدام است؟

۴ ۳

۳ ۲

۲ $\frac{3}{2}$

۱ -۲

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۹۱ طول نقطه‌ی عطف نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{(2-x)^2}{x}$ کدام است؟

۴ فاقد عطف

۳ ۱

۲ صفر

۱ -۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۹۲ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(2x+6)^2} & ; x > 1 \\ ax+b & ; x \leq 1 \end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود است، b کدام است؟

۴ $\frac{10}{3}$

۳ $\frac{8}{3}$

۲ $\frac{7}{3}$

۱ $\frac{4}{3}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۹۳ مقدار مشتق تابع $y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3x}\right)$ به ازای $x = 4$ کدام است؟

۴ $\frac{\pi}{32}$

۳ $\frac{\pi}{48}$

۲ $\frac{\pi}{72}$

۱ $\frac{\pi}{96}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۹۴ تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ بر روی دامنه‌ی خود، کدام است؟

۴ بی‌شمار

۳ ۲

۲ ۱

۱ صفر

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۹۵ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x$ از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟

۲ ماکسیمم نسبی

۱ می‌نیمم نسبی

۴ فاقد اکسترمم نسبی

۳ می‌نیمم نسبی و ماکسیمم نسبی

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۹۶ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = -1$ ، آن‌گاه حد راست این عبارت در نقطه‌ی $x = -2$ کدام است؟

۴ $\frac{4}{3}$

۳ $\frac{2}{3}$

۲ $-\frac{2}{3}$

۱ $-\frac{4}{3}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی



۲۹۷ دو نقطه به طول‌های ۳ و ۵- نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ هستند. مقدار مینیمم نسبی این تابع، کدام است؟

۴ -۷۵

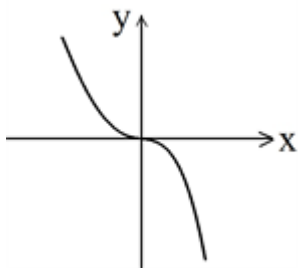
۳ -۵۷

۲ -۸۱

۱ -۸۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲۹۸ شکل مقابل نمودار تابع $y = ax^2 + bx^2 - 4x$ است. کدام دوتایی برای (a, b) می‌تواند مورد قبول باشد؟



۴ (۱, ۴)

۳ (۱, -۲)

۲ (-۱, ۶)

۱ (-۱, ۳)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲۹۹ مقدار مشتق تابع $y = \frac{1 + \cos 2x}{\cos 2x}$ ، به ازای $x = \frac{\pi}{12}$ کدام است؟

۴ $\frac{4}{3}$

۳ $\frac{3}{4}$

۲ $-\frac{3}{4}$

۱ $-\frac{4}{3}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۳۰۰ در تابع $f(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{ax - 2}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ، کدام است؟

۴ $\frac{3}{2}$

۳ $\frac{3}{4}$

۲ $\frac{2}{3}$

۱ صفر

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۳۰۱ طول نقطه عطف تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & ; x < 1 \\ \frac{1}{x} & ; x \geq 1 \end{cases}$ ، در صورت وجود، کدام است؟

۴ فاقد عطف

۳ ۱

۲ صفر

۱ -۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۰۲ به ازای کدام مقادیر a ، تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ ، دارای ماکزیمم نسبی است؟

۴ هیچ مقدار a

۳ $a > 0$

۲ $a < 0$

۱ $|a| > 2$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۰۳ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x}}{x} & ; x \geq 1 \\ ax^2 + bx & ; x < 1 \end{cases}$ بر روی R مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۴ ۵

۳ ۳

۲ -۱

۱ -۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی



۳۰۴ اگر $f(x) = \sin^2 \pi x - \frac{1}{2} \cos \pi x$ ، مشتق تابع $f(f(x))$ در نقطه $x = \frac{1}{3}$ ، چند برابر $3\sqrt{3}$ است؟

$\frac{\pi^2}{4}$ (۴)

$\frac{\pi^2}{8}$ (۳)

$\frac{\pi}{4}$ (۲)

$\frac{\pi}{8}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۰۵ در تابع با ضابطه $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)$ کدام است؟

موجود نیست. (۴)

$-\infty$ (۳)

صفر (۲)

-۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۰۶ اگر $f(x) = \frac{x - |3x|}{2}$ و $g(x) = \sin x$ و $-\pi < x < 0$ باشد، مشتق تابع $f(g(x))$ کدام است؟

$2 \sin x$ (۴)

$2 \cos x$ (۳)

$\cos x$ (۲)

$-2 \cos x$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۳۰۷ مجموع مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt{|3x - 2|}$ در فاصله $[0, 1]$ کدام است؟

$\sqrt{2}$ (۴)

۱ (۳)

۳ (۲)

$\frac{5}{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۳۰۸ به ازای کدام مقادیر m خط به معادله‌های $y = m$ منحنی تابع $y = x^3 - 6x^2$ را در سه نقطه متمایز قطع می‌کند؟

$0 < m < 16$ (۴)

$-16 < m < 16$ (۳)

$-32 < m < 0$ (۲)

$-8 < m < 8$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱

$$y_1 - y_2 = (x^2 + 2x - 3) - (x^2 - 2x^2 + 1) = 2x^2 + 2x - 4$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$y_1 - y_2 = 2 \times \frac{1}{4} + 2 \times -\frac{1}{2} - 4 = -4/5$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲

$$\frac{A(x, f(x))}{O(.,.)} \Rightarrow m_{OA} = f'(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = f'(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = x f'(x) \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{-2x^2 + x + 1} = x \left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(-2x^2 + x + 1) - \sqrt{x}(-4x + 1)}{(-2x^2 + x + 1)^2} \right)$$

$$\frac{\times \sqrt{x}}{1} \Rightarrow \frac{-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 2x^2 - x}{-2x^2 + x + 1} \Rightarrow -2x^2 + x + 1 = 2x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow 4x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

$$4x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{4}}}{-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{\sqrt{4}} \\ x = -\frac{1}{4} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳

$$\text{مماس یعنی هم مقدار و هم مشتق برابر دارند} \quad \begin{aligned} f(2) &= -2a - 5 \\ f'(2) &= -a \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -a + 2a + 5 = 2 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{f(2)}{f'(2)} = \frac{-3 \times \frac{-3}{2} - 5}{\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۴

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{k[2^+] - 2}{2^+ - 2} = \frac{2k - 2}{0^+} = +\infty \Rightarrow 2k - 2 > 0 \Rightarrow k > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{k[2^-] - 2}{2^- - 2} = \frac{k - 2}{0^-} = +\infty \Rightarrow k - 2 < 0 \Rightarrow k < 2$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$1 < k < 2 \Rightarrow \pi < k\pi < 2\pi \Rightarrow \sin k\pi < 0$$

پس نقاطی به فرم $(k\pi, \sin k\pi)$ دارای طول مثبت و عرض منفی هستند، یعنی در ناحیه چهارم قرار دارند.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۵

$$y = |f(x)| = |x|(|x| + 2) = \begin{cases} x(x + 2) & ; x \geq 0 \\ -x(-x + 2) & ; x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 + 2x & ; x \geq 0 \\ x^2 - 2x & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & ; x > 0 \\ 2x - 2 & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = |f(x)| \text{ تابع در } R \text{ پیوسته است}$$

و $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ ، لذا تنها نقطه بحرانی این تابع $x = 0$ می باشد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۶

$$x = 1 \text{ در پیوستگی } a = b + c (*)$$

$$f'(x) = \begin{cases} a \times \frac{r}{r\sqrt{x}} & x \geq 1 \\ c & 0 < x < 1 \end{cases}, f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow \frac{r}{r}a = c \xrightarrow{*}$$

$$a = b + \frac{r}{r}a \Rightarrow b = \frac{1}{r}a \Rightarrow \frac{ab}{c^r} = \frac{a \times \frac{1}{r}a}{\frac{r}{r}a^r} = \frac{a}{1r} = \frac{r}{r}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷

$$f(x) = mx + ra, f(ra) = 0 \Rightarrow rma + ra = 0 \Rightarrow m = -\frac{r}{r}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{r}{r}x + ra \Rightarrow f^{-1}: \frac{r}{r}x = -y + ra \Rightarrow x = -\frac{r}{r}y + ra \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{r}{r}x + ra$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(-\frac{r}{r}x + ra\right)^r}{x \left|-\frac{r}{r}x + ra\right|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{r}{r}x^r}{x \left|-\frac{r}{r}a\right|} \xrightarrow{x < 0} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{r}{r}x^r}{-\frac{r}{r}x^r} = -\frac{r}{r}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۸

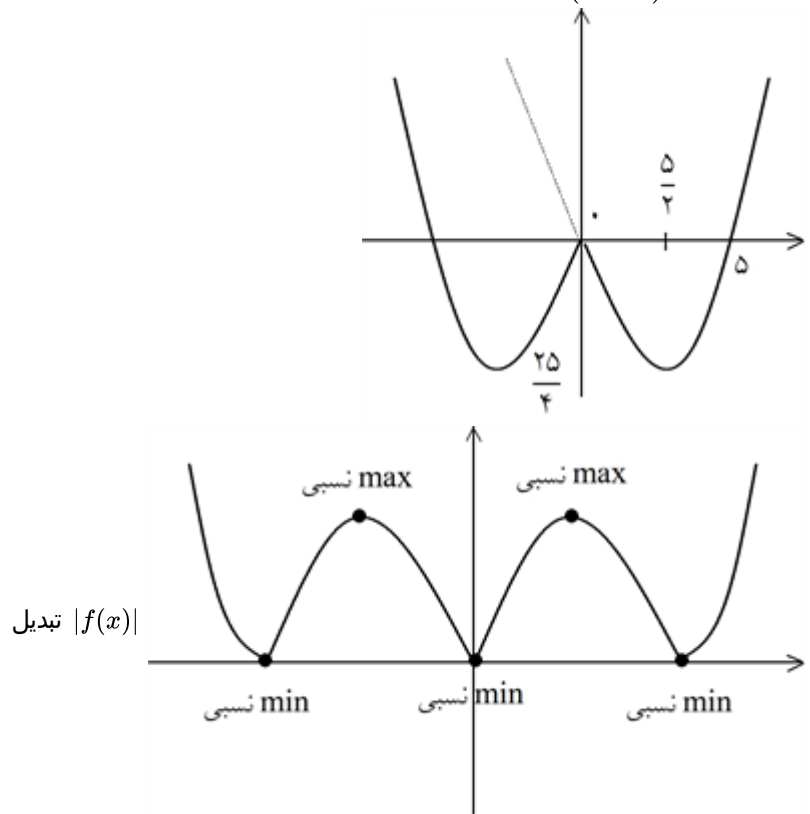
باید + باشد تا مقداری برای a حاصل شود

$$x = \frac{1}{\sqrt{r}} \xrightarrow{\text{در مخرج}} \left| \frac{\sqrt{r}}{r} \times \frac{1}{\sqrt{r}} + a \right| + a = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} + a + a = 0 \Rightarrow -\frac{1}{r} \Rightarrow [a] = -1$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = |x|^2 - 5|x| = \left(|x| - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

تابع $y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$ که خاصیت $f(|x|)$ روی آن اجرا شده

$$\begin{aligned} \text{تعداد max نسبی} &= 2 = m \\ \text{تعداد min نسبی} &= 3 = n \end{aligned} \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{3}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} a + |x| & x < 1 \\ b\sqrt[3]{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ نقطه شکستگی ضابطه اول است} \Rightarrow$$

f در نقطه ۱ مشتق پذیر است $\rightarrow f^*$ در صفر مشتق ناپذیر است

$$a + |1| = b\sqrt[3]{1^2} \Rightarrow a + 1 = b$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{مشتق پذیری در ۱} : 0 + 1 = \frac{2}{3}b \Rightarrow 1 = \frac{2}{3}b \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$a + b = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

$$a = \text{عرض از مبدا} \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{a} = 1 \Rightarrow m = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{a}{2} \Rightarrow f(x) = -\frac{a}{2}x + a$$

$$\Rightarrow y = -\frac{a}{2}x + a \Rightarrow \frac{a}{2}x = -y + a \Rightarrow x = -\frac{2}{a}y + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{2}{a}x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{2}{a}x + 2}{\left| 2\left(-\frac{a}{2}x + a\right) - a\left(-\frac{2}{a}x + 2\right) \right|} = 2$$

$$\text{مخرج} = \left| -ax + \cancel{2a} + 2x - \cancel{2a} \right| = |2x - ax| = |x| \times |2 - a| = -x|2 - a|$$

$$\text{ضریب بالاترین درجه صورت} = -\frac{2}{a}$$

$$\text{ضریب بالاترین درجه در مخرج} = -|2 - a|$$

$$\text{جواب حد} = \frac{-\frac{2}{a}}{-2|2 - a|} = 2 \Rightarrow |2 - a| = \frac{1}{a} \Rightarrow a|2 - a| = 1$$

$a \geq 2 \Rightarrow a(-2 + a) = 1 : a^2 - 2a - 1 = 0$
 $\Delta = 8$
 $a = 1 \pm \sqrt{2}$
 $a \geq 2 \Rightarrow a = 1 + \sqrt{2}$

$a \leq 2 \Rightarrow a(2 - a) = 1$
 $-a^2 + 2a - 1 = 0$
 $a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

غ ق ق چون گفته مقدار غیر صحیح a

$$\text{جواب} = +\infty \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{4}}{\cdot} = +\infty \Rightarrow \sqrt[3]{4} \text{ ریشه مخرج بوده} \Rightarrow x^3 + ax + b = (x - \sqrt[3]{4})^3$$

$$x^3 - 2\sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{16}$$

$a = -2\sqrt[3]{4}$
 $b = \sqrt[3]{16}$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt[3]{16}}{-2\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{16}}{-\sqrt[3]{32}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = -\sqrt[3]{0.5} \Rightarrow \left[-\sqrt[3]{0.5}\right] = -1$$

$$|AB| = |f_1(x) - f_2(x)| = |x^2 + 2x + 4| = x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3 \geq 3 \Rightarrow |AB|_{\min} = 3$$

$$f(x) = 8x^{\frac{5}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 20x^{\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{f(\alpha) - 0}{\alpha - 0} = f'(\alpha) \Rightarrow 8\alpha^{\frac{5}{2}} + 6\alpha^{\frac{1}{2}} = 20\alpha^{\frac{3}{2}} + 3\alpha^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow 3\alpha^{\frac{1}{2}} = 12\alpha^{\frac{5}{2}} \Rightarrow 1 = 4\alpha^2 \xrightarrow{\alpha > 0} \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{شیب خط} = f'(\alpha) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 20 \times \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۵

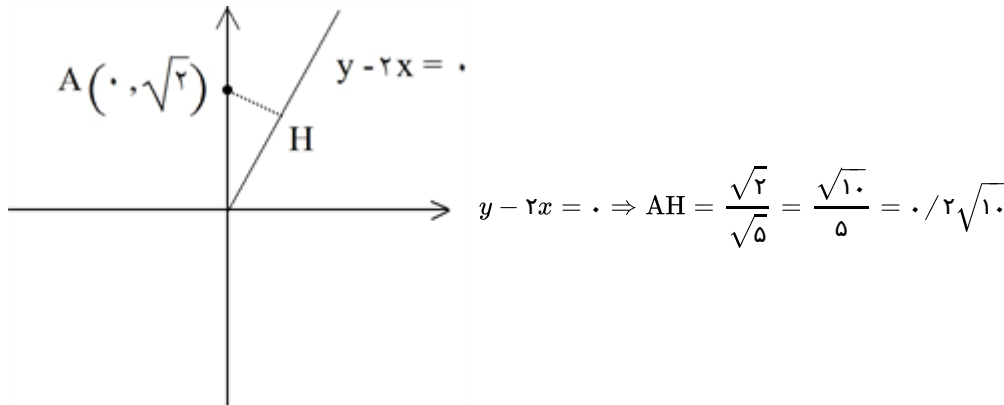
$$y = -ax + 2$$

$$f(4) = -4a + 2 \rightarrow -4a + 2 = -1 \Rightarrow a = \frac{3}{4} = 0.75 \Rightarrow f'(4) = -a = -0.75$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۶

$$\left. \begin{aligned} x \rightarrow (-1)^+ : \frac{1-k[(-1)^+]}{1} = -\infty \rightarrow \frac{1+k}{1} = -\infty \rightarrow 1+k < 0 \Rightarrow k < -1 \\ x \rightarrow (-1)^- : \frac{1-k[(-1)^-]}{1} = -\infty \rightarrow \frac{1+k}{1} = -\infty \rightarrow 1+k < 0 \Rightarrow k < -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{نقطه در ناحیه سوم قرار دارد.}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۷



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۸

$$\left. \begin{aligned} f(2) = 0 \Rightarrow 1 + 2a - b = 0 \Rightarrow 2a - b = -1 \\ f'(x) = 2x^2 + a \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow a = -12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = -16 \Rightarrow b - a = -4$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۹

$$\bar{A} = \frac{(1 - \frac{a}{2}) - (1 - a)}{2} = \frac{1}{2}a$$

$$f'(x) = \frac{a}{x^2} \Rightarrow \frac{a}{x^2} = \frac{a}{2} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۰

$$x \rightarrow (-2\pi)^+ : \frac{2-2k}{1} = +\infty \Rightarrow k < 2$$

$$x \rightarrow (-2\pi)^- : \frac{2-2k}{1} = +\infty \Rightarrow \frac{2}{2} < k$$

$$\Rightarrow \frac{2}{2} < k < 2 \Rightarrow -2 < -k < -\frac{2}{2} \Rightarrow [-k] = -2$$

۲۱

$$f(\cdot) = f(a) = \cdot$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در ابتدا و انتهای بازه مقدار تابع صفر می‌شود.

پس در نقطه بحرانی درون بازه ماکزیمم می‌شود بنابراین:

$$f(x) = \pm \sqrt[r]{x^r(x-a)} \Rightarrow f'(x) = \pm \frac{r}{r} x^{-\frac{1}{r}}(x-a) + \sqrt[r]{x^r}(1)$$

$$= \pm \frac{rx - ra + rx}{r\sqrt[r]{x}} = \pm \frac{5x - 2a}{r\sqrt[r]{x}} = 0 \Rightarrow 5x = 2a \Rightarrow x = \frac{2a}{5}$$

$$f\left(\frac{2a}{5}\right) = 1/5$$

$$\text{استفاده از گزینه‌ها: } a = \frac{5}{2} \Rightarrow f\left(\frac{2}{5} \times \frac{5}{2}\right) = 1/5 \Rightarrow f(1) = 1/5 \checkmark$$

پس $a = \frac{5}{2} = 2.5$ می‌باشد.

۲۲

$$rab + c = ra^r \quad \text{شرط پیوستگی}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \begin{cases} rb & x > a \\ rx & x < a \end{cases}$$

$$f'_+(a) = f'_-(a) \Rightarrow rb = ra \Rightarrow b = a \Rightarrow ra(ra) + c = ra^r \Rightarrow c = -ra^r$$

$$a^r + b - c = a^r + ra + ra^r = a^r + ra^r + ra = (a^r + ra^r + ra + 1) - 1 = (a+1)^r - 1$$

$$(\cdot, 1), (2, 5) \in d$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f'(2) = m_d = \frac{5-1}{2-0} = \frac{4}{2}$$

۲۴

$$f'(1) - rg'(1) = (f - rg)'(1)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} f(x) - rg(x) &= \frac{|2x-2|}{\sqrt[r]{x^r}} - \frac{r|x-2| + r\sqrt[r]{rx}}{\sqrt[r]{x^r}} = \frac{|2x-2| - |2x-2| - r\sqrt[r]{rx}}{\sqrt[r]{x^r}} \\ &= \frac{-r\sqrt[r]{rx}}{\sqrt[r]{x^r}} = \frac{-r\sqrt[r]{rx}^{\frac{1}{r}}}{x^{\frac{r}{r}}} = -r\sqrt[r]{rx}^{-\frac{1}{r}} \Rightarrow (f - rg)'(x) = -r\sqrt[r]{r} \left(-\frac{1}{r}\right) x^{-\frac{1}{r}-1} \\ &\Rightarrow (f - rg)'(1) = +\frac{\sqrt[r]{r}}{r} \end{aligned}$$

۲۵

$$x \rightarrow \pi^- \Rightarrow [x - \pi] = \left[\cdot^- \right] = -1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cot x}{[x - \pi]} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos x}{(-1) \sin x} = \frac{-1}{(-1)(\cdot^+)} = +\infty$$

۲۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

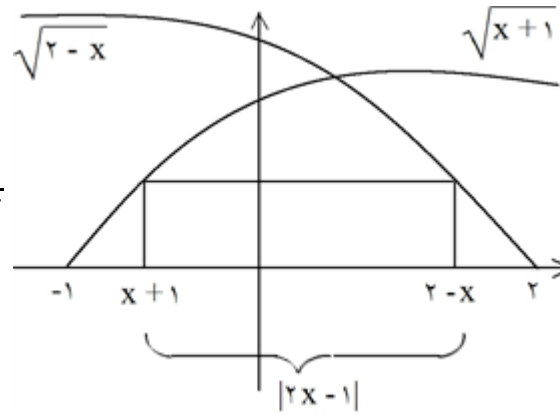
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -r \Rightarrow \frac{a^r x^r}{(x)(mx)} = -r \Rightarrow \frac{a^r}{m} = -r \Rightarrow a^r = -rm \Rightarrow m = -\frac{a^r}{r}$$

$$f(x) = \frac{a^r x^r - rx + 1}{(x+a)(mx-r)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -a} f(x) = -\infty \Rightarrow \text{ریشه مضاعف مخرج است } x = -a$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -a \\ \text{یا} \\ x = \frac{r}{m} \end{cases} \xrightarrow{\text{ریشه‌ها برابر تا مضاعف شود}} \frac{r}{m} = -a \Rightarrow m = -\frac{r}{a} \Rightarrow -\frac{a^r}{r} = -\frac{r}{a} \Rightarrow a^r = r \Rightarrow a = r$$





$$S = (2x - 1)\sqrt{x + 1}$$

$$S' = 2\sqrt{x + 1} + \frac{2x - 1}{\sqrt{x + 1}} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$a = \frac{6 - (-12)}{2/5 - (-1/5)} = \frac{18}{3/5} = 6 \Rightarrow y = 6x - 9$$

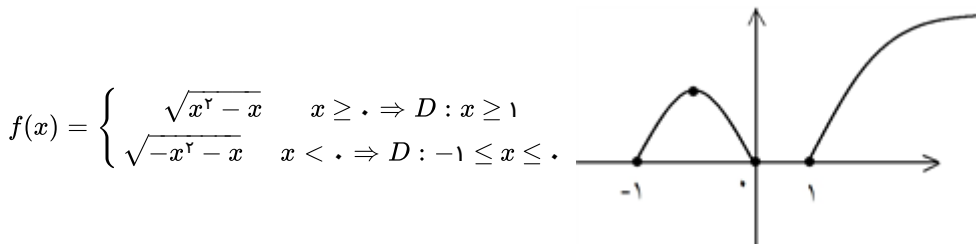
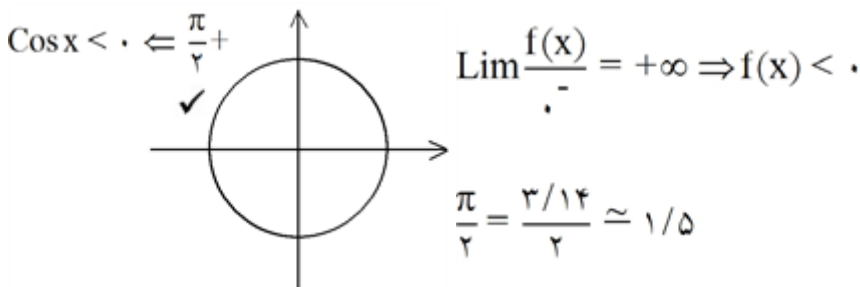
$$6 = 6(2/5) + b \Rightarrow b = -9$$

خط بر منحنی مماس است $\Leftrightarrow$ معادله تقاطع ریشه مضاعف دارد $\Delta = 0$

$$\frac{a}{2x - 1} = 6x - 9 \Rightarrow 12x^2 - 22x + 9 - a = 0 \xrightarrow[b' = -12]{\Delta' = 0} 12^2 - (12)(9 - a) = 0$$

$$\Rightarrow 12(12 - 9 + a) = 0 \Rightarrow 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3$$

$$f(5) = \frac{-3}{2(5) - 1} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$



$$m = 1 \quad n = 0 \quad k = 2$$

$$\frac{km + n}{k - n} = \frac{2}{2} = 1$$

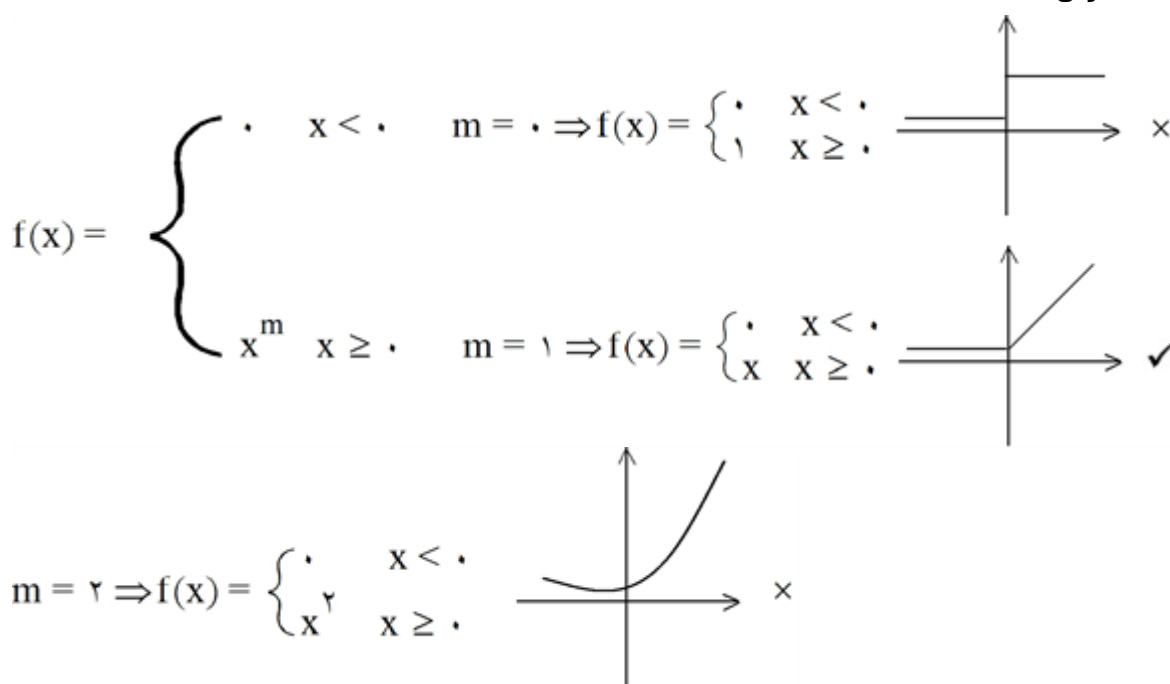
۳۱

$$a = .$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از آنجا که a گوشه‌ای است پس می‌تواند هر مقداری باشد، فرض:

$$b = .$$

b یک عدد ثابت است. فرض



۳۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$rg - f = \frac{\cancel{r}}{r + \sin x} - \frac{(\cancel{r} - \sin x)(\cancel{r} + r \sin x + \sin^2 x)}{(\cancel{r} - \sin x)(r + \sin x)} = \frac{-\sin x (\cancel{r} + \sin x)}{(\cancel{r} + \sin x)} = -\sin x$$

$$(rg - f)' \left(\frac{5\pi}{3} \right) = -\cos \left(\frac{5\pi}{3} \right) = -\left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

