



www.sejall.ir

تست های طبقه بندی شده و فصل به فصل کنکور سراسری همراه با پاسخ کامل تشریحی

پایه تحصیلی : دوازدهم تجربی

نام درس : ریاضی ۳ تجربی فصل ۴ و ۳

نام آموزشگاه : سامانه جامع آزمونهای

الکترونیکی سجال sejall.ir

سوال ۲۴۲

ریاضی ۳ تجربی فصل ۳ و ۴

۱ خط d از مبدأ مختصات می‌گذرد و بر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{-2x^2 + x + 1}$ در نقطه A مماس است. عرض نقطه A کدام است؟

$\sqrt{2}$ (۴)

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ (۳)

$\sqrt{3}$ (۲)

$\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲ خط $y = -ax - 5$ در نقطه‌ای به طول ۳ بر نمودار تابع f مماس است. اگر $f'(3) - f(3) = 2$ باشد، $f'(3)$ چند برابر $f(3)$ است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

$-\frac{1}{6}$ (۳)

$-\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{6}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۳ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{k[x] - 2}{x^2 - 4} = +\infty$ باشد، نقاط $(k\pi, \sin k\pi)$ در کدام ناحیهٔ محورهای مختصات قرار دارند؟

چهارم (۴)

سوم (۳)

دوم (۲)

اول (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۴ بازه $(1, 3x + 9)$ یک همسایگی ۵ است. اگر بازه (a, b) مجموعهٔ مقادیر x باشد، ab کدام است؟

$\frac{8}{3}$ (۴)

$\frac{4}{3}$ (۳)

$\frac{4}{5}$ (۲)

$\frac{2}{5}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۵ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x^2} & x \geq 1 \\ b + c\sqrt{x^2} & x < 1 \end{cases}$ در R پیوسته است. اگر f فقط در یک نقطه مشتق پذیر نباشد، مقدار $\frac{ab}{c^2}$ کدام است؟ ($c \neq 0$)

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

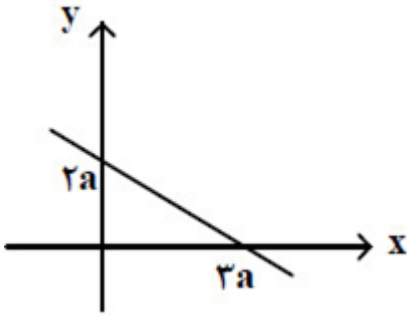
$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی



۶ اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^2(x)}{x|f^{-1}(x)|}$ کدام است؟



$-\frac{2}{27}$ (۴)

$-\frac{8}{9}$ (۳)

$-\frac{8}{27}$ (۲)

$-\frac{2}{9}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷ اگر $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^+} \frac{[-x] + a}{\left|\frac{\sqrt{r}}{r}x + a\right| + a} = -\infty$ باشد، مقدار $[a]$ کدام است؟

-۴ (۴)

-۳ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۸ حاصل $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{r}{a}\right)^+} \frac{2\sqrt{x - \frac{r}{a}} + 3\sqrt{x} - \sqrt{\frac{27}{a}}}{\sqrt{x^r - \frac{9}{a^r}}}$ کدام است؟ ($a > 0$)

$\sqrt{\frac{2a}{3}}$ (۴)

$\sqrt{\frac{2}{3a}}$ (۳)

$\sqrt{\frac{3}{2a}}$ (۲)

$\sqrt{\frac{3a}{2}}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a + \sqrt{x^r} & x < 1 \\ b\sqrt{x^r} & x \geq 1 \end{cases}$ در R پیوسته است. اگر f فقط در یک نقطه مشتق پذیر نباشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

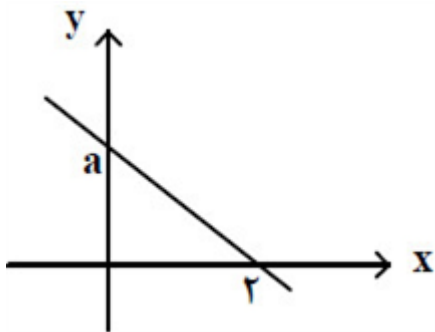
$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴ تیرماه



۱۰ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل داده شده است. اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{|2f(x) - af^{-1}(x)|} = 2$ باشد، مقدار غیرصحيح a کدام است؟



$2\sqrt{2}$ (۴)

$-1 + \sqrt{2}$ (۳)

$1 + \sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴ تیرماه

۱۱ اگر $\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{2}} \frac{x}{x^2 + ax + b} = +\infty$ باشد، مقدار $\left[\frac{b}{a}\right]$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴ تیرماه

۱۲ حاصل $\lim_{x \rightarrow \sqrt[3]{2}a^+} \frac{2\sqrt{x-3a} + 3\sqrt{x} - \sqrt{27a}}{\sqrt{x^2-9a^2}}$ کدام است؟ ($a > 0$)

$+\infty$ (۴)

$\sqrt{\frac{2}{3a}}$ (۳)