۳۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

(۱) مخرج خط باشد: $a = 0 \Leftarrow$ یک جواب

(۲) مخرج ریشه مضاعف داشته باشد $\Delta = 0 \Leftarrow$

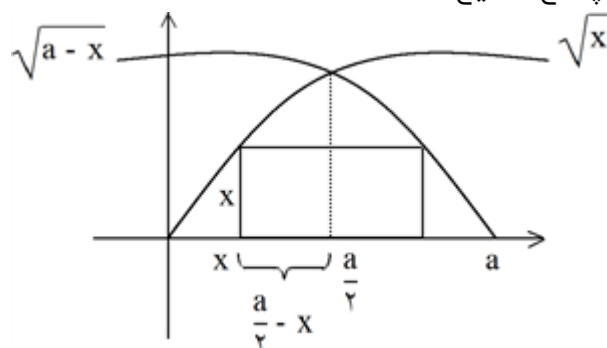
$$\Delta = (a - 2)^2 - 16a = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 4 - 16a = 0 \Rightarrow a^2 - 20a + 4 = 0 \Rightarrow \Delta > 0 \text{ ریشه}$$

$$2x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} a = \frac{r}{2} \\ a = -2 \end{matrix} \Rightarrow \text{جواب ۲}$$

(۳) یکی از ریشه‌های صورت ریشه مخرج هم باشد:

۳۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$S = \left(\frac{a}{r} - x \right) \sqrt{x}$$

$$S' = \frac{a}{r} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{r}{r} x^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{a}{r} - rx}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$x = \frac{a}{r} \Rightarrow s \left(\frac{a}{r} \right) = \left(\frac{a}{r} - \frac{a}{r} \right) \sqrt{\frac{a}{r}} = \frac{\sqrt{r}}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{r} \sqrt{\frac{a}{r}} = \frac{\sqrt{r}}{r} \Rightarrow a = r$$

$$f(x) = \sqrt{ax-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax-1}}$$

$$m = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2\sqrt{ax-1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3a = 2\sqrt{ax-1} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow 3y = x + 2 \Rightarrow x + 2 = 2\sqrt{ax-1} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow x + 2 = 2\left(\frac{3a}{2}\right) = 3a \Rightarrow x = 3a - 2$$

$$2 \Rightarrow 3a - 2 + 2 = 2\sqrt{a(3a-2)} - 1 \Rightarrow 9a^2 - 12a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -\frac{2}{9} \end{cases}$$

$$f(5) = \sqrt{2 \times 5 - 1} = \sqrt{9} = 3$$

راه دوم:

$$B(-1, 1) \Rightarrow \text{معادله خط مماس: } y = \frac{x+2}{3}$$

پس اگر خط مماس را با تابع قطع دهیم باید ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\frac{x+2}{3} = \sqrt{ax-1} \Rightarrow x+2 = 3\sqrt{ax-1} \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 9ax - 9$$

$$x^2 + (4-9a)x + 13 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} \begin{cases} 16 - 36a = 0 \Rightarrow a = \frac{4}{9} \\ 16 - 36a = -16 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{2x-1} \Rightarrow f(5) = \sqrt{9} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x)}{\sin x} = \frac{f(x)}{0^+} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \text{عدد منفی}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} 2 \left[\frac{x}{\pi} \right] + 1 = 1 \quad \text{گزینه ۲}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} 2 \left[\frac{x}{\pi} \right] - 3 = 2 - 3 = -1 \quad \text{گزینه ۲ ✓}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۶

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \left[\frac{2x}{\pi} \right] - 1 = 0 \quad \text{گزینه ۱}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} 2 \left[\frac{x}{\pi} \right] + 3 = 3 \quad \text{گزینه ۲}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۷

$$x(|x|-1) \leq 0 \Rightarrow x \leq -1, 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-x^2} & 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x+x^2} & x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} & 0 < x < 1 \\ \frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}} & x < -1 \end{cases}$$

$$\text{نقاط بحرانی} \begin{cases} x = 0, x = 1, x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

این تابع ۴ نقطه بحرانی دارد که فقط $x = \frac{1}{2}$ ماکزیمم نسبی است. پس:

$$\begin{cases} m = 1 \\ n = 0 \\ k = 2 \end{cases} \Rightarrow m+n+k = 3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون تابع در $x \geq a, x < a$ مشتق پذیر است، پس نقطه گوشه $x = a$ است. ۳۸

$$x = a \Rightarrow f(x) \text{ پیوسته} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ m(x-a)^{m-1} & x > a \end{cases}$$

$$f'_-(a) = 0 \Rightarrow f'_+(a) \neq 0 \Rightarrow m(a-a)^{m-1} \neq 0 \Rightarrow m = 1$$

۳۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f'\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 2g'\left(\frac{7\pi}{6}\right) = (f - 2g)'\left(\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{(\cancel{\cos x + 2})(\cos^2 x - 2\cos x + 2)}{(2 - \cos x)(\cancel{2 + \cos x})} - \frac{2}{2 - \cos x} \right)' = \left(\frac{\cos x (\cancel{\cos x - 2})}{-(\cancel{\cos x - 2})} \right)'$$

$$= -(\cos x)' = \sin x = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

۴۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{(x-3)(3x+1)}{ax^2 + (1-a)x + a + 1}$$

اگر $x = 3$ یا $x = -\frac{1}{3}$ ، یکی از ریشه‌های مخرج با ریشه صورت ساده شده و مخرج یک ریشه خواهد داشت = یک مجانب قائم

$$x = 3 \Rightarrow 9a + 3 - 3a + a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{5}$$

$$x = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a}{9} + \frac{a}{3} - \frac{1}{3} + a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{6}{13}$$

اگر $\Delta_{\text{مخرج}} = 0$ شود نیز، مخرج یک ریشه دارد.

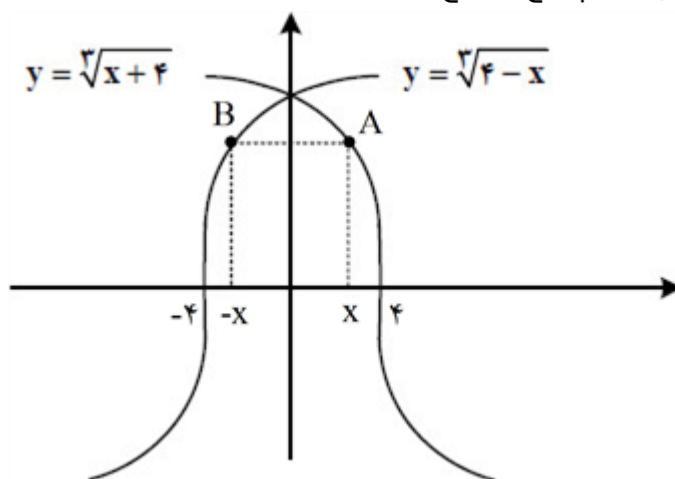
$$(a-1)^2 = 3a(a+1) \Rightarrow 3a^2 + 6a - 1 = 0 \Rightarrow \text{مقدار ۲}$$

$$a = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{\dots}{x+1}$$

پس به ازای ۵ مقدار، این تابع فقط یک مجانب قائم دارد.

۴۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$S = 2x\sqrt[3]{4-x} = 2\sqrt[3]{4x^3 - x^4} \Rightarrow S' = 2 \left(\frac{12x^2 - 4x^3}{3\sqrt[3]{(4x^3 - x^4)^2}} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$S_{\text{Max}} = S(3) = 2(3)\sqrt[3]{4-3} = 6$$

$$f(x) = x^3 - 12x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

x	-2	2
f'	+	-
	↗	↘
	max	min
	نسبی	نسبی

$$f(2) = 8 - 24 + 2 = -14$$

۴۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{f(-1) - f(\cdot)}{-1} = \frac{\Lambda(-a+1) - 1}{-1} = -11 \Rightarrow -\Lambda a + 1 = 11 \Rightarrow -\Lambda a = 10 \Rightarrow a = -\frac{1}{\Lambda}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \Lambda(x^\Lambda + 1)^\Lambda (\Lambda x + 1) + a(x^\Lambda + 1)^{\Lambda-1} \xrightarrow{x=1} f'(1) = \Lambda$$

۴۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\forall y - x = 5 \Rightarrow y = \frac{1}{V}(x + 5)$$

$$\frac{ax - 1}{\Lambda x + 1} = \frac{1}{V}(x + 5) \Rightarrow (\Lambda x + 1)(x + 5) = V(ax - 1) \Rightarrow \Lambda x^2 + 16x + 5 = Vax - V$$

$$\Rightarrow \Lambda x^2 + x(16 - Va) + 12 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} \Delta = (16 - Va)^2 - (12)^2 = 0 \Rightarrow (16 - Va) = \pm 12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16 - Va = 12 \Rightarrow a = \frac{4}{V} \Rightarrow \text{نقطه تماس: } A\left(-2, \frac{4}{V}\right) \in \text{ناحیه دوم} \\ 16 - Va = -12 \Rightarrow a = \frac{28}{V} \Rightarrow A(2, 1) \in \text{ناحیه اول} \end{cases}$$

۴۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{\Lambda}} \frac{a + \Lambda[-x]}{1 - \Lambda x} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\Lambda}} \frac{a - \Lambda}{1 - \Lambda x} = -\infty \Rightarrow a - \Lambda > 0 \Rightarrow a > \Lambda \Rightarrow 0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{\Lambda} \Rightarrow -1 < \frac{1}{a} - 1 < -\frac{2}{\Lambda}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\Lambda} < \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{1}{a} - 1 \right) < -\frac{1}{\Lambda}$$

$$\frac{x}{a} - x = \left(\frac{1}{a} - 1 \right) x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\Lambda}} \left[\frac{x}{a} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\Lambda}} (-1) = -1$$

$$\text{فرض } a = \Lambda \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\Lambda}} \left[\frac{x}{a} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\Lambda}} \left[\frac{x}{\Lambda} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\Lambda}} \left[-\frac{\Lambda x}{\Lambda} \right] = \left[-\frac{\Lambda}{\Lambda} \right] = -1$$

۴۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = (x - 1)|x| = \begin{cases} x(x - 1) & x \geq 0 \\ x(1 - x) & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x > 0 \\ 1 - 2x & x < 0 \end{cases}$$

$$a + b = \frac{1}{\Lambda} \leftarrow a = 0, b = \frac{1}{\Lambda}$$

تابع f در بازه $\left(0, \frac{1}{\Lambda}\right)$ اکیداً نزولی است. بنابراین:

۴۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقطه $(-1, -2)$ نقطه عطف نمودار تابع است.

$$\left. \begin{aligned} &\Rightarrow -\frac{a}{\Lambda} = -1 \Rightarrow a = \Lambda \\ &\xrightarrow{x=-1, y=-2} -2 = (-1)^\Lambda + \Lambda(-1)^\Lambda + b(-1) - 1 \Rightarrow b = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a}{b} = 0.2$$

۴۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع باید در $x = a$ نیز مشتق پذیر باشد. پس در این نقطه در ابتدا باید پیوسته باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = ab + c, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \frac{1}{a} = f(a) \xrightarrow{\text{پیوستگی}} ab + c = \frac{1}{a} (*)$$

تابع مشتق را به دست می آوریم:

$$f'(x) = \begin{cases} b & ; x < a \\ -\frac{1}{x^\Lambda} & ; x > a \end{cases} \Rightarrow f'_-(a) = b, f'_+(a) = -\frac{1}{a^\Lambda}$$

مشتق های چپ و راست نیز باید با هم برابر باشند:

$$b = -\frac{1}{a^\Lambda} (*) \Rightarrow a \left(-\frac{1}{a^\Lambda} \right) + c = \frac{1}{a} \Rightarrow c = \frac{\Lambda}{a} \Rightarrow ac = \Lambda$$



۴۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در ابتدا، بازه $(1, +\infty)$ باید زیرمجموعه دامنه تابع باشد، یعنی مجانب قائم نمودار در این

$$\Rightarrow 1 - m \leq 1 \Rightarrow m \geq 0 \quad (1)$$

بازه نباشد:

از طرفی تابع باید نزولی باشد:

$$\Rightarrow y' = \frac{m(m-1) - 2}{(x+m-1)^2} < 0 \Rightarrow m^2 - m - 2 = (m-2)(m+1) < 0 \Rightarrow -1 < m < 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} 0 \leq m < 2 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 0, m = 1$$

۵۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{1} = \frac{1}{1} f(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2} = 0 \xrightarrow{x=1} f'(1) \cdot g(1) - g'(1) f(1) = 0$$

۵۱

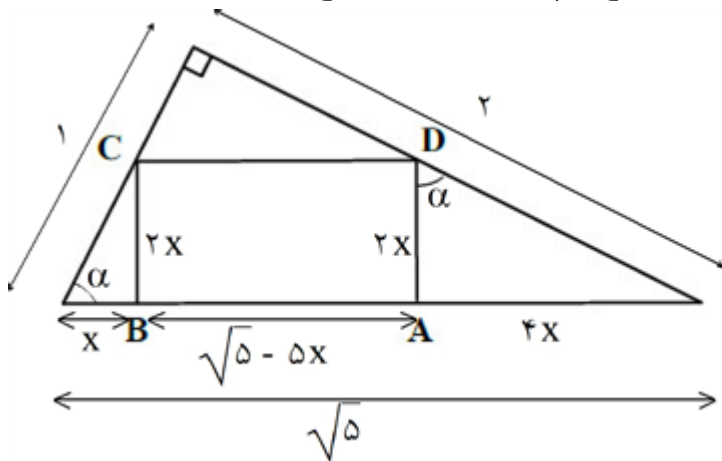
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{2}{(x+3)(x-1)} - \frac{1}{x-1} = \frac{1-x}{(x+3)(x-1)} = \frac{-1}{x+3}$$

خطوط مجانب این نمودار $x = -3$ و $y = 0$ هستند که نقطه تلاقی آنها $(-3, 0)$ است.

۵۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون بحث نسبت‌هاست پس مثلاً ضلع کوچک را عدد یک و ضلع بزرگتر را ۲ می‌گیریم.



$$S = 2x(\sqrt{5} - 5x) = -1 \cdot x^2 + 2\sqrt{5}x$$

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-2\sqrt{5}}{-2} = \sqrt{5}$$

$$\frac{\text{طول}}{\text{عرض}} = \frac{\sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{2} = 2/5$$

۵۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$g'(\sqrt[5]{3}) \cdot f'(g(\sqrt[5]{3})) = (f \circ g)'(\sqrt[5]{3})$$

$$x = \sqrt[5]{3} > 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{2x}}, g(x) = \frac{1}{2x^5}$$

$$(f \circ g)(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{2\left(\frac{1}{2x^5}\right)}} = -x \Rightarrow (f \circ g)'(x) = -1$$

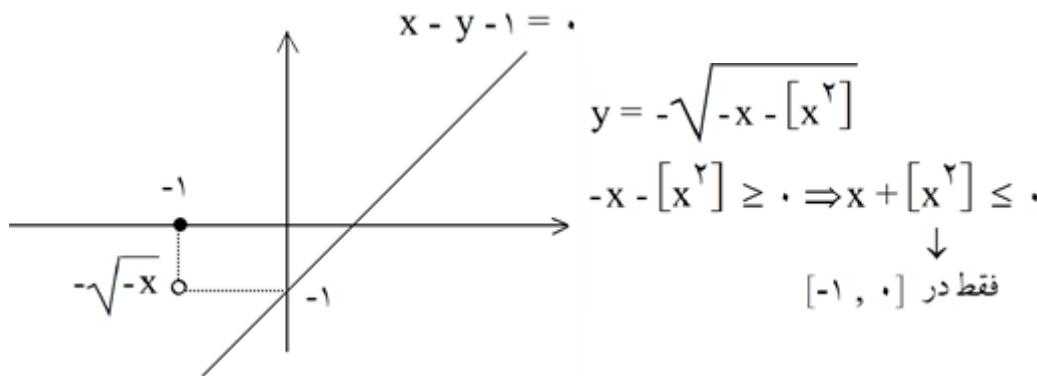
۵۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{|f(x)|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\text{شیب خط } g}{|\text{شیب خط } f|} = \frac{2}{-\frac{2}{3}} = -3$$

$$\frac{1}{\sqrt{\log_x^x + r \log_{x^r}^r}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r} \log_x^x + \frac{r}{r} \log_x^r}} \xrightarrow{\log_x^x = t} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r} \left(t + \frac{r}{t}\right)}}$$

$$t \cdot \frac{r}{t} = r \Rightarrow \min \left(t + \frac{r}{t}\right) = r + r = r \Rightarrow \max A = \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{r}}} = \frac{\sqrt{r}}{r}$$



نقطه A را روی $-\sqrt{-x}$ در نظر بگیرید پس داریم:

فاصله نقطه A از خط برابر است با:

$$\frac{|a + \sqrt{-a} - 1|}{\sqrt{2}}$$

مشتق

$$1 - \frac{1}{2\sqrt{-a}} = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{\left|-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1\right|}{\sqrt{2}} = \frac{r}{2\sqrt{r}} = \frac{r\sqrt{r}}{2}$$

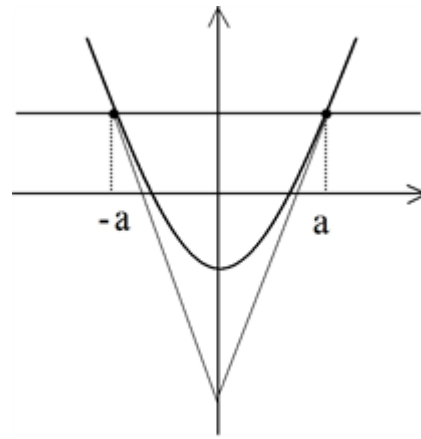
$$y = \frac{k}{r}x^r - (k+r)x^r \Rightarrow x_{\text{عطف}} = \frac{k+r}{r\left(\frac{k}{r}\right)} = \frac{r(k+r)}{rk} < 0 \Rightarrow -r < k < 0$$

تنها مقدار صحیح $k = -1$ است پس:

$$\left. \begin{aligned} y &= -\frac{1}{r}x^r - x^r \\ x_{\text{عطف}} &= -\frac{r}{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y_{\text{عطف}} = -\frac{1}{r} \times \frac{-1}{r^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{-1}{r^2} < 0$$

پس به ازای $k = -1$ نقطه‌ی عطف در ناحیه سوم است.





$$y = x^r - 1$$

$$y' = rx \begin{cases} ra \\ -ra \end{cases}$$

$$ra \times (-ra) = -1$$

$$a = \pm \frac{1}{r} \rightarrow y = \left(\pm \frac{1}{r}\right)^r - 1 = -\frac{r}{r}$$

$$ra^r = 1 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{r} \rightarrow y = \left(-\frac{1}{r}\right)^r - 1 = -\frac{r}{r}$$

$$\text{مجموع} = -\frac{r}{r}$$

$$f(x) = \frac{\Delta \cos x}{1 - \sin x} \xrightarrow{f'(x)} f'(x) = \frac{-\Delta \sin x(1 - \sin x) + \cos x(\Delta \cos x)}{(1 - \sin x)^2}$$

$$f(x) = xg(x) - rx + \Delta \Rightarrow \frac{f(x) + rx - \Delta}{x} = g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} g(x) = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{f(x) + rx - f(\cdot)}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} + r = f'(\cdot) + r = \Delta + r = v$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)}$$

اگر $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ باشد پس $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

$$\frac{\frac{a}{c}}{-\frac{d}{c}} = \frac{-\frac{d}{c}}{\frac{a}{c}} \Rightarrow a^r = d^r \Rightarrow a = \pm d$$

$$\text{پس گزینه ۳ جواب می‌تواند باشد} \begin{cases} \xrightarrow{a=d} \frac{ax+b}{cx+a} \Rightarrow \left(-\frac{a}{c}, \frac{a}{c}\right) \Rightarrow y = -x \text{ روی خط} \\ \xrightarrow{a=-d} f = f^{-1} \Rightarrow y = x \text{ روی خط است} \end{cases}$$

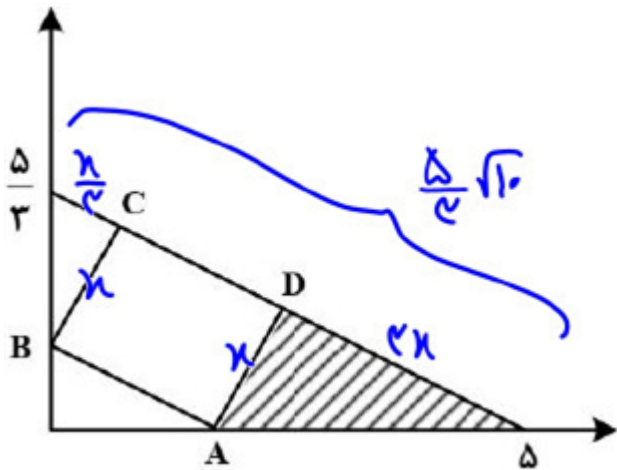
* متوجه نشدیم طراح، گزینه ۱ را از کجا آورده! شما می‌توانید حدس بزنید؟

$$\frac{\log x}{\log a} + \frac{r \log r}{\log x^r} = \frac{\overset{a}{\log x}}{\overset{r}{\log a}} + \frac{\overset{b}{r \log r}}{\overset{r}{\log x}}$$

$$ab = \frac{r}{r} \xrightarrow{a, b > \cdot} a = b = \sqrt{\frac{r}{r}} = \frac{\sqrt{r}}{r} \Rightarrow \min\{a+b\} = \frac{\sqrt{r}}{r} + \frac{\sqrt{r}}{r} = \sqrt{r}$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۶۲



$$S = x \left(\frac{5}{2} \sqrt{10} - \frac{x}{2} - 2x \right) = \frac{1}{2} x (5\sqrt{10} - 4x) = \frac{1}{2} x \left(\frac{\sqrt{10}}{2} - x \right)$$

حداکثر S در $x = \frac{\sqrt{10}}{4}$ رخ می‌دهد. پس مساحت هاشورخورده برابر است با:

$$\frac{1}{2} x \times 2x = \frac{2}{2} x^2 = \frac{2}{2} \times \frac{10}{16} = \frac{10}{16}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۶۳

$$g'(-\sqrt[3]{2}) f'(g(-\sqrt[3]{2})) \Rightarrow (f \circ g)'(-\sqrt[3]{2})$$

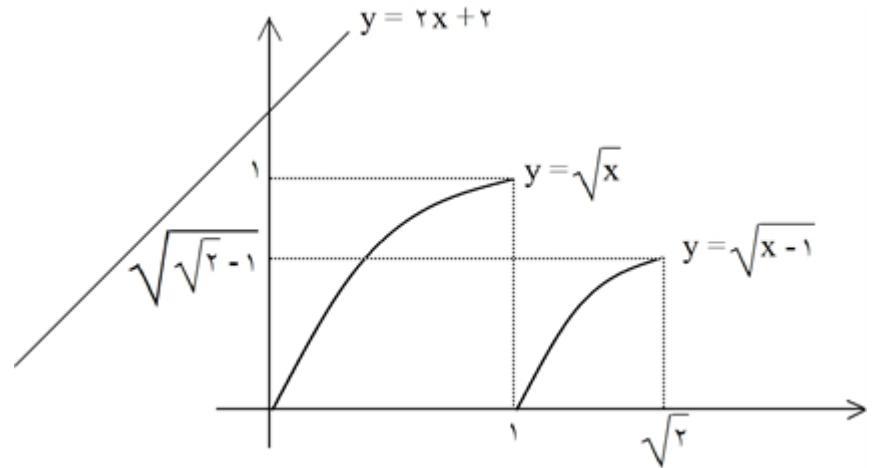
$$D_g = (-\infty, \infty) : g(x) = \frac{1}{2x^2} \xrightarrow{g^{-1}} f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^2}}} = \sqrt[3]{x} = x$$

$$\Rightarrow (f \circ g)'(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|-2x|}{\frac{2}{3}x} = \frac{-2x}{\frac{2}{3}x} = -3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۶۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $y = \sqrt{x - [x^2]}$ و خط $y = 2x + 2$ را در شکل زیر می‌بینیم:



کمترین فاصله نقاط تابع از خط موردنظر، کمترین فاصله نقاط روی نمودار $y = \sqrt{x}$ از خط $2x - y + 2 = 0$ است. نقط

$$d = \frac{|2\alpha - \sqrt{\alpha} + 2|}{\sqrt{5}}$$

$(\alpha, \sqrt{\alpha})$ را در نظر می‌گیریم؛ فاصله برابر است با:

در نقطه بحرانی $d(\alpha)$ ، کمترین مقدار رخ می‌دهد:

$$d'(\alpha) = 0 \Rightarrow 2 - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} = 0 \Rightarrow \sqrt{\alpha} = \frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow d_{\min} = \frac{\left|\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 2\right|}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{15}{8}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{8}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقطه عطف نمودار تابع $y = ax^3 + bx^2$ نقطه $I\left(-\frac{b}{3a}, \frac{2}{27}, \left(\frac{b^3}{a^3}\right)\right)$ است، برای اینکه این

نقطه در ربع دوم قرار گیرد، باید داشته باشیم:

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{b}{a} < 0 \\ \frac{b^3}{a^3} > 0 \\ k > 0 \\ k+1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a, b > 0$$

$$\Rightarrow k > -1$$

حال در این سؤال داریم:

که این بازه شامل هیچ عدد صحیح و منفی نمی‌باشد.

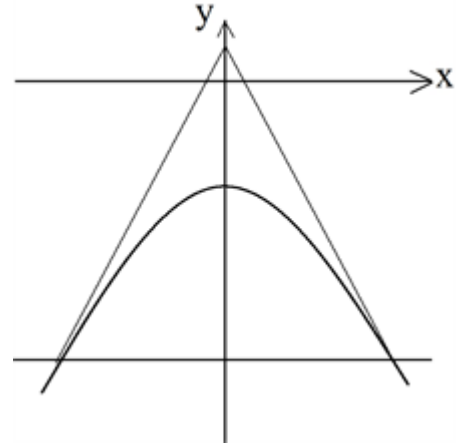
۶۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. خط d سهمی $y = -x^2 - 1$ را در دو نقطه قطع کرده است.

برای اینکه دو خط مماس بر هم عمود باشند، لازم است که شیب‌های آن‌ها $+1$ و -1 باشند، زیرا نسبت به خط $x = 0$ متقارن هستند، پس مشتق تابع را برابر ± 1 قرار می‌دهیم تا طول نقطه برخورد حاصل شود:

$$y' = -2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \xrightarrow{y = -x^2 - 1} y = -\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$$

این همان عرض خط d است و فاصله آن از مبدأ مختصات برابر $1/25$ است.



۶۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = \frac{f(x) - 1}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = f'(0)$$

$$f'(x) = 2 \left(\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right) \left(\frac{\cos x (\sin x + 1 - \sin x + 1)}{(\sin x + 1)^2} \right) \Rightarrow f'(0) = 2(-1)(2) = -4$$

۶۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}$$

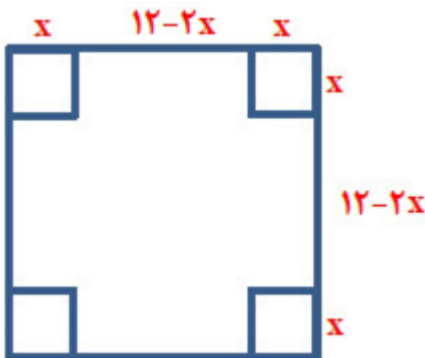
$$g(x) = \frac{cx + d}{ax + b} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{-bx + d}{ax - c}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g^{-1}(x)} &= \frac{\frac{a}{c}}{-\frac{b}{a}} = -\frac{a^2}{bc} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{g(x)} &= \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} - \frac{b}{c} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{a^2}{bc} = -\frac{b}{c} \xrightarrow{c \neq 0} \frac{a^2}{b} = b \Rightarrow a^2 = b^2$$

$$\Rightarrow a = \pm b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f^{-1}(x) = -\frac{b}{a} = \pm 1$$

۷۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$V(x) = x(12 - 2x)^2$$

$$\Rightarrow V'(x) = (12 - 2x)^2 - 2 \times 2x(12 - 2x) = 0$$

$$\Rightarrow (12 - 2x)(12 - 2x - 4x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 2 \end{cases}$$

$x = 6$ حجم را صفر (می‌نیم) می‌کند پس $x = 2$.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۷۱

$$f'(x) = \frac{1 \times \sqrt{2x+1} - \frac{2}{\sqrt{2x+1}} \times x}{2x+1} \Rightarrow f'(2) = \frac{2 - \frac{2}{2}}{9} \Rightarrow f'(2) = \frac{5}{27}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۷۲

$$y = vx - 2 \Rightarrow m = v \xrightarrow{m \times m' = -1} m' = -\frac{1}{v}; y' = \frac{-5(1+2x) - 2(1-5x)}{(1+2x)^2} = \frac{-v}{(1+2x)^2}$$

$$y'(x_0) = -\frac{1}{v} \Rightarrow \frac{-v}{(1+2x)^2} = -\frac{1}{v} \Rightarrow (1+2x)^2 = 49$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+1 = v \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2, -2) \\ 2x+1 = -v \Rightarrow x = -2 \Rightarrow B(-2, -2) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (-2 - (-2))^2} = \sqrt{16} \Rightarrow AB = 4\sqrt{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۷۳

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{1+x} &= 2, \lim_{x \rightarrow 2^-} 2a+2b \Rightarrow 2a+2b=2 \\ f'_+(2) &= \frac{2}{\sqrt{2(2)+1}} = \frac{2}{3}, f'_-(2) = 2a+b \Rightarrow 2a+b = \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} b = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۷۴

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax+|x|}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax-x}{x} = a-1=1 \Rightarrow a=2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + \sqrt{x^2+12}}{x+2} \times \frac{2x - \sqrt{x^2+12}}{2x - \sqrt{x^2+12}} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x^2-4)}{x^2 - x^2 - 12} \times \frac{1}{-4-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x+2)(x-2)}{x+2} \times \frac{1}{-18} = \frac{2}{-18}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷۵

$$f(x) = \frac{(1-\alpha)x-2}{(1-\alpha)x-\alpha} \Rightarrow ad-bc = * \Rightarrow (1-\alpha)(-\alpha) + 2(1-\alpha) = *$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha = 2 \Rightarrow f(x) &= 1 \xrightarrow{y+2=0 \Rightarrow y=-2} 1 - (-2) = 3 \\ \alpha = 1 \Rightarrow f(x) &= 2 \xrightarrow{y+1=0 \Rightarrow y=-1} 2 - (-1) = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مجموع} = 6$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۷۶

$$x < * \Rightarrow y = ax^2 - bx \Rightarrow y' = 2ax - b \xrightarrow{y'(-1)=*} -2a - b = * \otimes$$

$$A(-1, 2) \in y \Rightarrow 2 = a + b \xrightarrow{\otimes} a = -2, b = 2 \Rightarrow ab = -4$$

$$y = \frac{\pi}{\sqrt{2}} (\cos \sqrt{2}x - \sin \sqrt{2}x) \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cos \sqrt{2}x; \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\cos \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) - \cos \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) \right)}{\frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{\sqrt{2}}} = \frac{-\frac{\pi}{\sqrt{2}}}{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}$$

$$f'(x) = -\pi \sin \sqrt{2}x \Rightarrow f' \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda} \right) = -\pi \sin \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{\lambda} \right) = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \pi; \frac{\text{آهنگ متوسط}}{\text{آهنگ لحظه ای}} = \frac{-\sqrt{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \pi} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}$$

$$h'(x) = f' \left(x - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) + \sqrt{2} f' \left(\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow h' \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) = f' \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) + \sqrt{2} f' \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\Rightarrow h' \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} f' \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \times \frac{-1}{\sqrt{2}} = -1$$

$$f' \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) = f' \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\lambda} \right) = f' \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right) \otimes$$

$$g(x) = f(x) \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} - 2 = -\sqrt[3]{x} \Rightarrow \sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x} - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ناحیه چهارم} \\ \sqrt[3]{x} = -2 \Rightarrow x = -8 \text{ ناحیه دوم} \end{cases}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow m = g'(-8) = \frac{1}{\sqrt[3]{-8}} = -\frac{1}{2}, y - 2 = -\frac{1}{2}(x + 8) \xrightarrow{x=0}$$

$$y = -\frac{1}{2} \Rightarrow |y| = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + |a|x}{\sqrt[3]{x} - 1 + b} = \frac{1 + |a|}{\sqrt[3]{x}}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + |a|x}{-\sqrt[3]{x} + 1 + b} = \frac{1 - |a|}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow \frac{1 + |a|}{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{x} \times \frac{1 - |a|}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow |a| = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$|\sqrt[3]{x} - 1| = -b \xrightarrow{b < 0} \begin{cases} \sqrt[3]{x} - 1 = -b \Rightarrow x = \frac{1-b}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow \frac{1-b}{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{x} \times \frac{1+b}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow b = \frac{-1}{\sqrt[3]{x}} \\ \sqrt[3]{x} - 1 = +b \Rightarrow x = \frac{1+b}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow \frac{1+b}{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{x} \times \frac{1+b}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = -|a|$$

$$f(-1) = 5, f'(-1) = -\frac{1}{\sqrt[3]{-1}}$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x} f(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} f(x) + \sqrt[3]{x} f'(x) \Rightarrow g'(-1) = \frac{1}{\sqrt[3]{-1}} f(-1) - f'(-1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{-1}} (5) - \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{-1}} \right) = \frac{5}{\sqrt[3]{-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{-1}} = \frac{6}{\sqrt[3]{-1}}$$

$$D_f = \left[\cdot, \frac{a}{\sqrt[3]{x}} \right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{-2}{\sqrt[3]{x} \sqrt{a-2x}} = 0 \Rightarrow \sqrt{a-2x} = 2\sqrt[3]{x} \Rightarrow a - 2x = 4x \Rightarrow x = \frac{a}{6}$$

$$f \left(\frac{a}{6} \right) = \sqrt{\frac{a}{6}} + \sqrt{\frac{2a}{6}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{6}} \sqrt{a} \rightarrow \max$$

$$\left. \begin{array}{l} f(\cdot) = \sqrt{a} \\ f \left(\frac{a}{6} \right) = \sqrt{\frac{a}{6}} \rightarrow \min \end{array} \right\} \max. \min = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{6}} a = \sqrt{12} \Rightarrow a = 4$$



$$a \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

$$g(x) = \sqrt{3} \cos x - \sin x \Rightarrow \text{نزولی است} \frac{\pi}{3} \text{ در همسایگی } x > \frac{\pi}{3} \Rightarrow g(x) < g\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

پس مخرج کسر منفی است.

$$\Rightarrow \sqrt{3} \frac{\pi}{3} + b > 0 \Rightarrow b > \frac{-\pi}{\sqrt{3}} = -1/\dots$$

$$b = -1 \text{ حداقل صحیح}$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{m-2}{m^2+1}$$

$$S'(m) = -\frac{m^2-4m-1}{(m^2+1)^2} \xrightarrow{S'(m)=0} m^2-4m-1=0 \Rightarrow m=2 \pm \sqrt{5}$$

جدول تغییرات رفتار تابع $S(m)$ را می‌نویسیم:

m	$2-\sqrt{5}$		$2+\sqrt{5}$	
S'	-	+	-	
S	↘		↗	
	نسبی		نسبی	
	min		max	

پس در $m = 2 + \sqrt{5}$ بیشترین مقدار است.

تذکر:

اصل سؤال به صورت $f(x) = (m^2-1)x^2 + (2-m)x + 5$ بوده که در آن حالت، سؤال غلط می‌شد. چون نه $\frac{m-2}{m^2-1}$ ماکزیمم داشت و نه حتی به ازای $m = 2 + \sqrt{3}$ که ماکزیمم نسبی ایجاد می‌شد، معادله درجه ۲، ریشه می‌داشت.

$$f(x) = 2\sqrt{ax} \left| x - \frac{3}{4} \right| \Rightarrow \begin{cases} f'_+\left(\frac{3}{4}\right) = 2\sqrt{a\left(\frac{3}{4}\right)} = 2\sqrt{3a} \\ f'_-\left(\frac{3}{4}\right) = -2\sqrt{a\left(\frac{3}{4}\right)} = -2\sqrt{3a} \end{cases}$$

$$f'_+\left(\frac{3}{4}\right) - f'_-\left(\frac{3}{4}\right) = 2\sqrt{3a} = 2\sqrt{6} \xrightarrow{\text{توان } 2} 16 \times 3a = 4 \times 6 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x^2} & ; x < 0 \\ \frac{x}{1-x^2} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & ; x < 0 \\ \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} & ; x \geq 0 \end{cases}$$

تابع در $x = 0$ مشتق دارد و برابر یک است. $(f'(0) = 1)$

$$f'(-1) = 0$$

و با توجه به دامنه هر ضابطه فقط در $x = -1$ مشتق برابر صفر دارد:

پس تابع فقط یک نقطه بحرانی دارد.

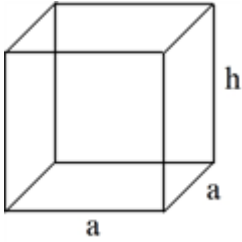
دقت کنید که $x = 1$ عضو دامنه تابع نیست و نباید لحاظ شود.



$$f^{-1}(x) = -\frac{\pi}{m}x + \pi \Rightarrow f(x) = -\frac{m}{\pi}x + m$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\pi}{m}x + \pi}{-\frac{m}{\pi}x + m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\pi}{m}}{-\frac{m}{\pi}} = \frac{\pi^2}{m^2} = \pi$$

$$\Rightarrow m^2 = \pi \xrightarrow{m < 0} m = -\sqrt{\pi}$$



$$V = a^2 h = 8 \Rightarrow h = \frac{8}{a^2}$$

$$S = a^2 + 4ah = a^2 + \frac{32}{a}$$

$$S' = 2a - \frac{32}{a^2} = 0 \Rightarrow 2a = \frac{32}{a^2} \Rightarrow a^3 = 16 \Rightarrow a = \sqrt[3]{16}$$

$$h = \frac{8}{a^2} = \frac{8}{(\sqrt[3]{16})^2} = \frac{8}{\sqrt[3]{64}} = \frac{8}{4} = 2$$

$$S = a^2 + 4ah = 4 + 4 \times \sqrt[3]{16} \times 2 = 12$$

$$y' = 3x^2 + 2ax - 2b \left\{ \begin{array}{l} y' = 3x^2 + 2ax \Rightarrow x = -2 \Rightarrow 12 - 2a = 0 \Rightarrow a = 6 \\ x = 0 \Rightarrow b = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow y = x^3 + 3x^2 - 8 \Rightarrow \left(\begin{array}{l} (0, -8) \\ (-2, 0) \end{array} \right) \left\{ \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = b + 2 \\ x = 1 \Rightarrow y = \frac{a+1}{a+1} = 1 \end{array} \right\} b + 2 = 1 \Rightarrow b = -1$$

$$y'(1) = 2 \Rightarrow \frac{1-a^2}{(a+1)^2} = 2 \Rightarrow \frac{1-a}{1+a} = 2 \Rightarrow a = \frac{-1}{2} \Rightarrow a - b = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2 + x + 1}}{x + 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$x \rightarrow -1^- \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -1^+ \Rightarrow \left[\frac{1}{x} \right] = -1$$

$$-f(-1) = -1 \times \sqrt{\frac{1}{4}(-1) - 1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقطه $A(0, 0)$ اکسترم نمودار تابع است $(f'(0) = 0)$ و $(f(0) = 0)$ پس تابع باید عامل x^2 را داشته باشد، در نتیجه $c = d = 0$ و $f(x) = ax^2 + bx^2$ است.

$$B \in f \Rightarrow f(1) = a + b = 1 \quad (I)$$

$$f'(x) = 2ax + 2bx \xrightarrow{f'(1)=0} 2a + 2b = 0 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I)} a = -2, b = 1 \Rightarrow ab = -2$$

$$a = \frac{-1 - 0}{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

$$y = \sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$$

$$b = \frac{1 - 0}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \frac{a}{b} = -1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از g مشتق می‌گیریم: ۹۴

$$g'(x) = (r \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^r x) - \sqrt{r} \sin x) f'(r \operatorname{tg}^r x + \sqrt{r} \cos x) \xrightarrow{x = \frac{\pi}{r}} \\ g'\left(\frac{\pi}{r}\right) = r f'(r) = \sqrt{r} \Rightarrow f'(r) = \frac{\sqrt{r}}{r}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شیب خط $y - rx = 1$ برابر $\frac{1}{r}$ است، پس در نقطه مطلوب، شیب خط مماس باید برابر $-r$ باشد. ۹۵

$$\Rightarrow y' = rx - r = -r \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = r \\ \text{نقطه مطلوب } (1, r) \text{ است.}$$

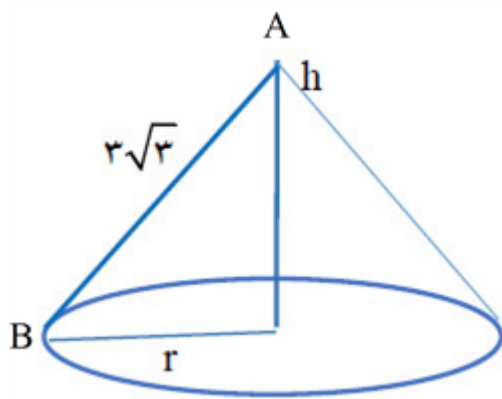
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $y = 3$ مجانب افقی و $x = -\frac{1}{r}$ مجانب قائم است. ۹۶

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{bx^r + v}{rx^r + ax + 1} = \frac{b}{r} = r \Rightarrow b = 1r$$

$x = -\frac{1}{r}$ هم ریشه مخرج است:

$$r\left(-\frac{1}{r}\right)^r + a\left(-\frac{1}{r}\right) + 1 = 0 \Rightarrow a = r \Rightarrow \frac{b}{a} = r$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۹۷



$$r^r + h^r = (r\sqrt{r})^r \Rightarrow r^r = rv - h^r \\ V = \frac{1}{r}\pi r^r h = \frac{1}{r}\pi(rv - h^r)h = \frac{\pi}{r}(rvh - h^r) \\ V' = 0 \Rightarrow rv - rh^r = 0 \Rightarrow h = r$$

$$y' = rx^r + rax + b = 0, y'(0) = 0 \Rightarrow b = 0, f(0) = r \Rightarrow c = r$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۹۸

$$x(rx + ra) = 0 \Rightarrow x = -\frac{ra}{r}$$

$$\frac{-ra^r}{rv} + \frac{ra^r}{r} + r = 0 \Rightarrow a^r = -rv \Rightarrow a = -r$$

$$x = \frac{-ra}{r} = r$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۹۹

$$y'(1) = \frac{(r+m)(r) - (r+m)}{1r} = \frac{r(r+m)}{1r} = \frac{r}{r} \Rightarrow m = r$$

نقطه موردنظر $\left(1, \frac{r+m}{r}\right) \Leftarrow$

$$y = \frac{r}{r}x + \frac{n}{r} \Rightarrow \frac{r}{r} + \frac{n}{r} = \frac{r+m}{r} \Rightarrow m - n = 1 \xrightarrow{m=r} n = 1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۰۰

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(\sqrt{\frac{rx+1}{5x+9}} \right)^r}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{rx+1}{5x+9}} \right)^r = \frac{1}{rv}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۰۱

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \times \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-1} = \epsilon \Rightarrow \sqrt{ax^2+bx+c} = x-1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{x(x-1)}{x-1} = x$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. محل تلاقی مجانب‌ها همان مجانبهای قائم و افقی تابع است. ۱۰۲

$$y = \frac{a}{a+1} \text{ مجانب افقی و } x = \frac{-(a-1)}{a+1} \text{ مجانب قائم}$$

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-1}{2} \quad \text{طول نقطه مینیمم:}$$

$$\frac{-(a-1)}{a+1} = \frac{-1}{2} \Rightarrow a = 2 \quad \text{با مساوی قرار دادن دو تا x داریم:}$$

پس تابع هموگرافیک داده شده به صورت $y = \frac{2x+3}{2x+1}$ می‌باشد که محل تلاقی آن با محور طولها $x = \frac{-3}{2}$ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۰۳

$$y = x^2|x| + 3ax^2 + b \xrightarrow{(-1,1)} 1 = 1 + 3a + b \Rightarrow 3a + b = 0 \Rightarrow b = -3a \Rightarrow \frac{b}{a} = -3$$

با فرض اول به جواب رسیدیم، ولی ادامه حل:

$$\Rightarrow y' = -3x^2 + 6ax = -3(-1)^2 + 6a(-1) = 0 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{-1}{2}} = -3 \quad \text{و داریم: } b = \frac{3}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا مشتق را بدست آورید: ۱۰۴

$$f(x) = (x-2)\sqrt{x+2} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{x+2} + (x-2) \times \frac{1}{2(\sqrt{x+2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(5-h) - 3f(5-h) + 2}{h(5-h)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(5-h)-1}{5-h} \right) \times \left(-\frac{f(5-h)-2}{-h} \right)$$

$$= \left(\frac{f(5)-1}{5} \right) (-f'(5)) = \frac{1}{5} \times \frac{-25}{12} = \frac{-5}{12}$$

تذکر: این مسأله با قاعده‌ی هوییتال نیز قابل حل است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۰۵

$$g(x) = f(x+1) + f(3x+10) \Rightarrow g'(x) = f'(x+1) + 3f'(3x+10)$$

$$g'(-2) = f'(-1) + 3f'(4)$$

چون دوره تناوب ۵ است پس:

$$f(x+5) = f(x) \Rightarrow f'(x+5) = f'(x) \xrightarrow{x=-1} f'(4) = f'(-1)$$

$$g'(-2) = \frac{3}{2} + 3\left(\frac{3}{2}\right) = 6$$

۱۰۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون خط مماس بر هر دو رسم شده پس:

$$\frac{r}{r} \sin x = \sin x + \frac{1}{r} \cos x \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{r} + \frac{\sqrt{2}}{r} = \frac{2}{r} \sqrt{2}$$

پس نقطه تماس: $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{2}{r} \sqrt{2}\right)$ و شیب خط مماس:

$$f'(x) = \cos x - \frac{1}{r} \sin x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{4}} m = \frac{\sqrt{2}}{r}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - \frac{2}{r} \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{r} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{y=0} x = \frac{\pi}{4} - 2$$

۱۰۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بدون شک $b < 0$ حال حدهای تابع در بینهایت:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|ax| + rx}{|x|} = |a| - r, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|ax| + rx}{|x|} = |a| + r$$

$$\xrightarrow{b < 0} \begin{cases} |a| + r = -b \\ |a| - r = b \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = -r$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 + rx}{|x| - r} = -r \quad \text{پس: } f(x) = \frac{1 + rx}{|x| - r} \text{ لذا:}$$

۱۰۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = \pm 2\sqrt{x} \Rightarrow A(x, \pm 2\sqrt{x}) \quad M(2, 0)$$

$$AM = \sqrt{(x - 2)^2 + (\pm 2\sqrt{x} - 0)^2} \Rightarrow AM = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$$

همواره $+4x$

$$AM_{\min} \Rightarrow (AM)' = 0 \Rightarrow \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 4}} = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow AM = \sqrt{1 - 2 + 4} = 2\sqrt{2}$$

۱۰۹

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 5x + b & x \leq 2 \\ 2ax + 5 & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{شرط پیوستگی: } 4a + 10 + b = 4a + 5 \Rightarrow b = -5$$

$$\text{شرط مشتق های راست و چپ: } 2ax + 5 = 2a \Rightarrow 4a + 5 = 2a \Rightarrow 2a = -5 \Rightarrow a = \frac{-5}{2}$$

$$\Rightarrow -5 + \left(\frac{-5}{2}\right) = \frac{-15}{2}$$

$$\left(\log \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right) \right)' = g' \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right) \times f' \left(g \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right) \right)$$

$$g(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(x) = \frac{-1}{2} (x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} \times 2x$$

$$\Rightarrow g' \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{-1}{2} \times \underbrace{\left(\frac{5}{4} - 1 \right)^{-\frac{3}{2}}}_{\frac{1}{2-2}} \times \sqrt{5} = \frac{-1}{2} \times 1 \times \sqrt{5} = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$g \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \right)} = 2$$

$$f'(2) \Rightarrow ((2x)^2)' = (\lambda x^2)' = 2\lambda x = 2 \times 2 \Rightarrow \frac{2 \times 2 \times 2 \times \sqrt{5}}{2 \times 2 \times \sqrt{5}} = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} A(x^2, -x) \\ A'(x, -x^2) \end{array} \right\} AA' = \sqrt{(x^2 - x)^2 + (-x - (-x^2))^2}$$

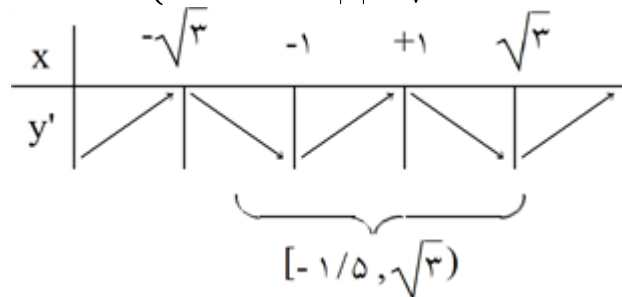
$$AA' = \sqrt{2(x^2 - x)^2} \Rightarrow 0 = AA' \text{ مشتق پس ماکزیمم شود برای آن که } AA'$$

$$AA' = \sqrt{2(x^2 - x)} \Rightarrow (AA')' = 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow AA' = \sqrt{2} \times \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} = \sqrt{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow AA' = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$f(x) = \begin{cases} x(2 - x^2) & |x| \leq \sqrt{2} \\ x(x^2 - 2) & |x| > \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -2x^2 + 2 & |x| \leq \sqrt{2} \\ 2x^2 - 2 & |x| > \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$



$$x_{\min} = -1 \Rightarrow f(x) = -1(2 - 1) = -1$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۱۳

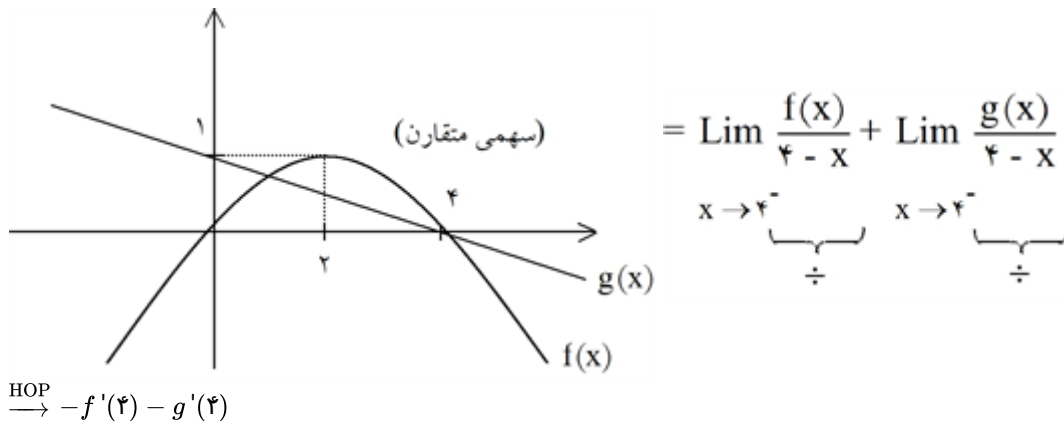
$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \Rightarrow \sqrt{x}y - y = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow \sqrt{x}y - \sqrt{x} = 1 + y \Rightarrow \sqrt{x}(y - 1) = y + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{y + 1}{y - 1} \Rightarrow x = \left(\frac{y + 1}{y - 1}\right)^2$$

$$f^{-1}(x) = \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^2 \Rightarrow (f^{-1}(x))' = 2 \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right) \times \frac{-2}{(x - 1)^2}$$

$$\Rightarrow (f^{-1}(2))' = 2 \times 3 \times -2 = -12$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۱۴



$$(\cdot, 1), (2, \cdot) \Rightarrow g(x) : y - \cdot = \frac{\cdot - 1}{2 - \cdot}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{-1}{2}x + 1$$

$$x_1 = \cdot, x_2 = 2 \Rightarrow f(x) = ax(x - 2) \xrightarrow{(2,1)} f(x) = \frac{-1}{2}x(x - 2) \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{2}x^2 + x$$

$$g'(x) = \frac{-1}{2}, f'(x) = \frac{-1}{2}x + 1$$

$$-f'(2) - g'(2) = -(-1) - \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۱۵

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + |x| - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} = -1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۱۶

$$f'(x) = 2x^2 - 12x = 2x(x^2 - 6) \xrightarrow{f'(x)=0} x = 0, \pm\sqrt{6}$$

$$f''(x) = 4x - 12 \xrightarrow{f''(x)=0} x = 3$$

جدول تغییرات رفتار f را می‌نویسیم:

x	$-\sqrt{6}$	-1	0	1	$\sqrt{6}$
f''	+	+	-	-	+
f'	-	+	+	-	+
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	min	عطف	max	عطف	min

نقاط $A(-\sqrt{6}, -4)$ و $B(\sqrt{6}, -4)$ مینیمم نسبی و نقاط $C(-1, 0)$ و $D(1, 0)$ عطف نمودار تابع هستند. شیب هر دو پاره خط AB و CD برابر صفر است، بنابراین موازی هستند و زاویه بین آن‌ها صفر است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. f' باید منفی باشد. ۱۱۷

$$f'(x) = \frac{2x^2(x^2 - 2) - 2x(x^2 - 2)}{(x^2 - 2)^2} = \frac{2x^0 - 4x^2 + 4x}{(x^2 - 2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1)(x^2 - 2)}{(x^2 - 2)^2}$$

جدول تغییرات رفتار تابع را در بازه‌ی $(-2, 2)$ می‌نویسیم:

x	-2	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2
f'	-	0	+	0	+	0	-	0	+
f	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$-\infty$	$\searrow$	$+\infty$	$\nearrow$

پس نمودار تابع روی بازه‌های $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ و $(1, \sqrt{2})$ اکیداً نزولی است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ضابطه‌ی f را به صورت زیر می‌نویسیم: ۱۱۸

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} - x & ; x \leq 0 \\ 2\sqrt{x} + x & ; x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 & ; x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 & ; x > 0 \end{cases}$$

روی بازه‌ی $(0, +\infty)$ ، مشتق تابع همواره مثبت است بنابراین تابع اکیداً صعودی است. حال برای مقادیر $x < 0$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 1$$

داریم:

$$\Rightarrow x^2 \leq 1 \xrightarrow{x < 0} -1 \leq x < 0$$

چون تابع f پیوسته است پس فاصله‌ی صعودی کل بازه‌ی $[-1, +\infty)$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع f اکیداً صعودی است، پس محل تقاطع آن با f^{-1} روی خط $y = x$ قرار دارد: ۱۱۹

$$f(x) = x \Rightarrow \sqrt{x} + 2 = x \Rightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1) = 0$$

$$\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

پس محل تلاقی f و f^{-1} نقطه $(4, 4)$ است:

$$f(x) = \sqrt{x} + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow m = f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$(f^{-1})'(4) = 4$$

اگر یک خط را نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم، شیب آن عکس می‌شود، پس:

زاویه‌ی بین دو خط با شیب‌های m و m' از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right| = \left| \frac{4 - \frac{1}{4}}{1 + 1} \right| = \frac{15}{8}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\left(\frac{15}{8}\right)}{1 + \left(\frac{15}{8}\right)^2} = \frac{\frac{15}{4}}{1 + \frac{225}{64}} = \frac{240}{289}$$

$$\text{با استفاده از اتحاد } \sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \text{ داریم:}$$

$$f'(x) = rnx \cos x^r \sin^{n-1} x^r \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)f'(x)}{(1 - \cos x)^m}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^n x^r (rnx \cos x^r \sin^{n-1} x^r)}{(1 - \cos x)^m}$$

با استفاده از هم‌ارزی داریم:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^r)^n (rnx (x^r)^{n-1})}{\left(\frac{x^r}{r}\right)^m} = \lim_{x \rightarrow 0} nr^{m+1} x^{rn-rm-1} = 32\sqrt{r}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} rn - rm - 1 = 0 \Rightarrow n = \frac{rm+1}{r} \quad (*) \\ nr^{m+1} = 32\sqrt{r} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{rm+1}{r}\right) r^{m+1} = 32\sqrt{r}$$

$$\Rightarrow \left(m + \frac{1}{r}\right) r^m = 32\sqrt{r}$$

$$\Rightarrow n = 2 \Rightarrow rm + n = 9 \quad \text{به ازای } m = \frac{7}{r} \text{ تساوی بالا برقرار می‌شود.}$$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^r + x - 4)}{(x-a)(2x-1)^2}$$

با توجه به این‌که درجه‌ی عبارت‌های صورت و مخرج برابر هستند، نمودار تابع قطعاً یک مجانب افقی دارد:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^r}{rx^r} = \frac{1}{r}$$

پس باید فقط یک مجانب قائم داشته باشد، یعنی یکی از ریشه‌های مخرج، ریشه‌ی صورت نیز باشد.