$\sqrt{\frac{2}{a}}$ (۲)

۸ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴ تیرماه

۱۳ خط d از مبدأ مختصات می‌گذرد و بر نمودار تابع $f(x) = 2\sqrt{x}(4x^2 + 3)$ مماس است. شیب خط d چقدر است؟

۱۲ (۴)

۶ (۳)

$8\sqrt{2}$ (۲)

$2\sqrt{2}$ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۴ تیرماه

۱۴ خط $y + ax = 2$ در نقطه‌ای به طول ۴ بر نمودار تابع f مماس است. اگر $f(4) + f'(4) = -1$ باشد، مقدار $f'(4)$ کدام است؟

-۱ (۴)

-0.6 (۳)

0.6 (۲)

۱ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۴ تیرماه

۱۵ اگر $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - k[x]}{x^2 - 1} = -\infty$ باشد، نقاط $(k\pi, \cos k\pi)$ در کدام ناحیه محوره‌ای مختصات قرار دارند؟

چهارم (۴)

سوم (۳)

دوم (۲)

اول (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۴ تیرماه

۱۶ اگر $(2, a+b) \cup (4b-a, 5)$ یک همسایگی محذوف ۴ باشد، مقدار $b-a$ کدام است؟

$\frac{5}{4}$ (۴)

$\frac{4}{5}$ (۳)

$-\frac{5}{4}$ (۲)

$-\frac{4}{5}$ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۴ تیرماه



۱۷) نمودار تابع $f(x) = x^2 + ax - b$ در نقطه‌ای به طول ۲ بر محور x ها مماس است. مقدار $b - a$ کدام است؟

۲ (۴)

۴ (۳)

-۲ (۲)

-۴ (۱)

سراسری-تجربی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۱۸) آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = 1 - \frac{a}{x}$ در بازه $[1, 3]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع در نقطه‌ای با کدام طول برابر است؟ $(a \neq 0)$

$\sqrt{6}$ (۴)

$\sqrt{5}$ (۳)

$\sqrt{3}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

سراسری-تجربی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۱۹) اگر $\lim_{x \rightarrow -2\pi} \frac{2 + k \left[\frac{x}{\pi} \right]}{\sin x} = +\infty$ باشد، مقدار $[-k]$ کدام است؟

-۲ (۴)

-۳ (۳)

-۴ (۲)

-۱ (۱)

سراسری-تجربی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۲۰) چندجمله‌ای $f(x) = x^5 - 3x^3 + ax + 5$ بر $x + 2$ بخش پذیر است. مقدار a کدام است؟

$2/5$ (۴)

$-2/5$ (۳)

$1/5$ (۲)

$-1/5$ (۱)

سراسری-تجربی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۲۱) تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 2bx + c & x > a \\ 3x^2 & x \leq a \end{cases}$ روی R مشتق پذیر است. مقدار $a^3 + b - c$ کدام است؟

$(a-1)^3 + 1$ (۴)

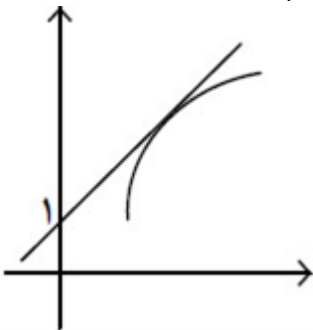
$(a-1)^3 - 1$ (۳)

$(a+1)^3 + 1$ (۲)

$(a+1)^3 - 1$ (۱)

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۲۲) نمودار تابع f و خط مماس بر آن در نقطه $(3, 5)$ در شکل مقابل رسم شده است. مقدار $f'(3)$ کدام است؟



$\frac{4}{3}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

۱ (۲)

۲ (۱)

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۲۳) اگر $f(x) = \frac{|2x-4|}{\sqrt{x^2}}$ و $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{3x}}{\sqrt{x^2}}$ باشد، مقدار $f'(1) - 2g'(1)$ کدام است؟

$-\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{6}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۲)

$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۱)

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۲۴) حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cotg x}{[x - \pi]}$ کدام است؟

$-\infty$ (۴)

$+\infty$ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)



۲۵ تابع پیوسته f یک به یک بوده و وارون خود را فقط در نقطه $A(a, f(a))$ قطع می‌کند. اگر $f(0) = 2$ باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) $f'(a)$

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۲۶ خط مماس بر منحنی $f(x) = \frac{a}{2x-1}$ از نقاط $(2/5, 6)$ و $(-0/5, -12)$ می‌گذرد. مقدار $f(5)$ کدام است؟

- ۱ (۱) $-\frac{1}{3}$ ۲ (۲) $\frac{1}{4}$ ۳ (۳) $-\frac{1}{2}$ ۴ (۴) $\frac{1}{6}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲۷ اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{f(x)}{\cos x} = +\infty$ باشد، کدام مورد می‌تواند ضابطه تابع f باشد؟