ریشه‌های صورت ۱، $\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ و $\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$ و ریشه‌های مخرج نیز $\frac{1}{r}$ و a هستند. بنابراین برای این‌که صورت و مخرج

ریشه‌ی مشترک داشته باشند، a باید برابر ۱، $\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ یا $\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$ باشد. از طرفی اگر $a = \frac{1}{r}$ باشد، عبارت مخرج

فقط یک ریشه دارد و شرط مسئله برقرار است:

$$\Rightarrow \text{مجموع مقادیر } a = \frac{1}{r} + 1 + \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} + \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} = \frac{1}{r}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر x از راست به $-\frac{1}{r}$ نزدیک شود، x^r از چپ به $\frac{1}{r}$ و در نتیجه $\frac{1}{x^r}$ از راست به ۴ نزدیک

می‌شود. بنابراین $-\frac{2}{x^r}$ از چپ به -8 و $\frac{r}{x^r}$ از راست به ۱۲ نزدیک می‌شود پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{r}\right)^+} \frac{16x - \left[-\frac{r}{x^r}\right]}{24x + \left[\frac{r}{x^r}\right]} = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{r}\right)^+} \frac{16x - (-9)}{24x + 12} = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{r}\right)^+} \frac{16x + 9}{12(2x + 1)} = \frac{1}{2} = +\infty$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. قضیه‌ی تقسیم را برای تقسیم $P(x)$ بر $x^2 + 2x$ می‌نویسیم:

$$P(x) = (x^2 + 2x)Q(x) + rx + 1$$

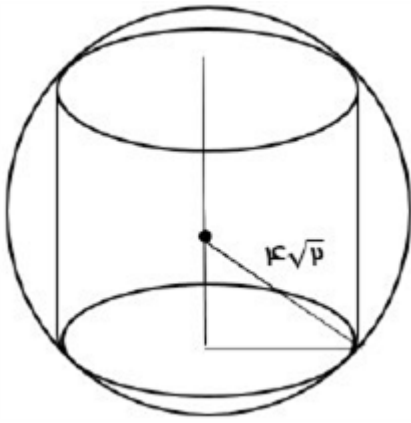
از طرفین تساوی بالا مشتق می‌گیریم:

$$P'(x) = (2x + 2)Q(x) + (x^2 + 2x)Q'(x) + r$$

حال $x = -2$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$P'(-2) = (-2)Q(-2) + 0 + r = -2(r) + r = -r$$

این مقدار همان باقی‌مانده $P'(x)$ بر $x + 2$ است.



$$S = 2\pi rh = 2\pi \sqrt{r^2} \sqrt{\frac{h^2}{4}}$$

$$\Rightarrow r^2 + \frac{h^2}{4} = 22, 2r^2 = 22, r = \sqrt{11}$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{\frac{1}{4}} = \frac{h^2}{\frac{1}{4}} \Rightarrow r^2 = \frac{h^2}{4}$$

$$S_{\max} = 64\pi$$

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & x \geq k \\ 2ax + b & x < k \end{cases}$$

پیوستگی : $ak^2 + bk + c = 2ak + b$ شرط

مشتق پذیری : $2ak + b = 2a \Rightarrow b = 2a - 2ak$ شرط

$$a = b + c \Rightarrow c = -a + 2ak \Rightarrow ak^2 + (2a - 2ak)k + c - 2a = 0$$

$$k^2 + 2k - 2k^2 - 2 + 2k = 0 \Rightarrow k^2 - 4k + 2 = 0 \Rightarrow k = 1, k = 3 \max$$

$$(f \circ g)' \left(\frac{r}{\sqrt{\lambda}} \right) = g' \left(\frac{r}{\sqrt{\lambda}} \right) f' \left(g \left(\frac{r}{\sqrt{\lambda}} \right) \right)$$

$$g'(x) = \frac{-1}{3} (2x)(x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}} \Rightarrow g' \left(\frac{r}{\sqrt{\lambda}} \right) = \frac{-2\frac{r}{\sqrt{\lambda}}}{\frac{1}{16}} = -\frac{32r}{\sqrt{\lambda}} = -8\sqrt{2}$$

$$f(x) = 16x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 32x \Rightarrow f'(2) = 64$$

$$\Rightarrow (f \circ g)' \left(\frac{r}{\sqrt{\lambda}} \right) = -8\sqrt{2} \times 64 = -512\sqrt{2}$$

که حاصل چهار برابر $-128\sqrt{2}$ است.

$$\frac{-512\sqrt{2}}{-128\sqrt{2}} = 4$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا محل برخورد $y = x^2$ و نیمساز ربع اول و سوم را حساب می‌کنیم.

$$y = x^2 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

بنابراین نقطه A دارای طولی بین صفر و یک است. ($0 < \alpha < 1$)

$$A(\alpha, \alpha^2) \Rightarrow A'(\alpha^2, \alpha)$$

$$AA' = \sqrt{(\alpha^2 - \alpha)^2 + (\alpha - \alpha^2)^2} = \sqrt{2} |\alpha - \alpha^2|$$

چون $0 < \alpha < 1$ است بنابراین درون قدرمطلق مثبت است.

$$AA' = \sqrt{2}\alpha - \sqrt{2}\alpha^2$$

کافی است در معادله درجه ۲ ایجاد شده رأس سهمی را حساب کنیم.

$$\alpha_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow AA' = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $x = 0$ ریشه زوج تکرار تابع است پس یک نقطه اکسترمم نسبی است. نقاط $x = \pm 2$ ، نقاط

گوشه تابع با توجه به همواره مثبت بودن تابع در اطراف آن‌ها نیز نقاط اکسترمم تابع می‌باشد. مشتق تابع نیز فقط

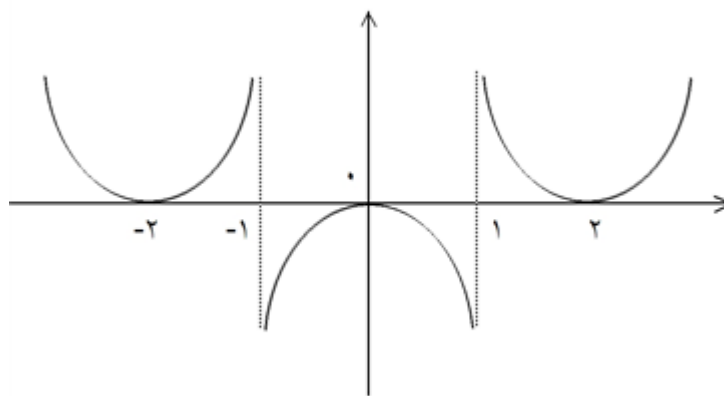
ریشه $x = 0$ را دارد.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} |x^2 - 2| = +\infty$$

بنابراین نمودار تقریبی به صورت زیر است:



با توجه به شکل تابع سه نقطه اکسترمم نسبی دارد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باید $\sqrt{x}$ را در کل رادیکال‌ها ضرب کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x+1} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}} = \sqrt{1+1} - \sqrt{0-0} = \sqrt{2}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$$

	-۱		۲	
+		-		+
↗	max	↘	min	↗

$x = -1$ مینیمم و $x = 2$ ماکزیمم تابع است.

$$A \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} 2 \\ -19 \end{vmatrix} \quad m_{AB} = \frac{1+19}{-1-2} = \frac{20}{-3} \Rightarrow m_{AB} = -\frac{20}{3}$$

$$f'(x) = -9 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = -9 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 3 = 0$$

$\Delta > 0$ دو جواب دارد پس دو نقطه یافت می‌شود.

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x - 2)}{(x^2 - 1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$$

x	$-\infty$	۰	۲	$\sqrt{32}$	
f'	+	-	-	-	+
f	↗	↘	↘	↘	↗

فاصله‌های نزولی: $(0, 2)$ و $(2, \sqrt{32})$ که طول بازه‌ها به ترتیب ۲ و $\sqrt{32} - 2$ است که $\sqrt{32} - 2$ کوچکتر است.

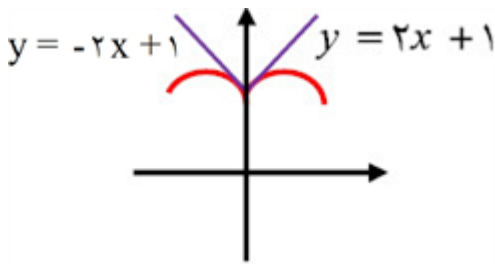
$$\text{جواب} = \sqrt{32} - 2 = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$$

$$f(x) = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(2x)(x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$$

x	۰	۱	
f'	+	+	+
f	↗	↗	↗

این تابع در فواصلی که تعریف شده است، صعودی است.



$$\begin{cases} 2x + 1 = -x \Rightarrow A = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ -2x + 1 = -x \Rightarrow B = (1, -1) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{16}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos^2 x + ax^2 + b}{x} = \cdot \Rightarrow \text{حد صورت} = \cdot \Rightarrow 1 + \cdot + b = \cdot \Rightarrow b = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 \cos^2 x \sin x + 2ax}{x} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2 \cos^2 x \left(\frac{\sin x}{x} \right) + \frac{2ax}{x} \right) = 2 \Rightarrow -2 \times 2 + 2a = 2 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow a + b = 2 + (-1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[n]{a^{x^2+1+\dots+1} \cdot x^{x^2+1+\dots+1}}}{a^{x^2} x^k} = \frac{\sqrt[n]{a^{x^2} \cdot x^{x^2}}}{a^{x^2} x^k} = \frac{-|a^{x^2}|^{1/n}}{a^{x^2} x^k} = -1 \Rightarrow \begin{cases} k = x^2 \\ 9 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\left(\text{گزینه ۱} \right) \frac{-2x^2 + 2}{2x + 2} \times$$

$$\left(\text{گزینه ۲} \right) \frac{\lambda x^2 - 1 \cdot x^2 + 2}{\lambda x^2 - 1 \cdot x + 2} = \frac{\lambda x^2 - 1 \cdot x^2 + 2}{(x-1)(\lambda x^2 + \lambda x - 2)} \times$$

$$\left(\text{گزینه ۳} \right) \frac{-2x^2 + 2}{-2x^2 + 2} \times$$

$$\left(\text{گزینه ۴} \right) \frac{-\lambda x^2 + 2x^2 + 2}{-\lambda x^2 + 2x^2 + 2} = \frac{2x^2 - \lambda x^2 - 2}{2x^2 - \lambda x - 1} = \frac{(x-1)(2x^2 + x + 2)}{(x-1)(2x^2 + 2x + 1)} \checkmark$$

$$x < -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x^2} < 4 \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{x^2} < 12 \Rightarrow \left\lceil \frac{2}{x^2} \right\rceil = 11 \\ \frac{-2}{x^2} > -12 \Rightarrow \left\lfloor \frac{-2}{x^2} \right\rfloor = -11 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-} \frac{1 \cdot x - 5 + \left\lceil \frac{2}{x^2} \right\rceil}{16x - \left\lfloor \frac{-2}{x^2} \right\rfloor} = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-} \frac{1 \cdot x - 5 + 11}{16x - (-11)} = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^-} \frac{1 \cdot x + 6}{16x + 11} = \frac{-5 + 6}{-8 + 11} = \frac{1}{3}$$

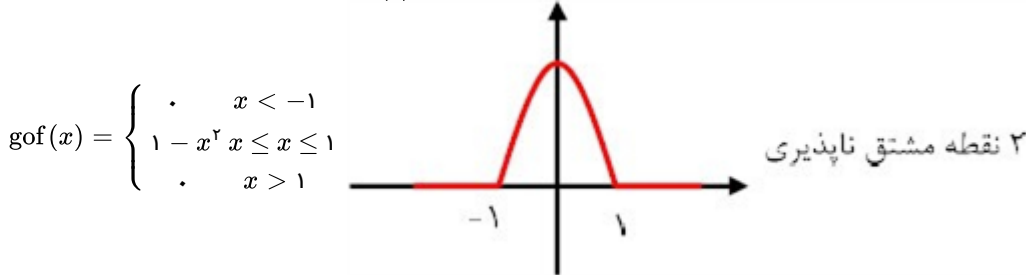


گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۳۸

$$f(g(x)) = \begin{cases} -1 & 1 - x^2 < -1 \Rightarrow x^2 > 2 \Rightarrow |x| > \sqrt{2} \\ 1 - x^2 & -1 \leq 1 - x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x^2 - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 2 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{2} \\ 1 & 1 - x^2 > 1 \times \end{cases}$$



$$gof(x) = 1 - (f(x))^2 = \begin{cases} 1 - (-1)^2 & x < -1 \\ 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 1 - (1)^2 & x > 1 \end{cases}$$



در کل ۴ نقطه مشتق ناپذیر دارد.

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۳۹

$$P'(x) = 2ax + b$$

$$ax^2 + bx + c = (2ax + b)\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - 2 \Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 + 2ax + \frac{1}{2}bx + b - 2$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 + \left(2a + \frac{1}{2}b\right)x + b - 2 \Rightarrow b = 2a + \frac{1}{2}b \Rightarrow 2a = \frac{1}{2}b \Rightarrow 4a = b$$

$$\left. \begin{matrix} c = b - 2 \\ b = 4a \end{matrix} \right\} \Rightarrow c = 4a - 2 \Rightarrow p(x) = ax^2 + 4ax + 4a - 2 \Rightarrow p(1) = 9a - 2 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} \min = 7$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۴۰

$$f'(x) = \frac{2x + 6}{2\sqrt{x^2 + 6x}} \Rightarrow f'(2) = \frac{5}{4}$$

$$\left[\frac{5}{4}\right] = 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 9 \Rightarrow f'(5) = 1$$

$$f'(2) - f'(5) = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۴۱

$$y = 4\sqrt{2} \Rightarrow y = 8 \Rightarrow A(4, 8)$$

در نقطه A، y ها و همچنین y' ها برابر هستند.

$$A(4, 8) \Rightarrow \begin{cases} 16 + 4a + b = 8 \Rightarrow 4a + b = -8 \\ 2x + a = \frac{2}{\sqrt{x}} \Rightarrow 8 + a = 2 \Rightarrow a = -6 \Rightarrow -12 + b = -8 \Rightarrow b = 4 \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای پیدا کردن جواب از مشتق تابع مرکب استفاده می‌کنیم: ۱۴۲

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u' f'(u)$$

$$g'(x) = \left(\frac{-\cos x(1 + \sin x) - \cos x(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)^2} \right) f' \left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} \right)$$

$$\xrightarrow{x = \frac{\pi}{6}} g' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \left(\frac{-2 \cos \frac{\pi}{6}}{\left(1 + \sin \frac{\pi}{6}\right)^2} \right) f' \left(\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} \right) \Rightarrow \frac{-\sqrt{3}}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{\frac{3}{2}} f' \left(\frac{1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow f' \left(\frac{1}{3} \right) = -\frac{2}{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به وجود فقط یک مجانب قائم در تابع یعنی مخرج دارای ریشه مضاعف است: ۱۴۳

$$2x^2 + bx + c = 2(x - 2)^2$$

$$f(2) = 6 \Rightarrow 6 = \frac{9a + 21}{2(2 - 2)^2} \xrightarrow{b=-4, c=4} a = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 4x}{2x^2 - 4x + 4}$$

$$= \frac{-1}{2} \Rightarrow y = \frac{-1}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای پیدا کردن حد در بی‌نهایت و رفع ابهام حد $\frac{\infty}{\infty}$ می‌توان از حد پرتوان استفاده نمود: ۱۴۴

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n}}{2 \times 3^{2n}} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۴۵

$$f'(x) = \frac{2x^2(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x^2}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{(4x^2 - 4x)(x-2)^2 - 2x^2(2x^2 - 4x^2)}{(x-2)^4}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{(x-2)((4x^2 - 4x)(x-2) - 2(2x^3 - 4x^2))}{(x-2)^4} = .$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{4x^2 - 4x - 4x^2 + 4x + 4x^2 - 8x^2 + 8x^2}{(x-2)^3} = .$$

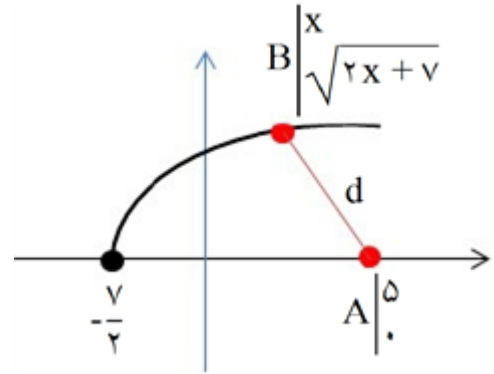
$$\Rightarrow 4x^2 - 4x + 4x^2 - 8x^2 + 8x^2 = . \Rightarrow x(4x^2 - 4x + 4x^2 - 8x^2 + 8x^2) = . \Rightarrow \begin{cases} x = . \\ 4x^2 - 4x + 4x^2 - 8x^2 + 8x^2 = . \Rightarrow \Delta < . \end{cases}$$

$$x = . \Rightarrow y = . \Rightarrow A(.,.)$$

فاصله نقطه عطف $A(.,.)$ تا خط $y + 2 = .$ برابر است با:

$$d = \frac{|. + 2|}{\sqrt{1}} = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۴۶



$$\begin{cases} A(5, \cdot) \\ B(x, \sqrt{2x+7}) \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{(x-5)^2 + (\sqrt{2x+7} - \cdot)^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 2x + 7} \\ \Rightarrow AB = \sqrt{x^2 - 8x + 32} \Rightarrow AB' = \frac{2x - 8}{2\sqrt{x^2 - 8x + 32}} = 0 \Rightarrow x = 4$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۴۷

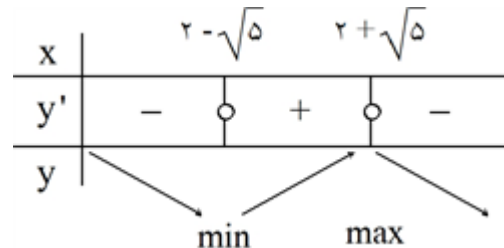
روش اول:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2+1) - 2x(2x-3)}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cancel{x^2} + 2x^2 + 2x + 2 - \cancel{x^2} - 4x^2 + 6x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 + 8x + 2}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow -2x^2 + 8x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 1 \xrightarrow{+4} x^2 - 4x + 4 = 5$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 = 5 \Rightarrow x-2 = \pm\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{5} \\ x = 2 - \sqrt{5} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow f(2 + \sqrt{5}) &= \frac{(2 + \sqrt{5})^2 + 2(2 + \sqrt{5}) - 3}{(2 + \sqrt{5})^2 + 1} = \frac{9 + 4\sqrt{5} + 4 + 2\sqrt{5} - 3}{9 + 4\sqrt{5} + 1} = \frac{10 + 6\sqrt{5}}{10 + 4\sqrt{5}} \\ &= \frac{5 + 3\sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{5 + 3\sqrt{5}}{5 + 2\sqrt{5}} \times \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5 - 2\sqrt{5}} = \frac{25 - 10\sqrt{5} + 15\sqrt{5} - 20}{25 - 20} = \frac{5\sqrt{5} - 5}{5} = \sqrt{5} - 1 \end{aligned}$$

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1} = m$$

روش دوم:

$$(m-1)x^2 - 2x + m + 3 = 0$$

$$\Delta' = 1 - (m-1)(m+3) \Rightarrow m^2 + 2m - 4 = 0$$

$$m = -1 \pm \sqrt{5} \Rightarrow m = -1 + \sqrt{5} \text{ ق ق } m = -1 - \sqrt{5} \text{ ق ق}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۴۸

$$f(x) = \left(\frac{2x - x^2}{2x + 5} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{2x - x^2}{2x + 5} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{(2 - 2x)(2x + 5) - 2(2x - x^2)}{(2x + 5)^2} \right)$$

$$\Rightarrow f'(-2) = \frac{1}{2} \left(\frac{-2 - 4}{-1} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{6 \times (-1) - 2(-4)}{(-1)^2} \right) = \frac{1}{2} \times (8)^{-\frac{1}{2}} \times 18 = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۴۹

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}, g'(x) = 2ax + b$$

$$f(2) = g(2) \Rightarrow 2 = 2a + 2b \Rightarrow 2a + b = 2$$

$$f'(2) = g'(2) \Rightarrow -2 = 2a + b$$

$$\begin{cases} 2a + b = 2 \\ 2a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{5}{2} \Rightarrow b = 7$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۵۰

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^n - 5x^2 + 1}{ax^2 + 7x^2 - 2} = 2 \Rightarrow n = 2, a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x^2 + 1}{2x^2 + 7x^2 - 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{12x^2 - 12x}{6x^2 + 12x} = \frac{2 - 6}{\frac{2}{2} + 2} = \frac{-4}{\frac{5}{2}} = \frac{-8}{5}$$

$$x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = 8$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۵۱

$$f'(x) = \frac{5\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(5x - 2)}{(\sqrt{x})^2} \Rightarrow m = \frac{2}{2}$$

$$y - 8 = \frac{2}{2}(x - 2) \xrightarrow{x=2} y = 2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۵۲

$$\frac{f(6) - f(5)}{6 - 5} = f'(x) \Rightarrow -1 = \frac{-2x + 2}{2\sqrt{21 - x^2 + 2x}} \Rightarrow \sqrt{21 - x^2 + 2x} = x - 2$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 8x - 17 = 0$$

$$\Delta' = 56$$

$$x = \frac{2 + 5\sqrt{2}}{2}, x = \frac{2 - 5\sqrt{2}}{2} \otimes$$

$$g(x) = f(\sqrt{1 + \tan^2 x})$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۵۳

$$g'(x) = \frac{2 \tan x (1 + \tan^2 x)}{2\sqrt{1 + \tan^2 x}} f'(\sqrt{1 + \tan^2 x}) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \times f'(2)$$

$$\Rightarrow f'(2) = \frac{1}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۵۴

$$y = -1 \Rightarrow \frac{-2}{a} = -1 \Rightarrow a = 2$$

$$2x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{-b}{2} \Rightarrow -1 = \frac{-b}{2} \Rightarrow b = 2 \\ P = \frac{c}{2} \Rightarrow -2 = \frac{c}{2} \Rightarrow c = -4 \end{cases}$$

$$f(-1) = \frac{-2 - 4}{2 - 2 - 4} = \frac{6}{-4} = -1.5$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۵۵

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n} \times 2 - \frac{2}{2^{2n}}}{2 \times 2^{2n} + 2 \times \frac{2}{2^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2^{2n})^2 \times 2 - 2}{(2^{2n})^2 \times 2 + 2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(2^{4n}) - 2}{2(2^{4n}) + 2} = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۵۶

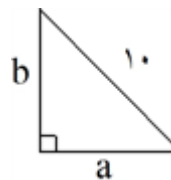
$$f(x) = \frac{x^2 - 6}{x^2 + 3} \Rightarrow f(x) = \frac{(x^2 + 3) - 9}{x^2 + 3} = 1 - \frac{6}{x^2 + 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{12x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = 12 \times \frac{1(x^2 + 3)^2 - 2x(x^2 + 3) \times 2x}{(x^2 + 3)^4}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{(x^2 + 3)}_{\text{مخالف صفر}} \underbrace{((x^2 + 3) - 4x^2)}_{3 - 3x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -\frac{5}{4} \\ x = -1 \Rightarrow y = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

فاصله ی بین دو نقطه ی $(-1, -\frac{5}{4})$ و $(1, -\frac{5}{4})$ برابر با $2 = |-1 - 1|$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۵۷



$$a^2 + b^2 = 100 \Rightarrow a^2 = 100 - b^2$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi a^2 b \Rightarrow \frac{\pi}{3} (100 - b^2) b \Rightarrow V_{\text{مخروط}} = \frac{\pi}{3} (100b - b^3)$$

$$V' = \frac{\pi}{3} (100 - 3b^2) = 0$$

$$3b^2 = 100 \Rightarrow b = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{200} \times 10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{10\sqrt{3}\sqrt{2}}{3}}{\frac{10\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{2}$$



$$P'(x) = 1 + \frac{-2x + 2}{2\sqrt{2x - x^2}} = .$$

$$\frac{-2x + 2}{2\sqrt{2x - x^2}} = -1 \xrightarrow{\times -1} \frac{-2x + 2}{2\sqrt{2x - x^2}} = 1 \Rightarrow -2x + 2 = 2\sqrt{2x - x^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{(-x + 2)} = \cancel{2}\sqrt{2x - x^2}$$

$$x^2 - 2x + 2 = 2x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{1}}{2} = 2 \pm \sqrt{1}$$

$$\xrightarrow{x=2+\sqrt{1}} y = 2 + \sqrt{1} + \sqrt{2(2+\sqrt{1}) - (2+\sqrt{1})^2} = 2 + \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2 + 2\sqrt{1} \text{ max}$$

$$\xrightarrow{x=2-\sqrt{1}} y = 2 - \sqrt{1} + \sqrt{2(2-\sqrt{1}) - (2-\sqrt{1})^2} = 2 - \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2 \text{ min}$$

$$(2 + \sqrt{1}, 2 + 2\sqrt{1}) \Rightarrow d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \xrightarrow{y=x} = \frac{|2 + 2\sqrt{1} - 2 - \sqrt{1}|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = 1$$