- ۱ (۱) $2\left[\frac{x}{\pi}\right] + 1$ ۲ (۲) $\left[\frac{2x}{\pi}\right] - 1$ ۳ (۳) $\left[\frac{2x}{\pi}\right] - 2$ ۴ (۴) $3\left[\frac{x}{\pi}\right] + 2$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲۸ به ازای چند مقدار صحیح نامنفی m ، یک نقطه گوشه‌ای برای $f(x) = \begin{cases} b & x < a \\ b + (x-a)^m & x \geq a \end{cases}$ است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) صفر ۳ (۳) ۴ (۴) ۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۹ اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + \sqrt{bx+c}}{x} = \frac{1}{4}$ باشد، مقدار $\frac{ab}{c}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۱ ۲ (۲) -۱ ۳ (۳) $\frac{1}{2}$ ۴ (۴) $-\frac{1}{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۰ خط مماس بر منحنی $f(x) = \sqrt{ax-1}$ در نقطه A از نقاط $(-1, 1)$ و $(2, 2)$ می‌گذرد. مقدار $f(5)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۳ ۲ (۲) ۲ ۳ (۳) $\frac{\sqrt{23}}{2}$ ۴ (۴) $\frac{\sqrt{32}}{3}$

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۳

۳۱ اگر $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x)}{\sin x} = -\infty$ باشد، کدام مورد می‌تواند ضابطه f باشد؟

- ۱ (۱) $\left[\frac{2x}{\pi}\right] - 1$ ۲ (۲) $3\left[\frac{x}{\pi}\right] + 1$ ۳ (۳) $2\left[\frac{x}{\pi}\right] + 2$ ۴ (۴) $\left[\frac{2x}{\pi}\right] - 2$

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۳

۳۲ به ازای چند مقدار صحیح m ، تابع $f(x) = \begin{cases} b & x < a \\ b + (x-a)^m & x \geq a \end{cases}$ دارای نقطه گوشه‌ای است؟

- ۱ (۱) صفر ۲ (۲) بیش از ۲ ۳ (۳) ۲ ۴ (۴) ۱

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳



۳۳ اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + \sqrt{(bx+1)(cx+1)}}{x} = 2$ باشد، مقدار $\frac{b}{a} + \frac{c}{a}$ کدام است؟

- ۱) -۲ ۲) -۴ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{4}$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۳۴ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = (x^2 + 1)^2(ax + 1)$ در بازه $[-1, 0]$ برابر ۱۱- است. آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع در نقطه $x = -2a$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۸ ۴) -۸

سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۳۵ خط $7y - x = 5$ در ناحیه اول صفحه مختصات بر منحنی $y = \frac{ax-1}{2x+1}$ مماس است. مقدار a کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $\frac{4}{7}$ ۴) $\frac{9}{7}$

سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۳۶ اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{a + 2[-x]}{1 - 2x} = -\infty$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left[\frac{x}{a} - x \right]$ کدام است؟

- ۱) صفر ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۳۷ به ازای هر مقدار حقیقی و ناصفر a ، تابع $f(x) = \begin{cases} bx + c & x < a \\ \frac{1}{x} & x \geq a \end{cases}$ روی R مشتق‌پذیر است. مقدار ac کدام است؟

- ۱) -۱ ۲) ۱ ۳) -۲ ۴) ۲

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۳۸ اگر $f(x) = \sqrt{x+8} - \sqrt{x}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+8} + \sqrt{x}}$ باشد، حاصل عبارت $f'(1)g(1) - g'(1)f(1)$ کدام است؟

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۳۹ مجموع مقادیر حدهای چپ و راست تابع $f(x) = \frac{x-2}{x^2 - [x^2]}$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) صفر

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

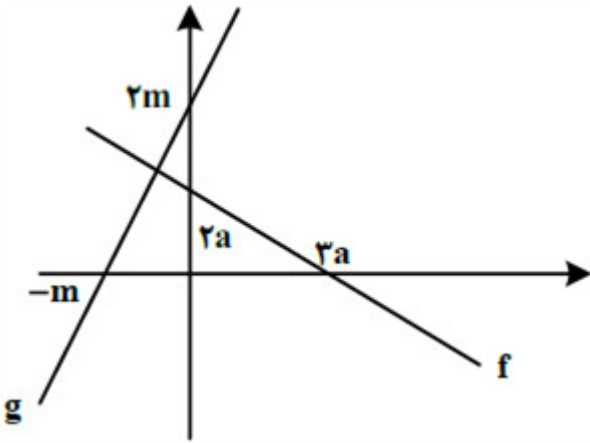
۴۰ اگر $f(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{x+|x|}}$ و $g(x) = \frac{1}{x^5 + |x^5|}$ باشد، مقدار $g'(\sqrt[5]{3})f'(g(\sqrt[5]{3}))$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) -۱ ۴) ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی



۴۱ شکل مقابل، نمودار توابع f و g را نشان می‌دهد. حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{|f(x)|}$ کدام است؟



۳ (۴)

-۳ (۳)

$-\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۴۲ مقدار غیرصفر حد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{b\sqrt{2-\sqrt{x}}-b}{ax+b}$ کدام است؟

$\frac{1}{6}$ (۴)

$-\frac{1}{6}$ (۳)

$-\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۴۳ خط d موازی محور x ها، سهمی $y = x^2 - 1$ را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم شده در این نقاط بر هم عمودند. مجموع عرض‌های این دو نقطه کدام است؟

$-\frac{3}{4}$ (۴)

$-\frac{1}{4}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{3}{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۴ اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$ و $g(x) = \frac{1}{x^3 - |x^3|}$ باشد، مقدار $f'(g(-\sqrt[3]{2}))g'(-\sqrt[3]{2})$ کدام است؟

-۱ (۴)

۱ (۳)

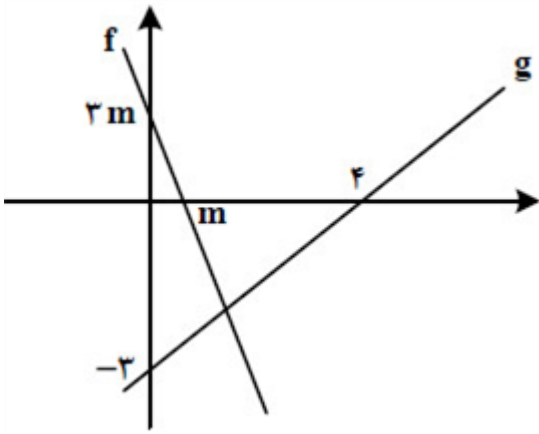
$\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه



۴۵ شکل مقابل، نمودار تابع f و g را نشان می‌دهد. حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)}$ کدام است؟



۴ ۴

-۴ ۳

۳ ۲

-۳ ۱

سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه

۴۶ مقدار غیرصفر حد $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b\sqrt{2+\sqrt{x}}-2b}{ax-b}$ کدام است؟

$\frac{1}{24}$ ۴

$\frac{1}{48}$ ۳

$\frac{1}{6}$ ۲

$\frac{1}{12}$ ۱

سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه

۴۷ خط d موازی محور x ها، قرینه سهمی $y = x^2 + 1$ نسبت به محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم شده در این نقاط بر هم عمودند. فاصله خط d از مبدأ مختصات کدام است؟

$2/\sqrt{5}$ ۴

$0/\sqrt{5}$ ۳

$2/\sqrt{5}$ ۲

$1/\sqrt{5}$ ۱

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۴۸ آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$ در نقطه $x = 4$ کدام است؟

$\frac{5}{27}$ ۴

$\frac{4}{27}$ ۳

$\frac{5}{9}$ ۲

$\frac{2}{9}$ ۱

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۴۹ خط مماس در دو نقطه از نمودار تابع $y = \frac{1-5x}{1+2x}$ بر خط $y = 7x - 2$ عمود است. فاصله بین این دو نقطه، کدام است؟

$7\sqrt{2}$ ۴

$5\sqrt{2}$ ۳

$7\sqrt{13}$ ۲

$2\sqrt{13}$ ۱

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۵۰ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x+1} & x \geq 2 \\ ax^2 + bx & x < 2 \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. مقدار b کدام است؟

$-\frac{5}{12}$ ۴

$-\frac{5}{6}$ ۳

$\frac{7}{6}$ ۲

$\frac{7}{3}$ ۱

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۵۱ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax + \sqrt{x^2 + 12}}{x + 2}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ باشد، حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow -2$ ، کدام است؟

۲ ۴

$1/5$ ۳

۱ ۲

$0/5$ ۱

۵۲ خارج قسمت و باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - 1$ ، به ترتیب $q(x)$ و r است. اگر $p^r(x)$ بر $x^2 - 4$ بخش پذیر باشد، $q(-2)$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{4}$ ۲ $\frac{2}{3}$ ۳ ۲ ۴ صفر

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۵۳ تابع f مشتق پذیر و با دوره تناوب $\frac{\pi}{8}$ است. اگر $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $f\left(2x - \frac{23\pi}{24}\right) + f\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = h(x)$ باشد، حاصل $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ کدام است؟

- ۱ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ۲ $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ ۳ $\sqrt{3}$ ۴ $-\sqrt{3}$

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۵۴ در نقطه تلاقی منحنی‌های $f(x) = -\sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x^2} - 2$ در ناحیه دوم دستگاه مختصات، خط مماسی بر $g(x)$ رسم می‌شود. فاصله نقطه برخورد این خط با محور عرض‌ها تا مبدأ مختصات، کدام است؟

- ۱ $\frac{5}{3}$ ۲ $\frac{4}{3}$ ۳ $\frac{2}{3}$ ۴ $\frac{1}{3}$

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۵۵ چندجمله‌ای $p(x) = x^{2n-1} + 3x^{2n-2} + \frac{1}{27}x^6 - \frac{1}{9}x^4 + a$ به ازای هر عدد طبیعی n ، بر $x + 3$ بخش پذیر است. باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x^2 - 1$ کدام است؟