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x^2 - x} \right)^2 = \frac{x^2 + 2x}{(x^2 - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x + 2)(x^2 - x)^2 - 2(x^2 - x)(2x - 1)(x^2 + 2x)}{(x^2 - x)^4}$$

$$= \frac{(x^2 - x)((2x + 2)(x^2 - x) - 2(x - 1)(x^2 + 2x))}{(x^2 - x)^4} = \frac{2(6 \times 2 - 3 \times 3 \times 1)}{2^6}$$

$$= \frac{\cancel{2}(12 - 9)}{\cancel{2}^{16}} = \frac{-6}{16} = -\frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5 - 2(-2)} = -\frac{1}{2}(-2)^2 - 2b + c \Rightarrow 2 = -2 - 2b + c$$

$$\Rightarrow -2b + c = 4$$

$$\Rightarrow \text{برابری مشتق چپ و راست} \Rightarrow \frac{-2}{2\sqrt{5 - 2x}} = -x + b \xrightarrow{x=-2} \frac{-2}{6} = 2 + b \Rightarrow b = -\frac{14}{6}$$

$$-2b + c = 4 \Rightarrow \frac{14}{3} + c = 4 \Rightarrow c = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax - \sqrt{x^2 - 1}}{2x - 12} = \frac{1}{6} \xrightarrow{n=1} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{2x} = \frac{1}{6} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{a - \frac{2x}{2\sqrt{(x^2 - 1)^2}}}{2} \xrightarrow{\text{HOP}} \frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{2\sqrt{(2^2 - 1)^2}}}{2} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{2}{6} - \frac{3}{6}}{2} = \frac{-\frac{1}{6}}{2} = -\frac{1}{12}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{[x] + 2}{x + 2} = \frac{[-2^-] + 2}{-2^- + 2} = \frac{-2 + 2}{0^-} = \frac{\text{صفر مطلق}}{0^-} = .$$



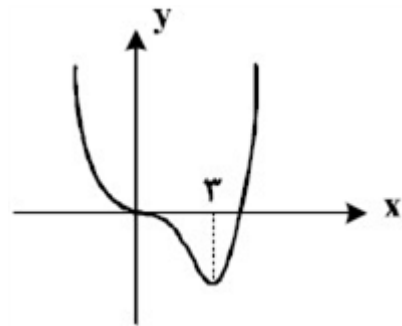
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۶۳

$$f'(x) = \frac{(2-2x)(x+1)^2 - (2x-x^2)(2(x+1))}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)((1-x)(1+x) - 2x + x^2)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{2(1-x^2-2x+x^2)}{(x+1)^4} = \frac{2(1-2x)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \text{ ماکزیمم نسبی} \left. \begin{array}{l} \text{فاصله } y = -1 \text{ مجانب افقی} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{فاصله} = \left| \frac{1}{2} - (-1) \right| = \frac{3}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۶۴



$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx^3$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3bx$$

$$f''(x) = 6x + 2a + 3b$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 12 + 4a + 0 = 0 \Rightarrow 4a = -12 \Rightarrow a = -3$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 \Rightarrow f(-2) = -8 + 12 = 4$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۶۵

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{(2 + \frac{1}{0}) - (1 + 1)}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{25} = \frac{14}{50} = 0.28$$

$$f'\left(\frac{2}{2}\right) - \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0.28 - 0.5 = -0.22$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۶۶

$$f(x) = \frac{|x(x^2 - 2)|}{x} = \frac{|x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})|}{x} = \frac{|x||x - \sqrt{2}||x + \sqrt{2}|}{x}$$

تابع در $x = 0$ مشتق ندارد چون $D_f \ni 0$.

در $x = \pm\sqrt{2}$ نقطه‌ی گوشه (شکسته) است چون ریشه‌ی ساده قدرمطلق است. پس f در ۳ نقطه مشتق ندارد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. خط به معادله‌ی $y = 3x - 5$ در $x = 2$ بر منحنی $g(x)$ مماس است، پس:

$$\begin{cases} g(2) = 3(2) - 5 = 1 \\ g'(2) = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{2}{3} \Rightarrow f'(1) = \frac{2}{3}$$

$$(f \circ g)'(2) = g'(2)f'(g(2)) = 3 \times \frac{2}{3} = 2$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۶۸

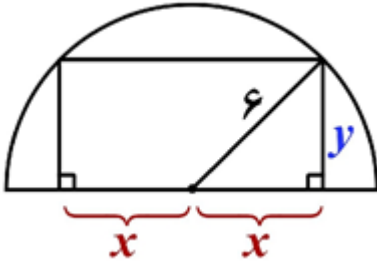
$$\begin{array}{r} 2x^2 - x - 2 \mid x^2 + 2x \\ -2x^2 - 4x \\ \hline -5x - 2 \end{array} \Rightarrow y = 2 + \frac{(-5x - 2)}{x^2 + 2x}$$

$$x \rightarrow +\infty : y = 2 + \frac{-}{+} < 2$$

$$x \rightarrow -\infty : y = 2 + \frac{+}{+} > 2$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۶۹



$$S = 2xy$$

$$x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow y = \sqrt{16 - x^2}$$

$$\Rightarrow S = 2x\sqrt{16 - x^2} \xrightarrow{x>0} \sqrt{2} \sqrt{16x^2 - x^4} \Rightarrow S' = \sqrt{2} \left(\frac{16x - 2x^3}{\sqrt{16x^2 - x^4}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow 16x - 2x^3 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$$

$$S_{\max} = 2(2\sqrt{2})\sqrt{16 - 8} = 2(2\sqrt{2})(2\sqrt{2}) = 16$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۷۰

$$f(x) = x|x| - 2x = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 0 \\ -x^2 - 2x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x \geq 0 \\ -2x - 2 & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ min} \\ -2x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ max} \end{cases}$$

$$\frac{A(1, -1)}{B(-1, 1)} \Rightarrow AB = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۷۱

$$\text{شیب مماس} = \frac{f(8) - f(0)}{8 - 0} = \frac{8 - (-5)}{8} = 1 \Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow \frac{9}{(x+1)^2} = 1 \Rightarrow (x+1)^2 = 9$$

$$\xrightarrow{0 \leq x \leq 8} x+1 = 3 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow \begin{matrix} T(2, 1) \\ m = 1 \end{matrix} \Rightarrow y = x - 1$$

$$\Rightarrow \text{عرض از مبدا} = -1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۷۲

$$f'(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x+2}} + x \left(\frac{1}{(x+2)^2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2x+1}{x+2}}} \Rightarrow f'(-3) = 2 + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۷۳

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{ax+b} & x > 2 \\ -x^2 + 6x & x \leq 2 \end{cases}$$

شرط پیوستگی: $\frac{\lambda}{2a+b} = -\lambda + 12 \Rightarrow \lambda = (2a+b)^2 \Rightarrow 2a+b=2$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-\lambda a}{(ax+b)^2} & x > 2 \\ -2x & x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{-\lambda a}{(2a+b)^2} = -2(2) + 6$$

$$\Rightarrow \frac{-\lambda a}{4} = -6 \Rightarrow -\lambda a = -24 \Rightarrow a = 3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۷۴

$$f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-1)\sqrt{x} - (-x-1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{5}{4} \times 1}{\frac{1}{4}}$$

$$= -2 + 5 = 3 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{4}+h\right) - f\left(\frac{1}{4}\right)}{h} = f'\left(\frac{1}{4}\right) = 3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۷۵

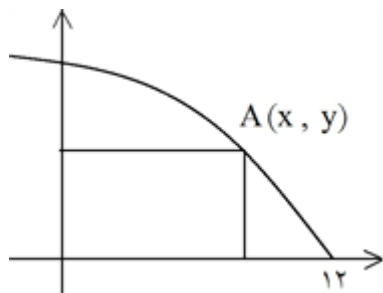
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + x}}{x} \xrightarrow{\text{بر توان ۲}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - |2x|}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - (-2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۷۶

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{0^-} = -\infty$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۷۷



$$S = xy = x\sqrt{12-x}$$

$$S' = \sqrt{12-x} + x\left(\frac{-1}{2\sqrt{12-x}}\right) = \frac{2\sqrt{12-x} - x}{2\sqrt{12-x}} = 0 \Rightarrow 2\sqrt{12-x} - x = 0 \Rightarrow x = 8$$

$$\Rightarrow S_{\max} = 8\sqrt{12-8} = 16$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۷۸

$$f(x) = x|x-2| = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & x < 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x > 2 \\ -2x + 2 & x < 2 \end{cases}$$

X	2	2
f'	+	-
f	↗	↘
	max	min
	2	.

$$f' = 0 \Rightarrow x = 2$$

f' وجود ندارد $\Rightarrow x = 2$

$$\max(2, 2) \Rightarrow d = \sqrt{(2-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+0} = 2\sqrt{0}$$

$$\min(2, 0)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۷۹

$$f(x) = \frac{1}{x}x^2 - \frac{1}{x}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{1} - 1\right)}{2} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(2) = 2 + \frac{1}{4}$$

$$\text{اختلاف} = \left(2 - \frac{1}{4}\right) - \left(2 + \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۸۰

$$g(x) = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow g'(x) = \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow g'(2) = -3$$

$$(f \circ g)'(2) = 6 \Rightarrow g'(2) \cdot f'(g(2)) = 6 \Rightarrow -3f'(5) = 6 \Rightarrow f'(5) = -2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۸۱

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & x \geq 2 \\ -x^2 + ax + b & x < 2 \end{cases}$$

$$\text{شرط پیوستگی} = \frac{1}{2-1} = -2 + 2a + b$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x-1)^2} & x \geq 2 \\ -2x + a & x < 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{(2-1)^2} = -2 + a \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow 1 = -2 + 6 + b \Rightarrow b = -1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۸۲

$$f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{5-2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5-2x) - (1+\sqrt{x})(-2)}{(5-2x)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{\frac{1}{2}(-3) - (2)(-2)}{9}$$

$$= \frac{\frac{-3}{2} + 4}{9} = \frac{5}{18} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = \frac{5}{18}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. روش اول: ۱۸۳

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 + x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x)^2 - 4x^2 - x}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} = \frac{-x}{2x - \sqrt{4x^2}} = \frac{-x}{2x - (-2x)} = -\frac{1}{4}$$

روش دوم (با هم‌ارزی بی‌نهایت):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 + x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + \sqrt{4} \left| x + \frac{1}{8} \right| \right) = 2x - 2x - \frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۸۴

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + |x|} = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{2x} & x > 0 \\ \text{تعریف نشده} & x \leq 0 \end{cases}$$

تابع به ازای $x \leq 0$ تعریف نمی‌شود بنابراین گزینه‌ی ۱ و ۲ نادرست می‌باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۸۵

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2}$$

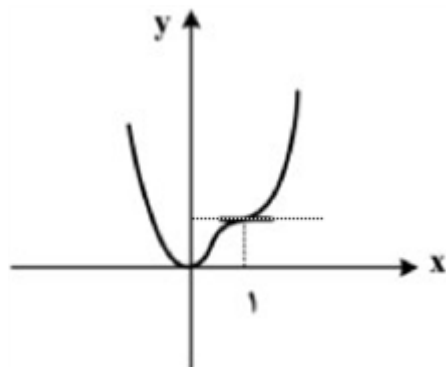
$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2+2x)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)((x+1)(x-1) - x^2 - 2x)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{2(x^2 - 1 - x^2 - 2x)}{(x-1)^4} = \frac{-1 - 2x}{(x-1)^4}$$

$-1 - 2x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$
 $(x-1)^4 = 0 \Rightarrow x = 1$: مجانب قائم

$$\text{فاصله} = \left| 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \right| = \frac{3}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۸۶



$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\left. \begin{aligned} f'(1) = 0 &\Rightarrow 3 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 0 &\Rightarrow 6 + 2a = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۸۷

$$f(x) = (x+2)\sqrt{4x+1}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{6 \times 3 - 2}{2} = 5$$

$$f'(x) = \sqrt{4x+1} + (x+2) \frac{2}{2\sqrt{4x+1}} \Rightarrow f'\left(\frac{2}{4}\right) = 2 + \left(\frac{2}{4} + 2\right) \frac{2}{2 \times 2}$$

$$f'\left(\frac{2}{4}\right) = 2 + \frac{2}{4} + 2 = 4 + \frac{2}{4}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'\left(\frac{2}{4}\right) = 5 - 4 - \frac{2}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. توجه کنید: ۱۸۸

$$x < 2 \Rightarrow x(x-2) < 0 \Rightarrow x^2 - 2x < 0 \Rightarrow |x^2 - 2x| = -x^2 + 2x$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{شرط پیوستگی: } -2^2 + 2(2) &= \frac{1}{2}(2^2) + 2a + b \Rightarrow 2a + b = -2 \\ f'(x) &= \begin{cases} -2x + 2 & x < 2 \\ x + a & x > 2 \end{cases} \Rightarrow -2(2) + 2 = 2 + a \Rightarrow a = -4 \\ \Rightarrow b = 6 &\Rightarrow a + b = 2 \end{aligned} \right\}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۸۹

$$(f \circ g)'(1) = g'(1) \cdot f'(g(1)) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$$

$$g(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} g(1) = 2 \\ g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow g'(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{3}{2} \Rightarrow f'(2) = \frac{3}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باید $x = 2$ ریشه‌ی مضاعف مخرج باشد پس: ۱۹۰

$$x^2 + ax + b = (x-2)^2 \Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 - 4x + 4$$

$$\left. \begin{aligned} a &= -4 \\ b &= 4 \end{aligned} \right\} a + b = 0$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۹۱

$$f(x) = \frac{x^2}{|1-x|} \cdot [x] \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = ? = f'_-(2)$$

$$x \rightarrow 2^- : f(x) = \frac{x^2}{x-1} \cdot [x] = \frac{2x^2}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x)(x-1) - (1)(2x^2)}{(x-1)^2} \xrightarrow{x=2} \text{ جایگذاری}$$

$$f'_-(2) = \frac{(12)(2) - (1)(18)}{1} = \frac{6}{1} = 6$$

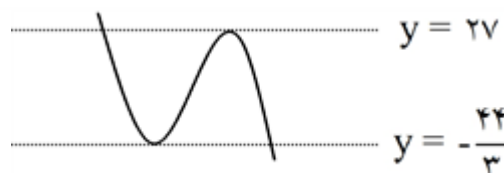
تذکر: در اصل این حد وجود ندارد چون f در $x = 3$ پیوستگی چپ ندارد ولی متأسفانه غلط مورد علاقه کنکور سراسری است که منظور طراح سؤال همین راه حل است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۹۲

$$y' = -2x^2 + 2x + 12 = -2(x^2 - x - 6) = -2(x-3)(x+2) = 0 \quad \begin{cases} x=3 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 27$$

$$x = -2 \Rightarrow y = -\frac{22}{3}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۹۳

$$y = \tan^2 2x \Rightarrow y' = 2(2) \tan^2 2x (1 + \tan^2 2x) \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} y' = 6 \tan^2 \frac{\pi}{3} \left(1 + \tan^2 \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 6 \times (\sqrt{3})^2 (1 + 3) = 18 \times 4 = 72$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نکته: در تابع درجه سوم، ریشه‌ی مضاعف مشتق اول، همان طول نقطه‌ی عطف تابع می‌باشد.

$$y = ax^r + bx^r - rx - 1 \Rightarrow y' = rax^r + rbx - r \Rightarrow y'' = 6ax + 2b$$

$$A(1, -2) \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2 = a(1)^r + b(1)^r - r(1) - 1 \Rightarrow a + b = 2 \\ r \cdot 6a(1) + 2b = 0 \Rightarrow 6a + b = 0 \Rightarrow b = -6a \end{cases} \quad a = -1, b = 3$$

$$y' = r(-1)x^r - r(3)x - r \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x^r - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^r = 0 \Rightarrow x = 1$$

$x = 1$ ریشه مضاعف مشتق اول تابع می‌باشد و تابع همواره صعودی است لذا تابع فاقد ماکزیمم نسبی است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y' = \frac{-(\sin x + \cos x)^r + (\cos x - \sin x)^r}{(\cos x + \sin x)^r} \rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{r}{x^r - 1} - \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{r - x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{r - x^r + x}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x^r - x - r)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x+1)(x-r)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x-r)}{x-1} = \frac{r}{-2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(x^r f(x))' = rxf(x) + x^r f'(x) \xrightarrow{x=-r} -rf(-r) + rf'(-r) = -r(-r) + r\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-r+h) + r}{h} = \frac{1}{r} \Rightarrow \begin{cases} f(-r) = -r \\ f'(-r) = \frac{1}{r} \end{cases} = 1r + r = 1r$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f''(1) = 0 \rightarrow 6(1) + 2a = 0 \rightarrow a = -3$$

$$f(1) = -11 \rightarrow a + b = -12 \rightarrow b = -9$$

$$f(x) = x^r - 3x^r - 9x \rightarrow f(-1) = -1 - 3 + 9 = 5$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\cos x(1+\cos x) + \sin x(\sin x)}{(1+\cos x)^r} = \frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^r} & ; x > 0 \\ r \cos rx & ; x < 0 \end{cases}$$

$$f'_-(0) - f'_+(0) = r - \frac{1}{r} = \frac{r}{r}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

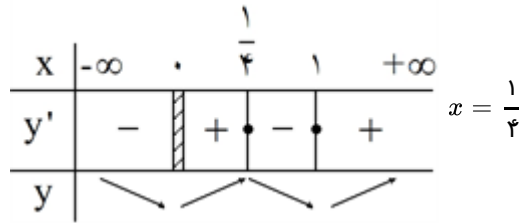
$$f'(x) = \frac{r(x+r) - (rx+5)}{(x+r)^r} \Rightarrow f'(1) = \frac{v}{48}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۰۱

$$y' = 2(x-1)\sqrt[3]{x} + (x-1)^2 \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{2x(x-1) + 2(x-1)^2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$y' = \frac{2x^2 - 2x + 2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} f(2) = 9 \\ f'(2) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۰۲

$$g(x) = x\sqrt{f(x)} \Rightarrow g'(x) = \sqrt{f(x)} + \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \times x$$

$$\xrightarrow{x=2} g'(2) = \sqrt{f(2)} + \frac{f'(2)}{2\sqrt{f(2)}} \times 2 = 2 + \frac{2}{2} \times 2 = 3/5$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شرط مماس بودن آن است که y ها و y' ها برابر باشد و همچنین وقتی دو منحنی بر هم

مماس هستند، با مساوی قرار دادن آنها باید $\Delta = 0$ باشد.

$$\frac{x^2 + a}{x - 2} = -2x + 2 \Rightarrow 2x^2 - 2x + a + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow a = 0$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون بر $(x-1)^2$ بخش پذیر است بنابراین مشتق آن نیز بر $x-1$ بخش پذیر است. یعنی

$$P(1) = 0 \text{ و } P'(1) = 0$$

$$P(x) = x^2 + ax^2 - bx + 2 \Rightarrow P(1) = 1 + a - b + 2 = 0 \Rightarrow a - b = -3$$

$$P'(x) = 2x^2 + 2ax - b \Rightarrow P'(1) = 2 + 2a - b = 0 \Rightarrow 2a - b = -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a + 2b = 1 \\ 2a - b = -2 \end{cases} \Rightarrow b = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون مجانب های قائم قرینه هستند بنابراین مخرج باید دو ریشه ی قرینه داشته باشد

یعنی:

$$S = 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow (a < 0, b = 0)$$

$$P < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0 \Rightarrow a < 0$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۰۶

$$y' = 2x^2 - 2(m-1)x + 8$$

باید ریشه های مشتق (ریشه های مشتق طول های ماکزیمم و می نیمم است.) منفی و متمایز باشند بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow 4(m-1)^2 - 64 > 0 \Rightarrow (m-1)^2 > 16 \Rightarrow m-1 > 4 \text{ یا } m-1 < -4 \Rightarrow m > 5 \text{ یا } m < -3 \text{ (I)} \\ S < 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2(m-1)}{2} < 0 \Rightarrow m < 1 \text{ (II)} \\ P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{8}{2} > 0 \Rightarrow 4 > 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(I) \cap (II)} m < -3$$

$$y'' = 4x - 2(m-1) = 0 \Rightarrow x_c = \frac{m-1}{2} \text{ (طول نقطه ای عطف)}$$

$$m < -3 \xrightarrow{-1} m-1 < -4 \xrightarrow{\div 2} \frac{m-1}{2} < -2 \Rightarrow x_c < -2 \Rightarrow x_c \in (-\infty, -2)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۰۷

$$x = 1 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(1 + \cdot/44) - f(1)}{\cdot/44} = \frac{f(1/44) - f(1)}{\cdot/44}$$

$$= \frac{\frac{1/44-1}{1/2} - \frac{1-1}{1}}{\cdot/44} = \frac{\frac{1/44-1}{1/2}}{\cdot/44} = \frac{1}{1/2} = \frac{1}{1/2} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 1} = \frac{2}{1} = 2$$

برای مشتق در $x = 1$ تنها کافی است از عامل صفر مشتق گرفته و در مابقی ضرب کنیم.

$$f(x) = \underbrace{(x-1)}_{\text{عامل صفر}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = 1 \times \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = 1$$

اختلاف آن‌ها برابر است با: $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۰۸

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + |x|}{ax^n} \xrightarrow{n=1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{a} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{2}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 2x}}{-6x - 6} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 + \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}}{-6} = \frac{2 - \frac{5}{2}}{-6} = \frac{\frac{4-5}{2}}{-6} = \frac{-\frac{1}{2}}{-6} = \frac{1}{12}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای آن‌که تابع صعودی باشد، باید $f'(x) > 0$ و برای آن‌که تقعر آن رو به پایین باشد، باید

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = x^3 + 3x^2 - 6x > 0 \Rightarrow 2x^2 + 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 12 = 0$$

$$\Rightarrow x(2x^2 + 3x - 12) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 96}}{4} = \begin{cases} x' \cong \frac{5}{4} \\ x'' \cong -\frac{12}{4} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\frac{12}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
y'	-	+	-	+	+

تابع در بازه‌ی $(-\frac{12}{4}, 0)$ و $(\frac{5}{4}, +\infty)$ صعودی است.

$$f''(x) = 3x^2 + 3x - 6 < 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Rightarrow -2 < x < 1$$

در بازه‌ی $(-2, 1)$ تقعر تابع به طرف پایین است. اشتراک $f' > 0$ و $f'' < 0$ بازه‌ی $(-2, 0)$ می‌باشد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای آن‌که تابع در نقطه‌ی $x = 1$ مشتق‌پذیر باشد، باید در این نقطه حد داشته باشد،

پیوسته باشد و ضمناً مشتق‌های راست و چپ آن با هم برابر باشند.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} - 5 & x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 - 5 = -4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + a + b \end{cases} \Rightarrow 1 + a + b = -4 \Rightarrow a + b = -5 \text{ (رابطه‌ی ۱)}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x^2} & x \geq 1 \quad f'_+(1) = -1 \\ 2x + a & x < 1 \quad f'_-(1) = 2 + a \end{cases} \Rightarrow 2 + a = -1 \Rightarrow a = -3$$

$$-5 + b = -4 \Rightarrow b = 1$$

$a = -3$ را در ا قرار می‌دهیم، داریم:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۱۱

$$y = \sin^r \sqrt{rx} \Rightarrow y' = r \left(\frac{1}{\sqrt{rx}} \cos \sqrt{rx} \right) \sin^r \sqrt{rx}$$

$$\Rightarrow y' \left(\frac{\pi^r}{18} \right) = r \left(\frac{1}{\frac{\pi}{r}} \cos \frac{\pi}{r} \right) \sin^r \left(\frac{\pi}{r} \right) = r \left(\frac{r}{\pi} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \frac{r}{4} = \frac{r^2}{4\pi}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. آهنگ متوسط تغییر تابع هنگامی که متغیر از مقدار x_1 به مقدار x_2 تغییر می‌کند برابر

است با: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ و آهنگ لحظه‌ای تابع در x_1 برابر است با $f'(x_1)$.

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(6/25) - f(4)}{6/25 - 4} = \frac{\sqrt{6/25} - \sqrt{4}}{2/25} = \frac{2/5 - 2}{2/25} = \frac{-8/5}{2/25} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow x = 4 \text{ در آهنگ لحظه‌ای} = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

$$\text{تفاضل آهنگ لحظه‌ای و متوسط} = \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{9 - 8}{36} = \frac{1}{36}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۱۳

$$y = \text{gof}(x) = \frac{r}{r} (rx + |x|) + a |rx + |x|| = \begin{cases} rx + rax & x \geq 0 \\ \frac{r}{r} x - rax & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع در } x = 0 \text{ پیوسته است.}$$

$$y' = \begin{cases} r + ra & x > 0 \\ \frac{r}{r} - ra & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y'_+ (0) = y'_- (0) \Rightarrow r + ra = \frac{r}{r} - ra \Rightarrow a = \frac{-1}{4}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۱۴

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x + \sqrt{x^r - 1}) \times \frac{x - \sqrt{x^r - 1}}{x - \sqrt{x^r - 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x^r - x^r + 1)}{x - \sqrt{x^r - 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1x}{x - |x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1x}{2x} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۱۵

$$y = x\sqrt{x} \xrightarrow{\text{تابع به شکل ضربی است}} y' = (1) \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \Rightarrow y'(4) = \frac{3}{2}\sqrt{4} = 3$$

$$\text{روش دوم: } y = x\sqrt{x} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \Rightarrow y'(4) = 3$$

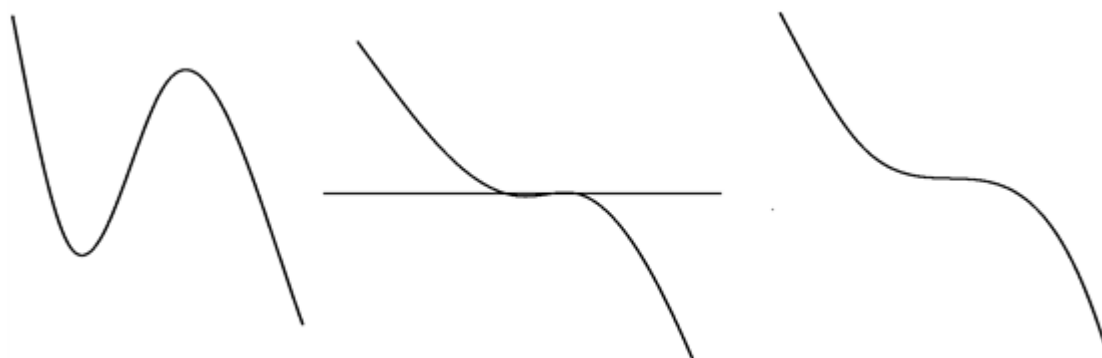
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۱۶

$$f(x) = \frac{x^r}{x+1}, g(x) = \frac{(x+1)^r}{x} \Rightarrow f(x) \cdot g(x) = \frac{x^r}{x+1} \cdot \frac{(x+1)^r}{x} = x(x+1) = x^r + x$$

$$\Rightarrow (f(x) \cdot g(x))' = (x^r + x)' = rx + 1 \xrightarrow{x=r} (f \cdot g)'(r) = r(r) + 1 = 5$$

۲۱۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در تابع درجه‌ی سوم $y = -x^3 - 2x + 1$ ، چون ضریب x^3 منفی است، یکی از نمودارهای زیر رخ می‌دهد. برای تشخیص بیشتر، کافی است Δ ی مشتق تابع را محاسبه کنیم. داریم:



$\Delta > 0$ ی مشتق

$\Delta = 0$ ی مشتق

$\Delta < 0$ ی مشتق

چون مشتق تابع دارای ریشه‌ی حقیقی نیست، در نتیجه تابع نمی‌تواند دارای اکسترمم نسبی باشد و نمودار تقریبی آن گزینه ۱ است.