- ۱ $-x + \frac{407}{27}$ ۲ $x - \frac{227}{27}$ ۳ $-x + \frac{227}{27}$ ۴ $x - \frac{407}{27}$

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۵۶ اگر $f^{-1}(x) = -\sqrt{x - 27}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x + \sqrt{f(x)}}{|x^2 + x - 6|}$ کدام است؟

- ۱ $-0/3$ ۲ $-0/6$ ۳ $0/3$ ۴ $0/6$

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۵۷ خط d در نقطه $(-1, 5)$ بر نمودار تابع f مماس است. اگر شیب خط d برابر $-\frac{1}{3}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}f(x)$ باشد، مقدار $g'(-1)$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{4}{3}$ ۲ $-\frac{10}{3}$ ۳ $\frac{7}{6}$ ۴ $\frac{13}{6}$

سراسری-تجربی-دی ۱۴۰۱

۵۸ اگر $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{ax + b}{a \cos x - \sin x} = -\infty$ باشد، کمترین مقدار صحیح b کدام است؟

- ۱ -۴ ۲ -۳ ۳ -۲ ۴ -۱

سراسری-تجربی-دی ۱۴۰۱

۵۹ به ازای کدام مقدار a ، اختلاف شیب نیم‌خط‌های مماس چپ و راست بر منحنی تابع $f(x) = |4x - 3|\sqrt{ax}$ در نقطه $x = \frac{3}{4}$ برابر $2\sqrt{6}$ می‌شود؟

$\frac{1}{8}$ (۴)

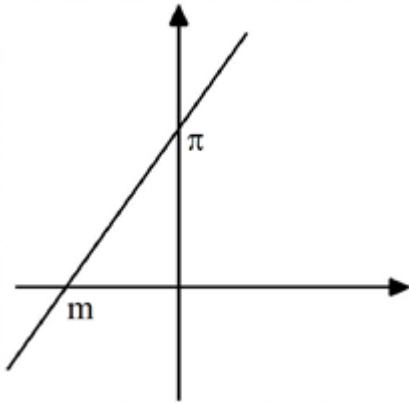
$\frac{1}{2}$ (۳)

۸ (۲)

۲ (۱)

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۶۰ شکل مقابل، نمودار تابع f^{-1} را نشان می‌دهد. اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \pi$ باشد، مقدار m کدام است؟



$-\pi\sqrt{\pi}$ (۴)

$-\frac{1}{\pi}$ (۳)

$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ (۲)

$-\sqrt{\pi}$ (۱)

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۶۱ اگر $y = 2x + b$ بر نمودار $y = \frac{x+a}{ax+1}$ در نقطه‌ای به طول واحد مماس باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟

۱ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

صفر (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۶۲ اگر $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{2x^2 + x - 1}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 1}{2(x-1)}$ کدام است؟

۱ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

-۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۶۳ اگر $f(x) = \sqrt{ax^2 + x + 1}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x+2} = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left[\frac{1}{x} \right] f(x)$ چقدر است؟

-۱ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۱ (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۶۴ در بازه $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin x \cos 2x$ چند برابر آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

$-\frac{1}{2}$ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی



۶۵ در کدام نقطه از منحنی $y = x^2 - 4x + 5$ ، خط مماس بر منحنی، بر خط $y - 3x = 1$ عمود است؟

(۲, ۱) **۴**

(۱, ۲) **۳**

(-۱, ۱۰) **۲**

(-۲, ۱۷) **۱**

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶۶ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $p(x) = x^2 + 4x + 5$ برابر $x + 2$ است. اگر $f(1) = 13$ و $f(-1) = 11$ باشد، خارج‌قسمت این تقسیم کدام مورد می‌تواند باشد؟

$-2x + 3$ **۴**

$3x - 2$ **۳**

$2x - 1$ **۲**

$-x + 2$ **۱**

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶۷ معادله خط مماس بر نمودار $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + 3}$ در نقطه‌ای به طول واحد بر روی نمودار، به صورت $4y - 3x = n$ است. مقدار $m + n$ چقدر است؟

۳ **۴**

۲ **۳**

-۲ **۲**

-۳ **۱**

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۱

۶۸ اگر $f(x) = x \left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}} \right)^2$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ کدام است؟

$\frac{3}{14}$ **۴**

$\frac{2}{7}$ **۳**

$\frac{1}{9}$ **۲**

$\frac{1}{27}$ **۱**

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۱

۶۹ اگر $g(x) = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{|x - 1|}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} (4 - [x])g(x) = 6$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ کدام است؟

-۲ **۴**

۲ **۳**

۱ **۲**

-۱ **۱**

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۱

۷۰ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - [x^2]}$ کدام است؟

$+\infty$ **۴**

۱ **۳**

$\frac{1}{3}$ **۲**

صفر **۱**

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۱

۷۱ اگر $f(x) = (x - 4)\sqrt{x + 3}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{f^2(5 - h) - 3f(5 - h) + 2}{h(5 - h)}$ کدام است؟

$-\frac{13}{15}$ **۴**

$\frac{5}{6}$ **۳**

$-\frac{5}{12}$ **۲**

$\frac{13}{30}$ **۱**

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۷۲ تابع f مشتق‌پذیر و با دوره تناوب ۵ است. اگر $f'(-1) = \frac{3}{2}$ و $f(x) = f(x + 1) + f(3x + 10)$ باشد، حاصل $g'(-2)$ کدام است؟

$\frac{13}{2}$ **۴**

۶ **۳**

$\frac{7}{2}$ **۲**

۳ **۱**

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱



۷۳ چند جمله‌ای $16a + 3x^5 + x^6 + 2x^{2n} + x^{2n+1} = p(x)$ ، به ازای هر عدد طبیعی n بر $2 + x$ بخش پذیر است. برای $n = 1$ ، باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر $3 - 2x + x^2$ کدام است؟

۴ $-5x + 24$

۳ $-5x + 24$

۲ $-15x + 14$

۱ $-15x + 24$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۷۴ حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x+2}}{1 + \sqrt[3]{x}}$ کدام است؟

۴ $-\frac{3}{2}$

۳ -2

۲ $\frac{1}{2}$

۱ 3

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۷۵ فرض کنید $g(x) = ax^2 + 5x + b$. اگر $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \leq 2 \\ g'(x) & x > 2 \end{cases}$ مشتق پذیر باشد، مقدار $a + b$ ، کدام است؟

۴ $\frac{15}{2}$

۳ $\frac{5}{2}$

۲ $-\frac{5}{2}$

۱ $-\frac{15}{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۷۶ فرض کنید $f(x) = (x[x])^3$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. مقدار مشتق چپ تابع fog در $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ چند برابر $(-48\sqrt{5})$ است؟

□ نماد جزء صحیح است.

۴ 8

۳ 4

۲ 2

۱ 1

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۷۷ تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ را در نظر بگیرید. شیب خط مماس بر منحنی $f^{-1}(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، کدام است؟

۴ 12

۳ 8

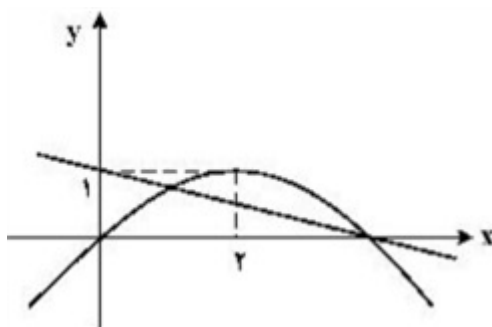
۲ -8

۱ -12

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۷۸ نمودار تابع سهمی f و خط راست g در شکل زیر داده شده است.

مقدار $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) + g(x)}{2 - x}$ ، کدام است؟



۴ $\frac{3}{2}$

۳ $\frac{5}{4}$

۲ $-\frac{5}{4}$

۱ $-\frac{3}{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی



۷۹ مقدار $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 - x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1} - x^2}{x}$ کدام است؟

- ۱ $\frac{3}{2}$ ۲ ۱ ۳ صفر ۴ -۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۸۰ مقدار $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{16x - \left[-\frac{2}{x^2}\right]}{24x + \left[\frac{3}{x^2}\right]}$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- ۱ $-\infty$ ۲ $+\infty$ ۳ صفر ۴ $\frac{2}{3}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۸۱ فرض کنید $g(x) = ax^2 + bx + c$ ، $(a \neq 0)$ و $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq k \\ g'(x) & x < k \end{cases}$ باشد. اگر f یک تابع مشتق پذیر باشد، حداکثر مقدار k به شرط $b + c = a$ کدام است؟

- ۱ $\frac{3}{4}$ ۲ ۱ ۳ ۳ ۴ ۴

سراسری - تجربی - ۱۴۰۰

۸۲ فرض کنید $f(x) = \left(x \left[x^2 + \frac{1}{2}\right]\right)^2 + 1$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$. مقدار مشتق تابع $f \circ g$ در $x = \frac{3}{\sqrt{8}}$ ، چند برابر $(-128\sqrt{2})$ است؟

- ۱ -۴ ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ ۴

سراسری - تجربی - ۱۴۰۰

۸۳ مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}} \right)$ کدام است؟

- ۱ صفر ۲ ۱ ۳ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴ $\sqrt{2}$

سراسری - تجربی - ۱۴۰۰

۸۴ مقدار $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} \frac{10x - 5 + \left[\frac{2}{x^2}\right]}{16x - \left[-\frac{2}{x^2}\right]}$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- ۱ $-\infty$ ۲ صفر ۳ $\frac{5}{8}$ ۴ $+\infty$