۲۱۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$2x + y = 6 \Rightarrow y = 6 - 2x \Rightarrow S = xy = x(6 - 2x) = 6x - 2x^2$$

$$S'x = 6 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow S_{\max} = \frac{3}{2} \left(6 - 2 \times \frac{3}{2} \right) = \frac{9}{2}$$

اگر $ax + by = c$ باشد، مقدار xy زمانی ماکسیمم است که $ax = by$ باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 2x = y \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{2}, y = 3 \Rightarrow \text{MAX}\{xy\} = \frac{3}{2} \times 3 = \frac{9}{2}$$

۲۱۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در توابع شامل قدرمطلق که داخل قدرمطلق مشتق‌پذیر است، در ریشه‌های ساده‌ی داخل قدرمطلق، احتمال مشتق‌ناپذیری وجود دارد:

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ و } x = 0$$

$$f(x) = x|x^2 - x| \Rightarrow f'(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{x|x^2 - x| - \cdot}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot} |x^2 - x| = \cdot$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x|x^2 - x| - \cdot}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x|x||x - 1|}{x - 1}$$

$$\left. \begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x|x||x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2(x-1)}{x-1} = 1 \\ f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x|x||x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2(x-1)}{x-1} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1)$$

بنابراین تابع f در $x = 0$ مشتق‌پذیر و در $x = 1$ مشتق‌ناپذیر است و تنها یک نقطه‌ی مشتق‌ناپذیری دارد.

۲۲۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا تابع $y = x^2\sqrt{x}$ را به صورت $y = x^{\frac{5}{2}}$ بازنویسی می‌کنیم و سپس دوبار از آن مشتق می‌گیریم. داریم:

$$y = x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow y' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y = \frac{5}{2} \times \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{15}{4}\sqrt{x}$$

$$y(1) = \frac{15}{4} \times \sqrt{1} = \frac{15}{4}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو هم‌ارزی مهم حد در بی‌نهایت به صورت زیر است:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \cong \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|, x \rightarrow \pm\infty \quad I$$

$$\sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + c + d} \cong \sqrt[3]{a} \left(x + \frac{b}{3a} \right), x \rightarrow \pm\infty \quad II$$

با توجه به رابطه‌ی I داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 - 4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x - 1| - |x - 2| = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x - (2 - x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 = -1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای تعیین طول نقطه‌ی عطف تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + ax$ ، ریشه‌ی ساده‌ی

مشتق دوم تابع را محاسبه می‌کنیم، داریم:

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + ax \Rightarrow f'(x) = 2x^2 - 6x + a \Rightarrow f''(x) = 4x - 6 = 0 \Rightarrow x_{\text{عطف}} = \frac{3}{2} \Rightarrow y_{\text{عطف}} = \frac{18a - 54}{12} = \frac{3a - 9}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{مختصات نقطه ی عطف}} I \left(\frac{3}{2}, \frac{3a - 9}{2} \right)$$

چون نقطه‌ی عطف منحنی روی نیمساز ناحیه‌ی چهارم قرار دارد، در نتیجه $y_{\text{عطف}} = -x_{\text{عطف}}$ است. پس می‌نویسیم:

$$\in y = -x \Rightarrow y_{\text{عطف}} = -x_{\text{عطف}} \Rightarrow \frac{3a - 9}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow 3a - 9 = -3 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از شکل مقابل به راحتی نتیجه می‌گیریم که در تابع درجه‌ی سوم $y = \frac{2}{3}x^3 + ax^2 + bx$ ، طول

عطف عددی مثبت است. لذا مقدار طول عطف را مشخص کرده و بزرگ‌تر از صفر قرار می‌دهیم. داریم:

$$\xrightarrow{\text{طبق گزینه ها}} a = -1$$

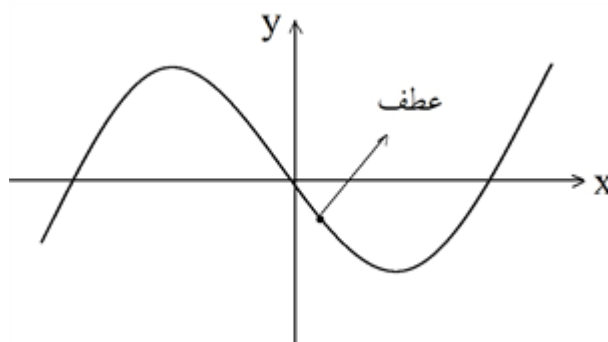
$$y' = 2x^2 + 2ax + b \Rightarrow y'' = 4x + 2a = 0 \Rightarrow x_{\text{عطف}} = -\frac{2a}{4} = -\frac{a}{2} > 0 \Rightarrow a < 0$$

با توجه به شکل به راحتی نتیجه می‌گیریم که طول ماکزیمم

و طول می‌نیمم مختلف‌العلامه‌اند. بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها که همان

حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم y' است، باید منفی باشد، داریم:

$$\xrightarrow{a=-1} y' = 2x^2 - 2x + b = 0 \Rightarrow x_{\text{Max}}, x_{\text{Min}} = P = \frac{b}{2} < 0 \Rightarrow b < 0 \xrightarrow{\text{طبق گزینه ها}} b = -4$$



گزینه ی ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به قاعده‌ی مشتق توابع زنجیری (تابع مرکب)، مقدار $\frac{dy}{dx}$ (مشتق y نسبت به

متغیر x) به ازای $x = \frac{1}{4}$ برابر است با:

$$\begin{cases} y = \tan^2(\pi U) = f(U) \Rightarrow y = f(U) = f(g(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{dy}{dU} \cdot \frac{dU}{dx} = y'_U \cdot U'_x \\ U = x + \sqrt{x} = g(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \underbrace{2(\tan \pi U) \cdot (\pi(1 + \tan^2 \pi U))}_{y'_U} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}_{U'_x} \Big|_{x=\frac{1}{4} \Rightarrow U=\frac{3}{4}} = 2(-1)(\pi(1+1))(1+1) = -8\pi$$

گزینه ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع } f \text{ نسبت به متغیر } x \text{ روی بازه‌ی } [2, 2.02] = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2.02) - f(2)}{2.02 - 2} = \frac{\frac{2.02}{2.02-1} - \frac{2}{2-1}}{.02} =$$

$$\frac{\frac{2.02}{1.02} - \frac{2}{1}}{.02} = \frac{\frac{2.02}{1.02} - 2}{.02} = \frac{\frac{-2}{1.02}}{\frac{2}{1.02}} = -\frac{50}{51}$$

$$x = 2 \text{ در } f \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f'(2) = \frac{-1}{(2-1)^2} = -1$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ لحظه‌ای - آهنگ متوسط} = \left(-\frac{50}{51}\right) - (-1) = \frac{-50 + 51}{51} = \frac{1}{51}$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ضابطه‌ی تابع $y = x|x^2 - 3|$ را ساده می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x(x^2 - 3) & |x| \geq \sqrt{3} \\ x(3 - x^2) & |x| < \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & |x| > \sqrt{3} \\ 3 - 3x^2 & |x| < \sqrt{3} \end{cases}$$

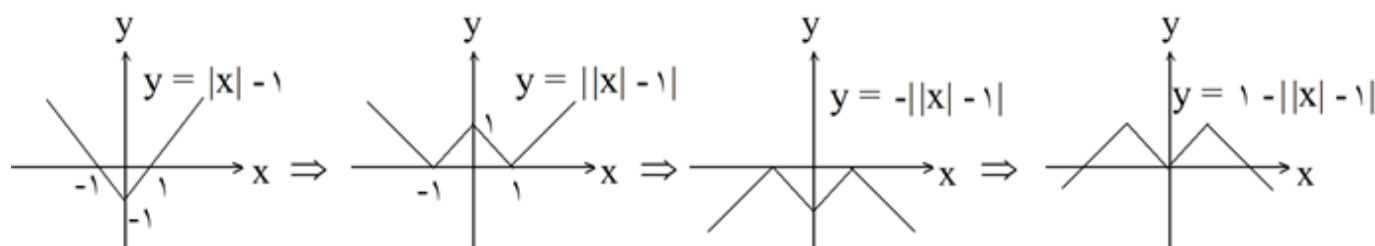
$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

با توجه به این که $x = \pm 1$ ، ریشه‌های ساده‌ی $f'(x)$ هستند، بنابراین هر دو اکسترمم نسبی هستند و همچنین با توجه

به این که $f'_+(\sqrt{3}) = 6$ و $f'_-(\sqrt{3}) = -6$ (چرا؟) و $f'_-(-\sqrt{3}) = 6$ و $f'_+(-\sqrt{3}) = -6$ (چرا؟) است، لذا دو نقطه‌ی $x = \pm\sqrt{3}$ نیز اکسترمم‌های نسبی تابع f هستند.

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = f(f(x)) = 1 - |1 - |x|| = 1 - ||x| - 1|$$



تابع در ۳ نقطه‌ی $\{-1, 0, 1\}$ مشتق ندارد.

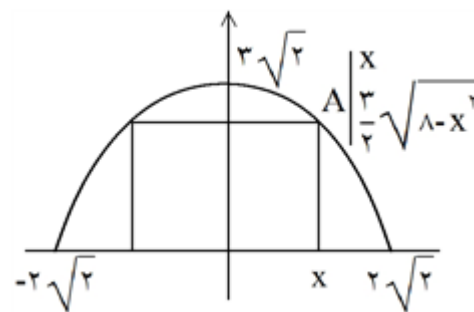
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار $y = \frac{3}{2}\sqrt{8-x^2}$ را رسم می‌کنیم. (نیم بیضی)

حال یک مستطیل فرضی را با شرایط مسأله در این نیم بیضی محاط می‌کنیم. همان‌طور که دیده می‌شود، رأس A از این مستطیل بر روی نیم بیضی است و در نتیجه مختصات آن به صورت $(x, \frac{3}{2}\sqrt{8-x^2})$ می‌باشد. بنابراین طول و عرض مستطیل مطابق شکل، برابر $2x$ و $\frac{3}{2}\sqrt{8-x^2}$ است و داریم:

$$S_{\text{مستطیل}} = 2x \times \frac{3}{2}\sqrt{8-x^2} = 3x\sqrt{8-x^2} \Rightarrow S = 3\sqrt{8x^2-x^4}$$

$$S'_x = 3 \times \frac{16x - 4x^3}{2} \sqrt{8x^2-x^4} = 0 \Rightarrow (4x - x^3) = 0 \Rightarrow (x)(4 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ق ق} \\ x = 2 \\ x = -2 \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$S_{\text{max}} = 3 \times 2 \times \sqrt{8-2^2} = 3 \times 2 \times 2 = 12$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

برای این که این تابع صعودی باشد، باید $f'(x) > 0$ باشد، داریم:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow 1 > \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow |x| > 1 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1 \quad (I)$$

برای این که این تابع دارای تقعر رو به پایین باشد، باید $f''(x) < 0$ باشد، داریم:

$$\frac{2}{x^3} < 0 \Rightarrow x^3 < 0 \Rightarrow x < 0 \quad (II)$$

با توجه به اشتراک مجموعه‌های (I) و (II)، می‌توان گفت که تابع f در بازه $(-\infty, -1)$ دارای تقعر رو به پایین بوده و صعودی است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3}$ به راحتی به دست می‌آید و داریم برای محاسبه‌ی $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ابتدا

ضابطه‌ی تابع را کمی تغییر می‌دهیم:

$$f(x) = \frac{\cos^3 x}{1 + \sin^3 x} = \frac{-\sin^3 x + 1}{\sin^3 x + 1}$$

مشتق توابع به فرم $f(x) = \frac{au+b}{cu+d}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \frac{au+b}{cu+d} \Rightarrow f'(x) = \frac{ad-bc}{(cu+d)^2} u'$$

$$f(x) = \frac{-\sin^3 x + 1}{\sin^3 x + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-1 \times 1) - (1 \times 1)}{(\sin^3 x + 1)^2} \times 3 \sin^2 x \cos x = \frac{-3 \sin^2 x \cos x}{(\sin^3 x + 1)^2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-3 \sin^2 \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}}{\left(\left(\sin^3 \frac{\pi}{4}\right) + 1\right)^2} = \frac{-3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + 1\right)^2} = \frac{-3}{\frac{9}{4}} = \frac{-4}{3}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3} - 3 \times \frac{-4}{3} = \frac{1}{3} + \frac{4}{1} = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$$

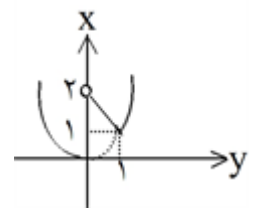
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه‌ی هم‌ارزی $1 - \cos^k u \approx \frac{k}{2} u^2$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x - 1} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-2}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 - x}{x^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای بررسی نقاط اکسترمم نسبی و مطلق تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 1 \\ -x + 2 & ; 0 < x < 1 \\ x^2 & ; x \leq 0 \end{cases}$

از نمودار بهره می‌گیریم:

همان‌طور که در شکل مقابل مشاهده می‌کنید این تابع ماکزیمم نسبی و مطلق ندارد اما در $x = 1$ و $x = 0$ دارای مینیمم نسبی و در $x = 0$ دارای مینیمم مطلق می‌باشد.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{3x-1}{x+1} \Rightarrow \begin{cases} \text{مجانِب قائم } x = -1 \\ \text{مجانِب افقی } x = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{نقطه تلاقی}} (-1, 3)$$

با جای‌گذاری مختصات نقطه‌ی تلاقی مجانب‌ها در تک‌تک گزینه‌ها، مشخص می‌شود که $(-1, 3)$ تنها در خط $y = 9x + 12$ صدق می‌کند.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون خط مماس بر تابع $y = x^3 + 3x$ در نقطه‌ی تماس بر خط $x + 6y = 1$ با

$y = \frac{-1}{6}x + \frac{1}{6}$ (با شیبی برابر $-\frac{1}{6}$) عمود است، در نتیجه شیب خط مماس یا همان مشتق تابع در این نقطه برابر با

عکس قرینه‌ی شیب این خط، یعنی برابر با ۶ می‌باشد. داریم:

$$y = x^3 + 3x \Rightarrow y' = 3x^2 + 3 \xrightarrow{m_{\text{مماس}} = y' = 6} 3x^2 + 3 = 6 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

برای تعیین مختصات نقطه‌ی تماس، مقادیر به‌دست آمده برای x را در تابع جای‌گذاری می‌کنیم تا مقدار y آن مشخص شود. داریم:

$$\begin{cases} x = 1 \xrightarrow{\text{جای گذاری در تابع}} y = 1^3 + 3(1) = 4 \Rightarrow \text{نقطه ی تماس : } (1, 4) \\ x = -1 \xrightarrow{\text{جای گذاری در تابع}} y = (-1)^3 + 3(-1) = -4 \Rightarrow \text{نقطه ی تماس : } (-1, -4) \Rightarrow \text{گزینه ی (۲)} \end{cases}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تقعر منحنی به معادله‌ی $y = x^2 + \sqrt{x}$ در بازه‌ای روبه پایین است که علامت مشتق دوم

تابع (یعنی y'') در آن بازه، منفی باشد. داریم:

$$y = x^2 + \sqrt{x} = x^2 + x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = 2x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y'' = 2 - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = 2 - \frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$\frac{4\sqrt{x^3} - 1}{4\sqrt{x^3}} \rightarrow \text{ریشه ی صورت : } x = \frac{1}{4}$$

$$\frac{4\sqrt{x^3}}{4\sqrt{x^3}} \rightarrow \text{ریشه ی مخرج : } x = 0$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید جواب درست بازه‌ی $(0, \frac{1}{4})$ است:

x	۰	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
y''		-	+
y		↓	↑

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم منحنی به معادله‌ی $y = \frac{x^2 + 3x}{ax^2 + 4x - 1}$ ($a \neq 0$) فقط دو خط مجانب دارد. چون این

تابع قطعاً دارای یک مجانب افقی به معادله‌ی $y = \frac{1}{a}$ است و مجانب مایل هم ندارد، لذا تابع فوق باید تنها دارای یک

خط مجانب قائم باشد. برای این‌که تابع دارای یک خط مجانب قائم باشد یکی از شرایط ممکن این است که مخرج آن

دارای یک ریشه‌ی مضاعف باشد. برای این منظور باید Δ ی مخرج، صفر باشد:

$$\Delta = 0 \Rightarrow 16 - 4a(-1) = 0 \Rightarrow 16 + 4a = 0 \Rightarrow a = -4$$

حال مجانب‌های قائم و افقی تابع و سپس نقطه‌ی تلاقی این مجانب‌ها را مشخص می‌کنیم:

$$\xrightarrow{a=-4} y = \frac{x^2 + 3x}{-4x^2 + 4x - 1} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} y = -\frac{1}{4} \Rightarrow \text{مجانب افقی : } y = -\frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{مجانب قائم : } -4x^2 + 4x - 1 = 0 \Rightarrow -(2x - 1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{محل تلاقی مجانب ها}} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right)$$

توجه: جواب دیگر این مسأله، نقطه‌ی $\left(\frac{3}{13}, \frac{9}{13} \right)$ است که به ازای $a = \frac{13}{9}$ رخ می‌دهد.



گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا معادله‌ی خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی $x = 1$ را نوشته و سپس معادله‌ی تلاقی این خط و منحنی را تشکیل داده وصل می‌کنیم.

$$y = x^3 - x^2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 2x$$

$$x_{\text{تماس}} = 1 \Rightarrow y_{\text{تماس}} = 1^3 - 1^2 = 0 \Rightarrow \text{نقطه ی تماس } (1, 0)$$

$$m_{\text{مماس}} = y'(1) = 3(1)^2 - 2(1) = 1 \xrightarrow{\text{معادله ی خط مماس}} y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1$$

$$\begin{cases} y = x^3 - x^2 & \text{معادله ی تقاطع} \\ y = x - 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{معادله ی تقاطع}} x^3 - x^2 = x - 1 \Rightarrow x^3 - x^2 - x + 1 =$$

$$x^2(x - 1) - (x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1)^2(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{طول نقطه تماس } x = 1 \\ x_A = -1 \Rightarrow y_A = (-1)^3 - (-1)^2 = -1 - 1 = -2 \Rightarrow A(-1, -2) \end{cases}$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ۲۳۸

$$x + \Delta x \text{ تا } x \text{ آهنگ متوسط تغییر از } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \xrightarrow{x=3, \Delta x=0.1} \frac{f(3.1) - f(3)}{0.1} =$$

$$\frac{(3.1)^3 - 3^3}{0.1} = \frac{29.791 - 27}{0.1} = 27.91$$

$$(x = 3) \text{ آهنگ لحظه ای} = 27.91 - 27 = 0.91 \Rightarrow \text{آهنگ متوسط} = f'(3) = 3(3)^2 = 27$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. در بازه‌ای تعقر منحنی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^{\frac{6}{5}} - 12x^{\frac{1}{5}}$ روبه پایین است که علامت ۲۳۹

مشتق دوم منفی باشد. داریم:

$$f(x) = x^{\frac{6}{5}} - 12x^{\frac{1}{5}} \Rightarrow f'' = \frac{6}{25}x^{-\frac{4}{5}} + \frac{24}{25}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{6}{25}x^{-\frac{4}{5}}(x + 4) = \frac{6(x + 4)}{25\sqrt[5]{x^4}} \rightarrow \text{ریشه ی صورت } x = -4$$

$$\rightarrow \text{ریشه ی مخرج } x = 0$$

x	$-\infty$	-4	0	$+\infty$
f''	+	-	+	+
f	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	

گزینه ی (۲) پاسخ صحیح است $\Rightarrow$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای تعیین طول نقاط بحرانی تابع f ، ابتدا از ضابطه‌ی تابع مشتق می‌گیریم و هر نقطه از تابع را که f' در آنجا صفر یا نامتناهی باشد یا وجود نداشته باشد، نقطه‌ی بحرانی محسوب می‌کنیم، داریم:

$$f(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 + 4)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3x^2 - 6x) =$$

$$\frac{3x^2 - 6x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 4)^2}} = \frac{x^2 - 2x}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 4)^2}}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \in (-1, 2) \\ x = 2 \notin (-1, 2) \end{cases} \\ x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x+1) \times (x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow (x+1)(x-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \notin (-1, 2) \\ x = 2 \notin (-1, 2) \end{cases} \end{cases}$$

تنها $x = 0$ طول نقطه‌ی بحرانی تابع f در بازه‌ی $(-1, 2)$ است. برای تعیین وضعیت تابع در $x = 0$ کافی است به این نکته دقت کنیم که این نقطه ریشه‌ی ساده‌ی مشتق بوده و علامت مشتق در دو طرف آن تغییر می‌کند. در نتیجه $x = 0$ طول اکسترمم نسبی تابع f است. برای تشخیص ماکزیمم و مینیمم نسبی به سراغ رسم جدول تغییرات و آزمون مشتق اول می‌رویم:

x	-1	0	2
f'	+	○	-
f		↗ ↘	

Max نسبی

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. تابع $f(x) = x|\sin \pi x|$ در نقطه‌ی $x = 1$ پیوسته است. برای محاسبه‌ی $f'(1^+)$ ، کافی است ابتدا در همسایگی راست $x = 1$ علامت عبارت داخل قدرمطلق را مشخص کرده و قدرمطلق را برداریم، سپس از ضابطه‌ی حاصل مشتق گرفته و $x = 1$ را جای‌گذاری کنیم،

$$f(x) = x|\sin \pi x| \Rightarrow f'(1^+) = (x \underbrace{|\sin \pi x|}_{\text{منفی}})' = (-x \cdot \sin(\pi x)) = (-1) \cdot \sin \pi x + \pi \cos \pi x \cdot (-x)$$

$$\xrightarrow{x=1} -\sin \pi + \pi \cos \pi \cdot (-1) = 0 + \pi = \pi$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. طول نقطه‌ی عطف تابع درجه سوم $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، برابر با $x_I = \frac{-b}{3a}$ است. با توجه به این موضوع، مختصات نقطه‌ی عطف تابع $y = x^3 - 3x^2 + 4$ برابر است با:

$$x_I = -\frac{b}{3a} = \frac{-(-3)}{3(1)} = 1 \Rightarrow y_I = 1^3 - 3(1)^2 + 4 = 2 \Rightarrow I(1, 2)$$

(البته می‌توانستیم طول نقطه‌ی عطف را از $f''(x) = 0$ نیز به دست آوریم: $x_I = 1$)

حال برای نوشتن معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی عطف این تابع، ابتدا از ضابطه‌ی تابع مشتق گرفته و با جای‌گذاری $x_I = 1$ ، شیب خط مماس در این نقطه را به دست آورده و با داشتن شیب مماس و مختصات نقطه‌ی تماس (نقطه‌ی عطف)، معادله‌ی خط مماس را می‌نویسیم:

$$y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow m_{\text{مماس}} = y'(1) = -3 \xrightarrow{\text{معادله‌ی مماس}} y - 2 = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 5$$

در آخر برای تعیین طول از مبدأ خط مماس، به جای y صفر قرار داده و داریم:

$$\xrightarrow{y=0} 0 = -3x + 5 \Rightarrow \text{طول از مبدأ خط مماس} : x = \frac{5}{3}$$



۲۴۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای تعیین مقدار مشتق عبارت $\sin x \cos 3x$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ ، کافی است شکل کلی این عبارت را مشخص کنیم. شکل کلی این عبارت به صورت حاصل ضرب دو تابع است. پس طبق قاعده‌ی مشتق ضرب دو تابع، می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} (\sin x \cdot \cos 3x)' &= u'v + v'u = \cos x \cdot \cos 3x + (-3\sin 3x) \cdot \sin x \quad x = \frac{\pi}{4} \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2 \end{aligned}$$

۲۴۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای رفع ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ ، دارای ابهام $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9x}}{3x + \sqrt{x}}$ کرده و سپس با توجه به درجه‌ی جمله‌ی پرتوان صورت و مخرج، جواب حد را مشخص کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9x}}{3x + \sqrt{x}} &\quad (\text{پرتوان}) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2}}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2|x|}{3x} \\ x > 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2x}{3x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{3x} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

۲۴۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای تعیین طول‌های نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 4x^2$ ، کافی است ابتدا از ضابطه‌ی تابع مشتق گرفته و سپس ریشه‌های ساده‌ی مشتق را مشخص کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 4x = 3x(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 & \text{ریشه ی ساده} \\ x = 1 & \text{ریشه ی ساده} \\ x = -2 & \text{ریشه ی ساده} \end{cases} \Rightarrow \text{تابع شامل اکسترمم نسبی است}$$

حال با استفاده از جدول تغییرات تابع (آزمون مشتق اول) طول ماکزیمم نسبی این تابع به دست می‌آید.

X	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
f'(x)	-	+	-	+	
f(x)		min نسبی	max نسبی	min نسبی	

$\Rightarrow x = 0$ طول نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع f است

۲۴۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. منحنی‌های توابع با ضابطه‌ی $f(x) = -x^2 + bx + 3$ برخط به معادله‌ی $y = 7$ مماس‌اند، پس معادله‌ی تقاطع خط با منحنی‌ها، ریشه‌ی مضاعف دارد. داریم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(x) = -x^2 + bx + 3 \\ y = 7 \end{cases} &\xrightarrow{\text{معادله ی تقاطع}} -x^2 + bx + 3 = 7 \Rightarrow \\ x^2 - bx + 4 = 0 &\xrightarrow{\text{ریشه ی مضاعف}} \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 16 = 0 \Rightarrow b = \pm 4 \end{aligned}$$

حال با جای‌گذاری مقادیر به دست آمده برای b در معادله‌ی تقاطع، مختصات نقاط تماس خط با منحنی‌ها را مشخص کرده و فاصله‌ی آن‌ها را محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$\begin{aligned} b = 4 &\xrightarrow{\text{معادله ی تقاطع}} x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x_{\text{تماس}} = 2 \Rightarrow \\ b = -4 &\xrightarrow{\text{معادله ی تقاطع}} x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x_{\text{تماس}} = -2 \Rightarrow \\ y = 7 &\xrightarrow{\text{نقطه ی تماس}} A(2, 7) \\ &\Rightarrow AB = |x_A - x_B| = 4 \\ y = 7 &\xrightarrow{\text{نقطه ی تماس}} B(-2, 7) \end{aligned}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای نوشتن معادله‌ی خط قائم برمنحنی به معادله‌ی $y = \frac{1}{\sqrt{x}} + x$ ، در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن، ابتدا مختصات پای قائم را تکمیل می‌کنیم. سپس مقدار مشتق تابع را در $x = 1$ محاسبه کرده و عکس و قرینه می‌کنیم تا شیب خط قائم در این نقطه مشخص شود. داریم:

$$x = 1 \xrightarrow{\text{صدق در تابع}} y = 1 + 1 = 2 \xrightarrow{\text{پای قائم}} A(1, 2)$$

$$y' = \frac{(\sqrt{x})^{-1} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(1)}{(\sqrt{x})^2} + 1 \Rightarrow y' = \frac{-1}{2x\sqrt{x}} + 1 \Rightarrow y'(1) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$m_{\text{قائم}} = -\frac{1}{m_{\text{مماس}}} = -\frac{1}{y'(1)} = -2 \xrightarrow{\text{معادله‌ی خط قائم}} y - 2 = -2(x - 1) \Rightarrow$$

$$y = -2x + 4 \Rightarrow y + 2x = 4$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = -x^2 + ax^2 + bx \Rightarrow f'(x) = -2x^2 + 2ax + b$$

با توجه به نمودار می‌دانیم شیب خط مماس برمنحنی تابع f در نقطه به طول صفر، عددی منفی است. بنابراین:

$$f'(\cdot) = -2(\cdot)^2 + 2a(\cdot) + b = b \xrightarrow{m=f'(\cdot) < 0} b < 0.$$

همین‌جا معلوم می‌شود که گزینه‌ی (۲) پاسخ تست است. اما برای این که راه‌حل را کامل کنیم، a را نیز می‌یابیم. از روی نمودار مشخص است که نقطه به طول صفر، نقطه‌ی عطف منحنی تابع درجه سوم f است. بنابراین:

$$f''(x) = -4x + 2a \Rightarrow f''(\cdot) = 2a \xrightarrow{f''(\cdot) = 0} 2a = 0 \Rightarrow a = 0.$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{\sqrt{r}}{\pi} \sqrt{r + 2 \cos \frac{\pi}{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{r}}{\pi} \cdot \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{r}}{\pi} \cdot \frac{\left(-\frac{\pi}{x^2}\right) \left(-2 \sin \frac{\pi}{x}\right)}{2\sqrt{r + 2 \cos \frac{\pi}{x}}}$$

$$\Rightarrow f'(r) = \frac{\sqrt{r} \sin \frac{\pi}{r}}{9\sqrt{r + 2 \cos \frac{\pi}{r}}} = \frac{\sqrt{r} \left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right)}{9\sqrt{4}} = \frac{r}{36} = \frac{1}{12}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از شکل به این نتیجه می‌رسیم که در تابع درجه سوم $y = ax^3 + bx^2 - 16$ اولاً: طول نقاط

اکسترمم برابر با $x = 0$ و $x = 4$ می‌باشد، لذا $x = 0$ و $x = 4$ ریشه‌های ساده‌ی y' محسوب می‌شوند. بنابراین:

$$y' = 3ax^2 + 2bx \xrightarrow{x=4} y'(4) = 48a + 8b = 0 \xrightarrow{\div 8} 6a + b = 0 \quad (1)$$

ثانیاً: نقطه‌ی $(4, 0)$ نقطه‌ای از این منحنی بوده و مختصات آن در ضابطه‌ی تابع صدق می‌کند. بنابراین:

$$y = ax^3 + bx^2 - 16 \xrightarrow{(4,0) \text{ را صدق می‌دهیم}} 64a + 16b - 16 = 0 \xrightarrow{\div 16} 4a + b = 1 \quad (2)$$

حال از حل دستگاه دو معادله دو مجهول حاصل از دو معادله‌ی (۱) و (۲)، مقدار a به دست می‌آید:

$$\xrightarrow{(1) \ominus (2)} \begin{cases} 6a + b = 0 \\ 4a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

۲۵۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$ با توجه به تعریف مشتق، برابر با $f'(-1)$ است. پس

برای تعیین حاصل این حد، از تابع f مشتق گرفته و در ضابطه‌ی مشتق $x = -1$ را جایگذاری می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = (x-2) \cdot \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f'(x) = (1) \cdot \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \cdot (x-2) \Rightarrow$$

$$f'(-1) = (1) \cdot \sqrt[3]{(-1)^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{(-1)}} \cdot (-1-2) = 1+2=3$$

۲۵۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا مختصات نقاط ماکسیمم نسبی و عطف را می‌یابیم:

$$y' = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
y'	-	+	-	+	-
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Max نسبی $\Rightarrow A(0,5)$

$$y'' = 12x^2 - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \xrightarrow{\text{عطف}} I_1(1,0) \\ x = -1 \xrightarrow{\text{عطف}} I_2(-1,0) \end{cases}$$

حال فاصله‌ی نقطه‌ی ماکسیمم نسبی و هر یک از نقاط عطف منحنی، برابر است با:

$$\text{فاصله ی نقطه ی ماکسیمم نسبی و یک نقطه ی عطف} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

۲۵۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی $M(x, y)$ بر روی منحنی به معادله‌ی $y = \sqrt{x+8}$ در حرکت است و T فاصله‌ی

نقطه‌ی M تا مبدا مختصات است. پس داریم:

$$T = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{x^2 + x + 8} \Rightarrow T' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+8}}$$

با توجه به این‌که آهنگ لحظه‌ای تغییر T به ازای واحد تغییر x در نقطه‌ی $x=7$ ، برابر با مشتق تابع T در این نقطه

است، می‌نویسیم:

$$(x=7) \text{ آهنگ لحظه ای تغییر در } T'(7) = \frac{2(7)+1}{2\sqrt{7^2+7+8}} = \frac{15}{2\sqrt{64}} = \frac{15}{16}$$

۲۵۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باید معادله‌ی خط قائم را بنویسیم که برای این منظور ابتدا مختصات پای قائم را تکمیل

کرده و سپس شیب خط قائم را می‌یابیم:

$$y = \frac{2x-1}{x+1} \xrightarrow{y=0} 0 = \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{پای قائم} \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$y' = \frac{2x+2}{(x+1)^2} \Rightarrow y' \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{4}{3} \Rightarrow m_{\text{قائم}} = -\frac{1}{m_{\text{مماس}}} = -\frac{1}{y' \left(\frac{1}{2}\right)} = -\frac{3}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله ی خط قائم}} y - 0 = -\frac{3}{4} \left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{8} \xrightarrow{x=0} y = \frac{3}{8} \Rightarrow \text{عرض از مبدا خط قائم} = \frac{3}{8}$$

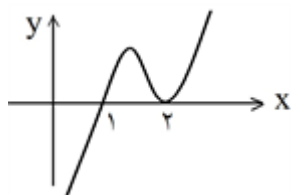
$$f(x) = (x-1)^v(x-2)^{\wedge} \rightarrow f'(x) = v(x-1)^{v-1}(x-2)^{\wedge} + \wedge(x-2)^{v-1}(x-1)^v$$

x	$-\infty$	1	$\frac{22}{15}$	2	$+\infty$
y'		+	+	-	+
y			max	min	

$$\rightarrow f'(x) = (x-1)^v(x-2)^v(vx-1\wedge + \wedge x - \wedge) = (x-1)^v(x-2)^v(15x-22)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=\frac{22}{15} \end{cases}$$

روش دوم: تابع در اطراف $x=2$ تغییر علامت نمی‌دهد چون ریشه‌ی مرتبه‌ی زوج است، واضح است که در اطراف $x=2$ مقدار تابع مثبت است پس $x=2$ طول می‌نیم نسبتی تابع است. از طرفی در طرف راست $x=1$ مقدار تابع مثبت و در طرف چپ آن مقدار تابع منفی است. پس مقدار تابع به شکل مقابل است و همان‌طور که دیده می‌شود، این تابع یک



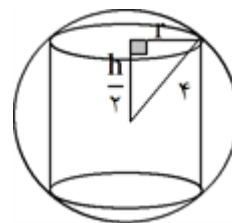
ماکزیمم نسبی و یک می‌نیمم نسبی دارد.

$$\frac{h^r}{r} + r^r = 16 \rightarrow r^r = 16 - \frac{h^r}{r}$$

$$V = \pi r^r h = \pi \left(16 - \frac{h^r}{r}\right) h \rightarrow V = \pi \left(16h - \frac{h^r}{r}\right)$$

$$\rightarrow V' = \pi \left(16 - \frac{r}{r} h^r\right) \xrightarrow{V'=0} h^r = 16 \times \frac{r}{r} = \frac{64}{r} \rightarrow h = \frac{\wedge}{\sqrt{r}}$$

$$V_{\max} = \pi \left(16 - \frac{h^r}{r}\right) h = \pi \left(16 - \frac{16}{r}\right) \times \frac{\wedge}{\sqrt{r}} = \frac{256\pi}{r\sqrt{r}}$$



$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^v \times x^{\frac{1}{r}}} = \sqrt{x^{\frac{v}{r}}} \rightarrow f(x) = x^{\frac{v}{2r}} \\ g(x) &= \frac{1}{x \times x^{\frac{1}{r}}} = \frac{1}{x^{\frac{r}{r} + \frac{1}{r}}} \rightarrow g(x) = x^{-\frac{r+1}{r}} \end{aligned} \right\} \rightarrow f(x) \cdot g(x) = x^{\frac{v}{2r}} \times x^{-\frac{r+1}{r}} = x^{\frac{v}{2r} - \frac{r+1}{r}} = x^{\frac{v-r-2}{2r}}$$

$$\rightarrow (fg)'(x) = \frac{v-r-2}{2r} x^{\frac{v-r-2}{2r}-1} \rightarrow (fg)'(1) = \frac{v-r-2}{2r}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با میل کردن x به سمت $+\infty$ ، مقدار کسر داده شده به سمت مقدار مبهم زیر میل خواهد کرد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} - \sqrt{4x+12}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x} - \sqrt{4x+12}} = \frac{+\infty + \infty - \infty}{+\infty + \infty - \infty} = \frac{\infty - \infty}{\infty - \infty} \text{ مبهم}$$

لذا جهت رفع ابهام با در نظر گرفتن این که $x > 0$ (چون $x \rightarrow +\infty$)، صورت و مخرج کسر را در عامل $\sqrt{x}$ ضرب

می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+2x} - \sqrt{4x^2+12x}}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2} - \sqrt{4x^2+12x}} \xrightarrow[\text{رادیکالی در بی نهایت}]{\text{استفاده از هم ارزی}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right) + (x+1) - 2\left(x + \frac{12}{2x}\right)}{\left(x + \frac{2}{2}\right) + (x) - 2\left(x + \frac{12}{2x}\right)} = \frac{-\frac{2}{2}}{-2} = \frac{2}{4}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. توابع به فرم کلی $y = (x - x_0)^n g(x)$ (به شرط آن که $g(x)$ در $x = x_0$ پیوسته و $g(x) \neq 0$ و $n \in \mathbb{N}$ باشد) در $x = x_0$ دارای اکستریم نسبی مشتق‌پذیر ($y' = 0$) می‌باشند، تشخیص نوع اکستریم (max

نسبی یا min نسبی) با توجه به علامت $g(x_0)$ با دستورهای زیر صورت می‌گیرد:

الف) اگر $g(x_0) > 0$ باشد، آن‌گاه نقطه به طول $x = x_0$ می‌نیمم نسبی تابع است.

ب) اگر $g(x_0) < 0$ باشد، آن‌گاه نقطه به طول $x = x_0$ ماکزیمم نسبی تابع است.

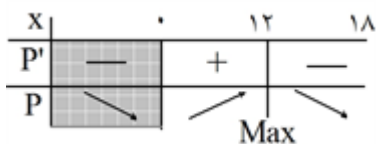
با توجه به نکته‌ی فوق نتیجه می‌گیریم که نقطه به طول $x = 1$ برای تابع $y = (x-1)^4 \underbrace{(x+2)^2}_{g(x)}$ نقطه‌ی Min

نسبی می‌باشد (توجه کنید که $g(1) = (1+2)^2 = 27 > 0$) بنابراین تابع $y+7$ که انتقال یافته‌ی تابع فوق می‌باشد نیز در $x = 1$ همین وضعیت (می‌نیمم نسبی) را داراست.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$P = x^2 y \xrightarrow{y=18-x} P(x) = x^2(18-x) = 18x^2 - x^3$$

حال از مشتق‌گیری و تعیین نقاط بحرانی، اقدام به محاسبه‌ی بیش‌ترین مقدار P کنیم:



$$P'(x) = 36x - 3x^2 \xrightarrow{P'=0} 3x(12-x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 12 \end{cases}$$

این تابع در $x = 12$ به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد و مقدار این ماکزیمم برابر است با:

$$\xrightarrow{x=12} P_{\max} = (12)^2(18-12) = 144 \times 6 = 864$$

روش دوم: هرگاه مجموع دو عامل مثبت، مقداری ثابت باشد، آن‌گاه بیشترین مقدار حاصل ضرب توان‌های مختلف آن‌ها به شرطی حاصل می‌شود که مقدار ثابت، بین آن‌دو متغیر به نسبت توان‌هایشان توزیع شود، به زبان ریاضی داریم:

$$\text{باید } \frac{u}{\alpha} = \frac{v}{\beta} \text{ باشد } \xrightarrow[\text{ماکزیمم شود}]{\text{برای آن که } u^\alpha v^\beta} u + v = k \text{ (if } u, v > 0)$$

در نتیجه با آگاهی از قضیه‌ی فوق خواهیم داشت:

$$x > 0, y > 0, x + y = 18 \xrightarrow[\text{ماکزیمم شود } x^2 y]{\text{برای آن که عبارت}} \frac{x}{2} = \frac{y}{1} \rightarrow x = 2y \xrightarrow{x+y=18}$$

$$2y + y = 18 \rightarrow y = 6, x = 12 \rightarrow \text{Max}(x^2 y) = 12^2 \times 6 = 864$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+4x} + \sqrt{x^2+9x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + \frac{4}{2} + \left(x + \frac{9}{2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 2 + x + 3) = 1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $x = 1$ ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی سوم کسر اول و ریشه‌ی ساده‌ی کسر دوم می‌باشد. پس مشتق اول برای کسر اول به ازای $x = 1$ صفر خواهد شد (چون $x = 1$ ریشه‌ی مکرر است). برای مشتق‌گیری از کسر دوم کافی است فقط از عوامل $x - 1$ مشتق‌گرفته و در مقدار مابقی تابع به ازای $x = 1$ ضرب کنیم، داریم:

$$y = \frac{(x-1)^3}{x^2 + x + 1} + \frac{(x-1)(x+1)}{(x+\sqrt{x})} \rightarrow f'(1) = 0 + (1) \times \left(\frac{1+1}{1+1} \right) = 1$$

مشتق از عامل $x - 1$

مشتق اول این کسر به ازای $x = 1$ حاصل به ازای $x = 1$

مشتق اول این کسر به ازای $x = 1$ صفر می‌شود

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ریشه‌های ساده‌ی درون قدرمطلق یعنی نقاط $x = 1$ و $x = -1$ بحرانی‌اند. حال به جستجوی سایر نقاط بحرانی می‌پردازیم:

$$f(x) = \begin{cases} x(x^2 - 1) & ; x^2 \geq 1 \\ x(-x^2 + 1) & ; x^2 < 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 - x & ; x^2 \geq 1 \\ -x^3 + x & ; x^2 < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f_1(x) = x^3 - x \Rightarrow f'_1(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \\ f_2(x) = -x^3 + x \Rightarrow f'_2(x) = -3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

پس نقاط $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ و $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ نیز نقاط بحرانی تابع هستند. بنابراین این تابع در مجموع ۴ نقطه‌ی بحرانی در بازه‌ی $(-2, 2)$ دارد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا gof را تشکیل می‌دهیم:

$$\text{gof}(x) = g(f(x)) = g(\cos x) = \sin(\pi \cos x)$$

در نقطه‌ی تلاقی gof با محور x مقدار $\text{gof}(x)$ صفر می‌شود، پس داریم:

$$\text{gof}(x) = 0 \rightarrow \sin(\pi \cos x) = 0 \rightarrow \pi \cos x = k\pi \xrightarrow[-k \in \mathbb{Z}]{-1 \leq \cos x \leq 1}$$

$$\rightarrow \cos x = k \quad ; \quad k = 0, 1, -1$$

اگر $\cos x = 1$ یا $\cos x = -1$ باشد، آن‌گاه معادله در بازه‌ی $(0, \pi)$ جواب ندارد، اما اگر $\cos x = 0$ باشد، آن‌گاه در فاصله‌ی $(0, \pi)$ جواب $x = \frac{\pi}{2}$ می‌شود پس نقطه‌ی تلاقی $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ است.

برای محاسبه‌ی شیب خط مماس کافی است مشتق را در این نقطه محاسبه کنیم:

$$(\text{gof})'(x) = (-\pi \sin x) \cdot \cos(\pi \cos x) \rightarrow (\text{gof})'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi \sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\pi \cos \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -\pi(\cos(0)) = -\pi$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حالت ابهام این حد $\frac{0}{0}$ است.

روش اول: با استفاده از قاعده‌ی هسپیتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x} \xrightarrow{HOP} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{-\sin x}{-\cos x} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{-} = -\infty$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\cos x(1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\cos x(1 + \sin x)}{\cos^2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{2}{-} = -\infty \end{aligned}$$

روش سوم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{-\sqrt{1 - \sin^2 x}}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{-\sqrt{1 - \sin x} \times \sqrt{1 + \sin x}}{\sqrt{1 - \sin x} \times \sqrt{1 - \sin x}} = \\ \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{-\sqrt{1 + \sin x}}{\sqrt{1 - \sin x}} &= \frac{-\sqrt{2}}{+} = -\infty \end{aligned}$$

(دقت کنید که وقتی $x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+$ ، آن‌گاه $\cos x < 0$ و در نتیجه $\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x}$).

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. با دقت در جدول تعیین علامت y'' درمی‌یابیم بازه‌ی مورد نظر، بازه‌ی (۱, ۳) می‌باشد که

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
y''	+		-		+
y	∪	∩	∪	∩	∪

طول آن $b - a = 3 - 1 = 2$ است.

$$y = \begin{cases} x^3 - 3x^2; & x \geq 3 \\ 3x^2 - x^3; & x < 3 \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} 3x^2 - 6x; & x > 3 \\ 6x - 3x^2; & x < 3 \end{cases} \rightarrow y'' = \begin{cases} 6x - 6; & x > 3 \\ 6 - 6x; & x < 3 \end{cases}$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که تابع داده شده مجموع دو تابع $y_1 = [x]$ و $y_2 = \left[x + \frac{1}{3}\right]$ می‌باشد، ابتدا

نقاط مشتق‌ناپذیر دو تابع اخیر را در بازه‌ی (۰, ۳) مشخص می‌کنیم. با توجه به ساختار توابع y_1 و y_2 ، نقاط ناپیوستگی این دو تابع، همان نقاط مشتق‌ناپذیرشان هم هست:

$$y_1 = [x] \Rightarrow k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in (0, 3)} x = 1, 2 \text{ در آن‌ها پیوسته است}$$

$$y_2 = \left[x + \frac{1}{3}\right] \Rightarrow x + \frac{1}{3} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = k - \frac{1}{3} \xrightarrow{x \in (0, 3)} x = \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}$$

y_2 در این سه نقطه ناپیوسته ولی y_1 در آن‌ها پیوسته است. در هر یک از نقاط به طول ۱, ۲, ۳, ۵, ۸ یکی از دو تابع

y_1 و y_2 پیوسته و دیگری ناپیوسته است. بنابراین تابع $f(x) = y_1 + y_2$ در هر یک از این پنج نقطه ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x + \sqrt{2x}}{x-1} \cot \frac{\pi}{x}}{x - 2} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + \sqrt{2x}) \cos \frac{\pi}{x}}{(x-1)(x-2) \sin \frac{\pi}{x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + \sqrt{2x}}{(x-1) \sin \frac{\pi}{x}} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{x-2} = 2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{x-2} \xrightarrow{\text{HOP}} 2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{\pi}{x^2} \sin \frac{\pi}{x}}{1} = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$$

روش دوم: از آنجا که حد مورد نظر سوال، تعریف مشتق تابع f در $x = 2$ می‌باشد، پس کافی است $f'(2)$ را محاسبه کنیم، از طرف دیگر چون $f(2) = 0$ می‌شود یعنی $x = 2$ ریشه‌ی تابع f می‌باشد، کافی است مقدار مشتق عامل صفرشونده در $x = 2$ (یعنی $\cot \frac{\pi}{x}$) را محاسبه کرده و در مقدار مابقی تابع به ازای $x = 2$ ضرب کنیم.

$$\left(\cot \frac{\pi}{x} \right)' = \left(-\frac{\pi}{x^2} \right) \left[- \left(1 + \cot^2 \frac{\pi}{x} \right) \right] = \frac{\pi}{x^2} \left(1 + \cot^2 \frac{\pi}{x} \right)$$

$$f'(2) = \frac{\pi}{(2)^2} \left(1 + \cot^2 \frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{2 + \sqrt{2 \times 2}}{2-1} \right) = \pi$$

بنابراین $f'(2)$ برابر است با:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حد داده شده از نوع مبهم $\infty - \infty$ می‌باشد لذا ابتدا اقدام به مخرج مشترک‌گیری از تابع می‌کنیم، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{x+19}{x^2+3x-4} + \frac{3}{x+4} \right) = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+19+3(x-1)}{(x-1)(x+4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\cancel{4}(x+4)}{(x-1)\cancel{(x+4)}} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{4}{x-1} = \frac{-4}{5}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ریشه‌های ساده‌ی داخل قدر مطلق طول نقاط زاویه‌دار منحنی تابع می‌باشند، پس نقطه‌ی مورد نظر $x = 0$ می‌باشد.

$$f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot+} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot+} \frac{\sqrt{1+|x|} - 1}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot+} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \xrightarrow{\text{برنولی}} \lim_{x \rightarrow \cdot+} \frac{\cancel{1} + \frac{x}{2} - \cancel{1}}{x} = \frac{1}{2}$$

$$f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot-} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot-} \frac{\sqrt{1+|x|} - 1}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot-} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} \xrightarrow{\text{برنولی}} \lim_{x \rightarrow \cdot-} \frac{\cancel{1} - \frac{x}{2} - \cancel{1}}{x} = -\frac{1}{2}$$

در نتیجه مقدار عبارت $f'_+(\alpha) - f'_-(\alpha)$ برابر با $\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) = 1$ می‌باشد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باید معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع در نقطه به طول ۲ واقع بر منحنی را به دست آوریم. ابتدا محاسبه‌ی شیب مماس:

$$y = \frac{x^2}{x-1} \rightarrow y' = \frac{2x(x-1) - (1)(x^2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \xrightarrow{x=2} f'(2) = .$$

با توجه به این‌که شیب خط مماس بر منحنی در نقطه به طول ۲ برابر با صفر به دست آمده، پس خط مماس بر منحنی در این نقطه، خطی افقی می‌باشد که عرض از مبدا آن، همان عرض نقطه‌ی تماس است.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \xrightarrow{x=2} f(2) = \frac{4}{2-1} \rightarrow y = 4$$

عرض نقطه‌ی تماس و معادله‌ی خط مماس:

این مماس افقی، محور l ها را در نقطه‌ای به عرض ۴ قطع می‌کند.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطه‌ی مشتق تابع مرکب، ابتدا از تابع داده شده مشتق می‌گیریم:

$$y = f(x + \sqrt{1+x^2}) \Rightarrow y' = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \cdot f'(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \cdot f'(x + \sqrt{1+x^2}) \quad (*)$$

حال با توجه به این‌که ضابطه‌ی مشتق تابع f در صورت تست داده شده، داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \quad (**)$$

و با جایگذاری $(**)$ در رابطه‌ی $(*)$ داریم:

$$y' = \left(\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right) \times \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا از تابع داده شده مشتق می‌گیریم. داریم:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} \rightarrow y' = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x^2(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^4 - 2x^2 + 2x}{(x^2 + 1)^2} \xrightarrow{y=0}$$

$$\rightarrow x(-x^3 - 2x + 2) = 0$$

حال با توجه به این‌که $x = 0$ ریشه‌ی ساده‌ی مشتق تابع می‌باشد، با استفاده از آزمون مشتق اول به بررسی وضعیت

منحنی تابع در مجاورت این نقطه می‌پردازیم که در نتیجه نقطه‌ی $x = 0$ طول Min نسبی منحنی تابع داده شده

x		
y'	-	+
y	min	

می‌باشد.