سراسری - ریاضی - ۱۴۰۰

۸۵ تابع چندجمله‌ای درجه‌ی دوم با ضرایب طبیعی $P(x)$ مفروض است. اگر باقیمانده و خارج قسمت تقسیم $P'(x)$ بر $P(x)$ (مشتق تابع $P(x)$) به ترتیب ۲- و $\frac{1}{4}x + 1$ باشند، کمترین مقدار مجموع ضرایب $P(x)$ ، کدام است؟

- ۱ ۴ ۲ ۶ ۳ ۷ ۴ ۹

سراسری - ریاضی - ۱۴۰۰



۸۶ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} & ; 0 \leq x < 4 \\ \left[\frac{x}{4}\right](x^2 - 9x) & ; 4 \leq x < 8 \end{cases}$ مقدار $f'(2) - f'(5)$ ، کدام است؟

۳
۲ (۴)

۳
۴ (۳)

۱
۲ (۲)

۱
۴ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۸۷ فرض کنید نمودارهای دو تابع $y = x\sqrt{x}$ و $y = x^2 + ax + b$ در یک نقطه‌ی مشترک، بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطه‌ی مشترک ۴ باشد، مقدار b کدام است؟

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۸۸ فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ ، حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}}$ ، کدام است؟

$-\frac{1}{2}$ (۴)

۰ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$+\infty$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۸۹ به ازای یک مقدار a ، چندجمله‌ای $P(x) = 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - 2x$ ، بر $2x - 1$ بخش‌پذیر است. در این حالت باقی‌مانده‌ی $P(x)$ بر $x + 2$ ، کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

-۸ (۲)

-۱۰ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۹۰ مقدار مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt[2]{\left(\frac{2x - x^2}{3x + 5}\right)^2}$ ، در نقطه‌ی $x = -2$ ، کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۹۱ خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ و $g(x) = ax^2 + bx$ ، در نقطه‌ی $x = 2$ ، مشترک‌اند. مقدار b ، کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۹۲ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{4x^n - 6x^2 + 1}{ax^3 + 7x^2 - 2}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ ، کدام است؟

$-\frac{6}{11}$ (۴)

$-\frac{5}{12}$ (۳)

$-\frac{6}{17}$ (۲)

$-\frac{4}{17}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۹۳ فرض کنید باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - 4$ و $x + 2$ ، به‌ترتیب ۳ و ۱ باشند. باقی‌مانده‌ی تقسیم $p(x^2) + 4p(-x)$ بر $x - 2$ ، کدام است؟

-۱ (۴)

۰ (۳)

۱ (۲)

۷ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی



۹۴ خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \frac{5x-4}{\sqrt{x}}$ در نقطه‌ی $x=4$ واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

۳ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

-۴ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۹

۹۵ آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sqrt{21-x^2} + 4x$ در بازه‌ی $[5, 6]$ ، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، با کدام مقدار x است؟

$2 + \frac{5}{2}\sqrt{2}$ (۴)

$2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$ (۳)

$3 + 2\sqrt{2}$ (۲)

$4 + \sqrt{2}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۹

۹۶ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x} + 1}$ ، کدام است؟

-0.6 (۴)

-0.8 (۳)

$-1/2$ (۲)

$-1/5$ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۹

۹۷ فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}}$ ، کدام است؟

-۱ (۴)

$-\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

۱ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۹

۹۸ مشتق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x^2 + 2x}}{x^2 - x} \right)^2$ در نقطه‌ی $x=2$ ، کدام است؟

$-\frac{15}{4}$ (۴)

$-\frac{5}{2}$ (۳)

$-\frac{5}{4}$ (۲)

$-\frac{3}{4}$ (۱)

سراسری-تجربی-۹۹

۹۹ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-2x} & ; x \leq -2 \\ -\frac{1}{4}x^2 + bx + c & ; x > -2 \end{cases}$ در $x = -2$ ، مشتق‌پذیر است. مقدار c کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$-\frac{1}{3}$ (۲)

$-\frac{2}{3}$ (۱)

سراسری-تجربی-۹۹

۱۰۰ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax - \sqrt[3]{x^3 - 1}}{4x^n - 12}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{6}$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ، کدام است؟

$\frac{5}{36}$ (۴)

$\frac{1}{12}$ (۳)

$\frac{1}{18}$ (۲)

$\frac{1}{24}$ (۱)

سراسری-تجربی-۹۹

۱۰۱ حاصل $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{[x] + 3}{x + 2}$ ، کدام است؟

۱ (۴)

صفر (۳)

-۱ (۲)

$-\infty$ (۱)

سراسری-تجربی-۹۹



۱۰۲ فرض کنید چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^2 - 1$ بخش‌پذیر باشد. اگر $Q(x) = p(x - 1) + p(1 - x)$ ، آن‌گاه باقیمانده تقسیم $Q(x)$ بر $x - 2$ کدام است؟

- ۱ (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

سراسری-تجربی-۹۹

۱۰۳ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه‌ی $[0, 4]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = \frac{3}{2}$ چه قدر کمتر است؟

- ۱ (۱) 0.3 (۲) 0.4 (۳) 0.5 (۴) 0.6

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۰۴ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{|x^3 - 2x|}{x}$ ، در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۰۵ خط به معادله‌ی $y = 3x - 5$ در نقطه‌ی $x = 2$ بر نمودار تابع $y = g(x)$ مماس است.

اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2x - 2} = \frac{2}{3}$ باشد، $(f \circ g)'(2)$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۰۶ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x}$ ، کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) π (۳) 2π (۴)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۰۷ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{4x - 5}{x + 1}$ و دامنه‌ی $[0, 8]$ ، خط مماس بر نمودار آن موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای

منحنی را به هم وصل کند، این خط مماس، محور y ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

- ۱ (۱) -2 (۲) $-1/5$ (۳) -1 (۴) -0.5

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۰۸ مشتق تابع $f(x) = x \sqrt{\frac{2x+1}{x+2}}$ در نقطه‌ی $x = -3$ ، کدام است؟

- ۱ (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴) $\frac{3}{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۰۹ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{ax+b} & ; x > 2 \\ -x^2 + 6x & ; x \leq 2 \end{cases}$ ، اگر $f'(2)$ موجود باشد، a کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی



۱۱۰ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{4}+h) - f(\frac{1}{4})}{h}$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۱۱ اگر $f(x) = x - \sqrt{4x^2 + x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ کدام است؟

- ۲ (۱) -۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۱۲ در مورد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x}$ کدام بیان، درست است؟

- ۱ $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^+} f(x) = -\infty$ (۱)
 ۲ $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^+} f(x) = +\infty$ (۲)
 ۳ $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^-} f(x) = -\infty$ (۳)
 ۴ $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^-} f(x) = +\infty$ (۴)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۱۳ حد عبارت $\frac{2 - \sqrt{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16}$ وقتی $x \rightarrow 2$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{1}{3}$ (۱) ۲ $-\frac{1}{4}$ (۲) ۳ $-\frac{1}{6}$ (۳) ۴ $-\frac{1}{8}$ (۴)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۱۴ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$ اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x = 2$ از آهنگ تغییر متوسط در بازه‌ی $[1, 2]$ ، کدام است؟

- ۱ $\cdot / 25$ (۱) ۲ $\cdot / 5$ (۲) ۳ $\cdot / 45$ (۳) ۴ $\cdot / 75$ (۴)

سراسری - تجربی - ۹۸

۱۱۵ اگر $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $(f \circ g)'(2) = 6$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟

- ۲ (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) ۳

سراسری - تجربی - ۹۸

۱۱۶ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & ; x \geq 2 \\ -x^2 + ax + b & ; x < 2 \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

- ۲ (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

سراسری - تجربی - ۹۸

۱۱۷ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{5 - 2x}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ کدام است؟

- ۴ (۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{5}{12}$ (۳) $\frac{7}{12}$ (۴) $\frac{5}{6}$

سراسری - تجربی - ۹۸



۱۱۸ اگر $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ کدام است؟

- ۱ -۱ ۲ $-\frac{1}{2}$ ۳ $-\frac{1}{4}$ ۴ صفر

سراسری-تجربی-۹۸

۱۱۹ در مورد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + |x|}$ ، کدام بیان، درست است؟

- ۱ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ ۲ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$
 ۳ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ۴ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

سراسری-تجربی-۹۸

۱۲۰ حد عبارت $\frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt{x}}$ ، وقتی $x \rightarrow -8$ ، کدام است؟

- ۱ -۲۴ ۲ -۱۸ ۳ -۱۲ ۴ -۶

سراسری-تجربی-۹۸

۱۲۱ به ازای کدام مجموعه مقادیر x بازه $(x + 1, 2x - 2)$ یک همسایگی عدد ۳، می‌باشد؟

- ۱ $\emptyset$ ۲ $\{2\}$ ۳ $2 < x < 2/5$ ۴ $1/5 < x < 2$

سراسری-ریاضی-۹۸

۱۲۲ در تابع با ضابطه $f(x) = (x + 2)\sqrt{4x + 1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه $[0, 2]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = \frac{3}{4}$ چه قدر بیش‌تر است؟

- ۱ $0/10$ ۲ $0/15$ ۳ $0/20$ ۴ $0/25$

سراسری-ریاضی-۹۸

۱۲۳ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 2x| & ; x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & ; x \geq 2 \end{cases}$ ، در نقطه‌ی $x = 2$ مشتق‌پذیر است. $a + b$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ ۵

سراسری-ریاضی-۹۸

۱۲۴ اگر $g(x) = x + \sqrt{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3}$ باشد، $(f \circ g)'(1)$ کدام است؟

- ۱ $\frac{2}{3}$ ۲ $\frac{3}{2}$ ۳ ۲ ۴ ۳

سراسری-ریاضی-۹۸

۱