روش دوم: اگر $0 < x < 1$ باشد، آن‌گاه $0 < x^2 < 1$ ، یعنی $-1 < x^3 < 0$ و در نتیجه $x^2 + 1 > x^3 + 1 > 0$ است

و اگر $1 < x < 2$ باشد، آن‌گاه $0 < x^2 < 4$ و در نتیجه $x^2 + 1 > x^3 + 1 > 0$ است. بنابراین در اطراف $x = 0$ ،

$x^2 + 1 > x^3 + 1 > 0$ می‌باشد، پس $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} > 1$ یعنی $f(x) > 1$ ، از طرفی $f(0) = \frac{0+1}{0+1} = 1$ ، بنابراین نقطه به طول $x = 0$ می‌نیمم تابع $f(x)$ است و گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطه‌ی هم‌ارزی رادیکال در بی‌نهایت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - |x + 1|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - (x + 1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

روش دوم: صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 2x}} &\times \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{x + \sqrt{x^2 + 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{x^2 - (x^2 + 2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2}}{-2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{-2x} = -1 \end{aligned}$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که در صورت تست قید شده که در یک طرف، رودخانه قرار دارد، پس طناب مورد استفاده فقط سه طرف زمین مستطیلی را پوشش می‌دهد. یعنی طول طناب برابر با محیط مستطیل (به جز طولی که کنار رودخانه قرار دارد) می‌باشد که برابر است با: $L = 2y + x$. از طرفی خود مساله ماکزیم مقدار مساحت را با توجه به محدودیت‌های مساله تعیین کرده است که می‌توان با استفاده از آن، به عدد دسترسی پیدا نمود.

$$S = xy \xrightarrow{x=L-2y} S = y(L - 2y) \Rightarrow S = Ly - 2y^2$$

$$S'_y = L - 2y \xrightarrow{S'_y=0} L - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{L}{2}$$

$$S_{\max} = \frac{L}{2} \left(L - \frac{L}{2} \right) = \frac{L^2}{4} \xrightarrow{S_{\max}=648} \frac{L^2}{4} = 648 \Rightarrow L^2 = 4 \times 648$$

$$\Rightarrow L^2 = 16 \times 324 \Rightarrow L = 4 \times 18 = 72$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x + \cos^5(g(x)) \rightarrow f'(x) = 1 - 5\cos^4(g(x)) \sin(g(x)) g'(x)$$

$$\xrightarrow{x=0} f'(0) = 1 - 5g'(0) \sin(g(0)) \cos^4(g(0))$$

$$\xrightarrow{f'(0)=1} g'(0) \sin(g(0)) \cos^4(g(0)) = 0 \xrightarrow{g(0)=\frac{\pi}{6}} g'(0) \sin \frac{\pi}{6} \cos^4 \frac{\pi}{6} = 0 \rightarrow g'(0) = 0$$

حال برای محاسبه‌ی $f''(0)$ باید از $f'(x)$ مشتق گرفته و $x = 0$ را در آن قرار دهیم. از آن‌جا که در عبارت $g'(x) \cdot 5\cos^4(g(x)) \sin(g(x))$ عامل $g'(x)$ در $x = 0$ عامل صفرشونده است ($g'(0) = 0$)، بنابراین کافی است از $g'(x)$ مشتق گرفته و در بقیه‌ی عبارت ضرب کنیم و در نهایت $x = 0$ را در آن قرار دهیم. داریم:

مشتق عامل صفر شونده

$$f'(x) = 1 - 5\cos^4(g(x)) \sin(g(x)) \cdot g'(x) \rightarrow f''(0) = 0 - 5\cos^4(g(0)) \sin(g(0)) \cdot g''(0)$$

$$\xrightarrow{g(0)=\frac{\pi}{6}} f''(0) = -5\cos^4 \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot g''(0) = -5 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^4 \left(\frac{1}{2} \right) \cdot g''(0)$$

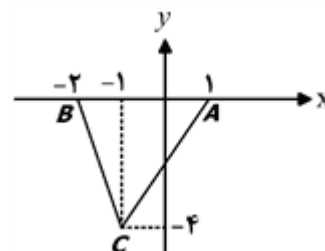
$$\rightarrow f''(0) = \frac{-45}{32} g''(0)$$

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. $x = 1$ و $x = -2$ نقاط بحرانی می‌باشند، برای تعیین نقطه‌ی بحرانی دیگر از تابع مشتق می‌گیریم: (برای تعیین $f' = 0$ می‌توانیم قدرمطلق را برداریم.)

$$f(x) = (x-1)|x-1||x+2| \Rightarrow f(x) = (x-1)^2(x+2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2(x-1)(x+2) + (x-1)^2$$

$$\Rightarrow (x-1)(2x+2) = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow S = \frac{1}{2} (2 \times 2) = 2$$



$$f(x) = x^r + ax^r - \lambda x \Rightarrow f'(x) = rx^{r-1} + rax - \lambda$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۷۸

جوابهای معادله $f'(x) = 0$ ، طول نقاط اکسترمم است.

$$x \in (1, 2) \xrightarrow{\text{بولتزانو}} f'(1) \cdot f'(2) < 0 \Rightarrow (2a - 5)(\lambda a + 2 \cdot 0) < 0 \Rightarrow -5 < a < 2/5$$

$$f'(x) g'(f(x)) = (g(f(x)))'$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۷۹

$$g(f(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = x \Rightarrow (g(f(x)))' = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. معادله خط گذرا از دو نقطه $(1, 2)$ و $(-1, 2)$ برابر است با $y = \frac{-1}{2}x + \frac{5}{2}$ با توجه به ۲۸۰

این که این خط در $x = 3$ بر منحنی f مماس است. پس:

$$\begin{cases} f(3) = y(3) = \frac{-1}{2} \times 3 + \frac{5}{2} = 1 & (1) \\ f'(3) = m = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + 5f(x) - 5}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(f(x) + 5)(f(x) - 1)}{-(x - 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 1}{x - 3} \times \lim_{x \rightarrow 3} -(f(x) + 5)$$

$$= f'(3) \times (-f(3) - 5) \stackrel{(1)}{\rightarrow} -\frac{1}{2} \times (-1 - 5) = 3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون مشتق در $x = 1$ وجود دارد پس تابع پیوسته است و $f'_-(1) = f'_+(1)$ ۲۸۱

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x - \frac{1}{x}\right) = 0 \quad (1)$$

شرط پیوستگی:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^r + ax + b) = a + b + 1 \stackrel{(1)}{\rightarrow} a + b + 1 = 0$$

$$\Rightarrow a + b = -1 \quad (2)$$

شرط $f'_-(1) = f'_+(1)$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x^r} & x > 1 \\ rx + a & x < 1 \end{cases} \Rightarrow 1 + 1 = 2 + a \Rightarrow a = 0 \stackrel{(2)}{\rightarrow} b = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ x^r - 1 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2})^r - 1$$

$$= 1 - 2\sqrt{2} + 2 - 1 = 2 - 2\sqrt{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۸۲

$$y = (x + 3)\sqrt{x} \xrightarrow{x \geq 0} y = x^{\frac{r}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{r}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{r}{4}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{r}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) \Rightarrow y'' = \frac{r}{4}\left(\frac{x-1}{x\sqrt{x}}\right) < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۸۳

$$y = \frac{1}{x^2} \Rightarrow y' = -\frac{2}{x^3} \Rightarrow y' = -\frac{2}{x^3} \Rightarrow y' = -\frac{2}{x^3}$$

$$x(x^2 - 2x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \\ x = -1 \Rightarrow f(-1) = -\frac{2}{1} \\ x = 2 \Rightarrow f(2) = -\frac{2}{4} \Rightarrow \min \end{cases}$$

باید توجه داشت که تابع در دو سر دامنه $(\pm\infty)$ به سمت $+\infty$ می‌رود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $[2^-] = 1$ ۲۸۴

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{2(1)}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x(x-2)} - \frac{2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2-2x}{x(x-2)} \\ = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{x} = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۸۵

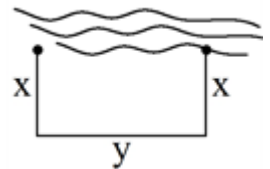
$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow b+1 = 1+a \cos \pi \Rightarrow b = -a$$

$$f'(x) = \begin{cases} -a\pi \sin \pi x & x > 1 \\ 2bx+1 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow -a\pi \sin \pi x = 2b+1 \Rightarrow 2b+1 = 0$$

$$\Rightarrow b = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۸۶

$$\left. \begin{aligned} S &= xy \\ 2x+y &= 18 \Rightarrow y = 18-2x \end{aligned} \right\} S = x(18-2x) \Rightarrow S = -2x^2 + 18x \\ x_{\text{راس}} = \frac{-18}{-4} = 4.5 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow S = 4.5 \times 9 = 40.5$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۸۷

$$f(x) = x+1+(g(x))^2 \Rightarrow f'(x) = 1+2(g(x))g'(x) \Rightarrow f'(\cdot) = 1+2(g(1))g'(\cdot)$$

$$\Rightarrow 1 = 1+2g'(\cdot) \Rightarrow g'(\cdot) = 0$$

$$f''(x) = 2(g(x))g'(x) + 2(g(x))g''(x) \Rightarrow f''(\cdot) = 0+2g''(\cdot)$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۸۸

$$y' = x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow -1 < x < 3 \\ y'' = 2x - 2 > 0 \Rightarrow x > 1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۸۹

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} \right) \left(2 \tan \frac{1}{x} \right) \left(1 + \tan^2 \left(\frac{1}{x} \right) \right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 + \tan^2 \left(\frac{1}{x} \right)}} \\ \Rightarrow f' \left(\frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\pi^2}{9} (2\sqrt{2}) \left(\frac{1}{2} \right) = -\frac{\pi^2 \sqrt{2}}{9}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۹۰

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{r}{r} \Rightarrow n = r, \frac{a}{r} = \frac{r}{r} \Rightarrow a = r \Rightarrow f(x) = \frac{rx^r - rx + 1}{rx^r + x} \Rightarrow f(-1) = \frac{r + r + 1}{r - 1} = \frac{r}{r} = r$$

$$f(x) = \frac{(r-x)^r}{x}$$

$$D_f = R - \{0\}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۹۱

برای تعیین طول نقطه‌ی عطف مشتق دوم تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{x^r - rx + r}{x} = x - r + \frac{r}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{r}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2r}{x^3}$$

در نقطه‌ی $x = 0$ (ریشه‌ی مخرج f'') تعقر منحنی عوض می‌شود ولی چون تابع در این نقطه پیوسته نیست $x = 0$ نقطه‌ی عطف تابع محسوب نمی‌شود. ($x = 0$ عضو دامنه‌ی تعریف تابع نمی‌باشد).

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای آن که در تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt[r]{(rx + r)} & x > 1 \\ ax + b & x \leq 1 \end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود باشد باید تابع در

نقطه‌ی $x = 1$ پیوسته بوده و ضمناً مشتق‌های راست و چپ در نقطه‌ی $x = 1$ با هم برابر باشند:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[r]{(rx + r)} = r \Rightarrow a + b = r$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + b) = a + b$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{r(r)}{r \sqrt[r]{rx+r}} & x > 1 \Rightarrow f'_+(1) = \frac{r}{r} \\ a & x \leq 1 \Rightarrow f'_-(1) = a \end{cases} \Rightarrow a = \frac{r}{r}, b = r - \frac{r}{r} = \frac{1 \cdot r}{r}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۹۳

$$y = \cos^r\left(\frac{\pi}{rx}\right) \Rightarrow y' = r\left(\frac{\pi}{rx^r} \sin \frac{\pi}{rx}\right) \cos \frac{\pi}{rx}$$

$$\Rightarrow y'(r) = r\left(\frac{\pi}{r^2} \sin \frac{\pi}{r^2} \cos \frac{\pi}{r^2}\right) = \frac{\pi}{r^2} \times \frac{1}{r} \sin \frac{\pi}{r} = \frac{\pi}{r^3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی C (عضو دامنه‌ی تابع) بحرانی است، هر گاه یکی از دو حالت زیر رخ دهد: ۲۹۴

$f'(C)$ یا $f'(C)$ موجود نباشد.

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^r}}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\left(\frac{rx}{r\sqrt{1+x^r}} \times x\right) - \sqrt{1+x^r}}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{x^r}{\sqrt{1+x^r}} - \sqrt{1+x^r}}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{x^r - (x^r + 1)}{\sqrt{1+x^r}}}{x^2} = \frac{-1}{x^2 \sqrt{1+x^r}} \neq 0$$

مخرج f' در $x = 0$ صفر می‌شود. ولی از آنجا که این نقطه عضو دامنه‌ی تابع نیست، بنابراین نقطه‌ی بحرانی نیست و در نتیجه تابع نقطه‌ی بحرانی ندارد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از آزمون مشتق اول برای حل استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$$

$$\xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2 - 12x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + \frac{8}{3} = 0 \quad (*)$$

مجموع ضرایب صفر است پس یک جواب $x = 1$ است و با تقسیم عبارت $x^2 - 4x + \frac{8}{3}$ بر $x - 1$ بقیه‌ی جواب‌ها را می‌یابیم:

$$x^2 - 4x + \frac{8}{3} \Big| \frac{x-1}{x^2+x-2} = (x-1)(x+2) \Rightarrow x^2 - 4x + \frac{8}{3} = (x-1)^2(x+2)$$

$$(*) \Rightarrow (x-1)^2(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{ریشه ی مضاعف } x = 1 \\ \text{ریشه ی ساده } x = -2 \end{cases}$$

پس تابع تنها یک می‌نیمم نسبی دارد. دقت کنید چون $x = 1$ ریشه‌ی مضاعف f' است، f' در این نقطه تغییر علامت نمی‌دهد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، عبارت داخل قدرمطلق به $+\infty$ میل می‌کند بنابراین:

$$|x^2 - 4| = x^2 - 4$$

$$\text{و در نتیجه: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{ax^2 - x + 2} = \frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a = -1$$

حال حد راست عبارت را در $x = -2$ می‌یابیم.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x^2 - 4|}{-x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x-2||x+2|}{-(x^2+x-2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-(x-2)(x+2)}{-(x+2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x-2}{x-1} = \frac{4}{3}$$

دقت کنید که:

$$x \rightarrow (-2)^+ \Rightarrow |x-2| = -(x-2)$$

$$x \rightarrow (-2)^+ \Rightarrow |x+2| = x+2$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. در واقع نقاط $x = 3$ و $x = -5$ ریشه‌های مشتق تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ می‌باشند.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ x'' = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = -\frac{2a}{3} = -2 \Rightarrow a = 3 \\ P = \frac{b}{3} = -15 \Rightarrow b = -45 \end{cases}$$

باتوجه به تعیین علامت مشتق نقطه‌ی $x = 3$ طول مینیمم نسبی تابع می‌باشد که مقدار مینیمم نسبی (عرض مینیمم) برابر است با:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x \Rightarrow f(3) = 27 + 27 - 135 = -81$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = -ax^2 + bx^2 - 4$$

با توجه به نزولی بودن تابع باید $a < 0$ باشد. یعنی گزینه‌ی ۱ یا ۲ درست خواهد بود، پس a برابر -۱ است. یعنی تابع به صورت $y = -x^2 + bx^2 - 4x$ می‌باشد. از طرفی مشتق این تابع نباید ریشه داشته باشد. یعنی باید در تابع مشتق $\Delta < 0$ باشد. پس داریم:

$$y' = -2x + 2bx - 4 \xrightarrow{\Delta < 0} b^2 - 12 < 0 \Rightarrow -\sqrt{12} < b < \sqrt{12}$$

با توجه به محدوده‌ی به‌دست آمده تنها گزینه‌ی ۱ می‌تواند درست باشد.

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{1 + \cos 2x}{\cos 2x} = \frac{1}{\cos 2x} + 1 \Rightarrow y' = \frac{0 + 2 \sin 2x}{\cos^2 2x} \Rightarrow y' \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{2 \sin \frac{\pi}{6}}{\cos^2 \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۰۰

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{ax - 2} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |x|}{ax} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + x}{ax} = 2 \Rightarrow \frac{3}{a} = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x^2 - x^2 - 6x)}{(x-2)(2x + \sqrt{x^2 + 6x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x(x-2)}{(x-2)(2x + \sqrt{x^2 + 6x})} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۰۱

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2-x^2}{2} & x < 1 \\ \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -x & x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases}$$

دقت کنید که حدهای راست و چپ و مقدار تابع f در نقطه‌ی ۱ برابر ۱ هستند و f در این نقطه پیوسته است. همچنین طبق قضیه‌ی حد تابع مشتق $f'_+(1) = f'_-(1) = -1$ مشتق‌پذیر است و به همین دلیل در ضابطه‌ی f' نقطه‌ی ۱ تعریف شده است.

$$f'(x) = \begin{cases} -x & x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} -1 & x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & x > 1 \end{cases}$$

توجه کنید که $f_+(1) = 2$ و $f_-(1) = -1$ و به همین دلیل f'' در ۱ وجود ندارد. حال جدول تعیین علامت f'' را رسم می‌کنیم.

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
f''	-		+

(علامت || به معنی تعریف نشده است.)

بنابراین تقعر f در نقطه ۱ تغییر می‌کند و چون f در این نقطه مشتق‌پذیر است، مماس بر منحنی نیز وجود دارد و این نقطه‌ی عطف f محسوب می‌شود.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنید نقطه‌ای به طول x ماکزیمم نسبی باشد، پس طبق آزمون مشتق دوم، داریم:

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow 2x_0 - \frac{a}{x_0^2} = 0 \Rightarrow 2x_0^3 = a \Rightarrow 2a = 2x_0^3$$

و

$$f''(x_0) < 0 \Rightarrow 2 + \frac{2a}{x_0^3} < 0 \Rightarrow 2 + 2 \frac{2x_0^3}{x_0^3} < 0 \Rightarrow 6 < 0$$

امکان ندارد یعنی این تابع هیچ‌گاه ماکزیمم نسبی نخواهد داشت.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۰۳

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x}} & x \geq 1 \\ ax^2 + bx & x < 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط پیوستگی در } x=1} a + b = 2$$

$$f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow 2a + b = \frac{-1}{1\sqrt{1}} \Rightarrow 2a + b = -1 \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 5 \end{cases}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۰۴

$$y = f(f(x)) \rightarrow y' = f'(x) \cdot f'(f(x)) \rightarrow y'\left(\frac{1}{r}\right) = f'\left(\frac{1}{r}\right) \cdot f'\left(f\left(\frac{1}{r}\right)\right) = f'\left(\frac{1}{r}\right) \cdot f'\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$f'(x) = \pi \sin(r\pi x) + \frac{\pi}{r} \sin \pi x \Rightarrow \begin{cases} f'\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\pi\sqrt{r}}{r} + \frac{\pi}{r} \frac{\sqrt{r}}{r} = \frac{r\pi}{r} \sqrt{r} \\ f'\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\pi}{r} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{1}{r}\right) \cdot f'\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\pi r}{r} (r\sqrt{r})$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۰۵

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^r} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^r - 1}{x^r} \right) = \frac{-1}{-\infty} = +\infty : u = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^r}$$

پس:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^r}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (u - \sqrt{u^r + 1}) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^r - (u^r + 1)}{(u + \sqrt{u^r + 1})} =$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} -\frac{1}{(u + \sqrt{u^r + 1})} = 0$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۰۶

$$f(x) = \frac{x - |rx|}{r} = \begin{cases} -x & x \geq 0 \\ rx & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ r & x < 0 \end{cases}$$

بنابراین:

$$(f(g(x)))' = g'(x) f'(g(x)) = (\cos x) f'(\sin x)$$

$$-\pi < x < 0 \Rightarrow \sin x < 0 \Rightarrow f'(\sin x) = r$$

$$(f'(g(x)))' = (\cos x)(r) = r \cos x$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۰۷

$$f(x) = \sqrt{|rx - r|} \Rightarrow f'(x) = \frac{\pm r}{2\sqrt{|rx - r|}}$$

x	0	$\frac{r}{r}$	1
f(x)	$\sqrt{r}$	0	1

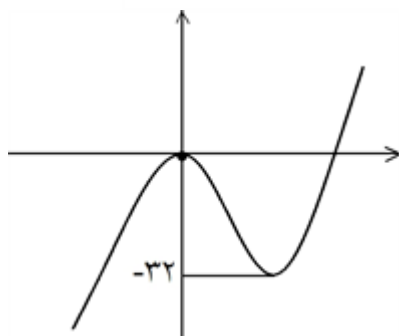
بنابراین نقطه‌ی بحرانی تابع $x = \frac{r}{r}$ است.

بنابراین ماکسیمم تابع $\sqrt{r}$ و می‌نیمم آن برابر ۰ است.



$$y' = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

X	$-\infty$	0	4	$+\infty$
y'	+	-	+	
y	$-\infty$		-32	$+\infty$



پس باید $0 < m < -32$ باشد $\Leftarrow$



پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴

۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴

۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	۳	۴
۸۸	۱	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	۳	۴
۹۰	۱	۲	۳	۴
۹۱	۱	۲	۳	۴
۹۲	۱	۲	۳	۴
۹۳	۱	۲	۳	۴
۹۴	۱	۲	۳	۴
۹۵	۱	۲	۳	۴
۹۶	۱	۲	۳	۴

۹۷	۱	۲	۳	۴
۹۸	۱	۲	۳	۴
۹۹	۱	۲	۳	۴
۱۰۰	۱	۲	۳	۴
۱۰۱	۱	۲	۳	۴
۱۰۲	۱	۲	۳	۴
۱۰۳	۱	۲	۳	۴
۱۰۴	۱	۲	۳	۴
۱۰۵	۱	۲	۳	۴
۱۰۶	۱	۲	۳	۴
۱۰۷	۱	۲	۳	۴
۱۰۸	۱	۲	۳	۴
۱۰۹	۱	۲	۳	۴
۱۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۱۹	۱	۲	۳	۴
۱۲۰	۱	۲	۳	۴
۱۲۱	۱	۲	۳	۴
۱۲۲	۱	۲	۳	۴
۱۲۳	۱	۲	۳	۴
۱۲۴	۱	۲	۳	۴
۱۲۵	۱	۲	۳	۴
۱۲۶	۱	۲	۳	۴
۱۲۷	۱	۲	۳	۴
۱۲۸	۱	۲	۳	۴

۱۲۹	۱	۲	۳	۴
۱۳۰	۱	۲	۳	۴
۱۳۱	۱	۲	۳	۴
۱۳۲	۱	۲	۳	۴
۱۳۳	۱	۲	۳	۴
۱۳۴	۱	۲	۳	۴
۱۳۵	۱	۲	۳	۴
۱۳۶	۱	۲	۳	۴
۱۳۷	۱	۲	۳	۴
۱۳۸	۱	۲	۳	۴
۱۳۹	۱	۲	۳	۴
۱۴۰	۱	۲	۳	۴
۱۴۱	۱	۲	۳	۴
۱۴۲	۱	۲	۳	۴
۱۴۳	۱	۲	۳	۴
۱۴۴	۱	۲	۳	۴
۱۴۵	۱	۲	۳	۴
۱۴۶	۱	۲	۳	۴
۱۴۷	۱	۲	۳	۴
۱۴۸	۱	۲	۳	۴
۱۴۹	۱	۲	۳	۴
۱۵۰	۱	۲	۳	۴
۱۵۱	۱	۲	۳	۴
۱۵۲	۱	۲	۳	۴
۱۵۳	۱	۲	۳	۴
۱۵۴	۱	۲	۳	۴
۱۵۵	۱	۲	۳	۴
۱۵۶	۱	۲	۳	۴
۱۵۷	۱	۲	۳	۴
۱۵۸	۱	۲	۳	۴
۱۵۹	۱	۲	۳	۴
۱۶۰	۱	۲	۳	۴

۱۶۱	۱	۲	۳	۴
۱۶۲	۱	۲	۳	۴
۱۶۳	۱	۲	۳	۴
۱۶۴	۱	۲	۳	۴
۱۶۵	۱	۲	۳	۴
۱۶۶	۱	۲	۳	۴
۱۶۷	۱	۲	۳	۴
۱۶۸	۱	۲	۳	۴
۱۶۹	۱	۲	۳	۴
۱۷۰	۱	۲	۳	۴
۱۷۱	۱	۲	۳	۴
۱۷۲	۱	۲	۳	۴
۱۷۳	۱	۲	۳	۴
۱۷۴	۱	۲	۳	۴
۱۷۵	۱	۲	۳	۴
۱۷۶	۱	۲	۳	۴
۱۷۷	۱	۲	۳	۴
۱۷۸	۱	۲	۳	۴
۱۷۹	۱	۲	۳	۴
۱۸۰	۱	۲	۳	۴
۱۸۱	۱	۲	۳	۴
۱۸۲	۱	۲	۳	۴
۱۸۳	۱	۲	۳	۴
۱۸۴	۱	۲	۳	۴
۱۸۵	۱	۲	۳	۴
۱۸۶	۱	۲	۳	۴
۱۸۷	۱	۲	۳	۴
۱۸۸	۱	۲	۳	۴
۱۸۹	۱	۲	۳	۴
۱۹۰	۱	۲	۳	۴
۱۹۱	۱	۲	۳	۴
۱۹۲	۱	۲	۳	۴

۱۹۳	۱	۲	۳	۴
۱۹۴	۱	۲	۳	۴
۱۹۵	۱	۲	۳	۴
۱۹۶	۱	۲	۳	۴
۱۹۷	۱	۲	۳	۴
۱۹۸	۱	۲	۳	۴
۱۹۹	۱	۲	۳	۴
۲۰۰	۱	۲	۳	۴
۲۰۱	۱	۲	۳	۴
۲۰۲	۱	۲	۳	۴
۲۰۳	۱	۲	۳	۴
۲۰۴	۱	۲	۳	۴
۲۰۵	۱	۲	۳	۴
۲۰۶	۱	۲	۳	۴
۲۰۷	۱	۲	۳	۴
۲۰۸	۱	۲	۳	۴
۲۰۹	۱	۲	۳	۴
۲۱۰	۱	۲	۳	۴
۲۱۱	۱	۲	۳	۴
۲۱۲	۱	۲	۳	۴
۲۱۳	۱	۲	۳	۴
۲۱۴	۱	۲	۳	۴
۲۱۵	۱	۲	۳	۴
۲۱۶	۱	۲	۳	۴
۲۱۷	۱	۲	۳	۴
۲۱۸	۱	۲	۳	۴
۲۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۲۴	۱	۲	۳	۴

۲۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۲۹	۱	۲	۳	۴
۲۳۰	۱	۲	۳	۴
۲۳۱	۱	۲	۳	۴
۲۳۲	۱	۲	۳	۴
۲۳۳	۱	۲	۳	۴
۲۳۴	۱	۲	۳	۴
۲۳۵	۱	۲	۳	۴
۲۳۶	۱	۲	۳	۴
۲۳۷	۱	۲	۳	۴
۲۳۸	۱	۲	۳	۴
۲۳۹	۱	۲	۳	۴
۲۴۰	۱	۲	۳	۴
۲۴۱	۱	۲	۳	۴
۲۴۲	۱	۲	۳	۴
۲۴۳	۱	۲	۳	۴
۲۴۴	۱	۲	۳	۴
۲۴۵	۱	۲	۳	۴
۲۴۶	۱	۲	۳	۴
۲۴۷	۱	۲	۳	۴
۲۴۸	۱	۲	۳	۴
۲۴۹	۱	۲	۳	۴
۲۵۰	۱	۲	۳	۴
۲۵۱	۱	۲	۳	۴
۲۵۲	۱	۲	۳	۴
۲۵۳	۱	۲	۳	۴
۲۵۴	۱	۲	۳	۴
۲۵۵	۱	۲	۳	۴
۲۵۶	۱	۲	۳	۴



۲۵۷	۱	۲	۳	۴
۲۵۸	۱	۲	۳	۴
۲۵۹	۱	۲	۳	۴
۲۶۰	۱	۲	۳	۴
۲۶۱	۱	۲	۳	۴
۲۶۲	۱	۲	۳	۴
۲۶۳	۱	۲	۳	۴
۲۶۴	۱	۲	۳	۴
۲۶۵	۱	۲	۳	۴
۲۶۶	۱	۲	۳	۴
۲۶۷	۱	۲	۳	۴
۲۶۸	۱	۲	۳	۴
۲۶۹	۱	۲	۳	۴
۲۷۰	۱	۲	۳	۴
۲۷۱	۱	۲	۳	۴
۲۷۲	۱	۲	۳	۴
۲۷۳	۱	۲	۳	۴
۲۷۴	۱	۲	۳	۴
۲۷۵	۱	۲	۳	۴
۲۷۶	۱	۲	۳	۴
۲۷۷	۱	۲	۳	۴
۲۷۸	۱	۲	۳	۴
۲۷۹	۱	۲	۳	۴
۲۸۰	۱	۲	۳	۴
۲۸۱	۱	۲	۳	۴
۲۸۲	۱	۲	۳	۴
۲۸۳	۱	۲	۳	۴
۲۸۴	۱	۲	۳	۴
۲۸۵	۱	۲	۳	۴
۲۸۶	۱	۲	۳	۴
۲۸۷	۱	۲	۳	۴
۲۸۸	۱	۲	۳	۴

۲۸۹	۱	۲	۳	۴
۲۹۰	۱	۲	۳	۴
۲۹۱	۱	۲	۳	۴
۲۹۲	۱	۲	۳	۴
۲۹۳	۱	۲	۳	۴
۲۹۴	۱	۲	۳	۴
۲۹۵	۱	۲	۳	۴
۲۹۶	۱	۲	۳	۴
۲۹۷	۱	۲	۳	۴
۲۹۸	۱	۲	۳	۴
۲۹۹	۱	۲	۳	۴
۳۰۰	۱	۲	۳	۴
۳۰۱	۱	۲	۳	۴
۳۰۲	۱	۲	۳	۴
۳۰۳	۱	۲	۳	۴
۳۰۴	۱	۲	۳	۴
۳۰۵	۱	۲	۳	۴
۳۰۶	۱	۲	۳	۴
۳۰۷	۱	۲	۳	۴
۳۰۸	۱	۲	۳	۴



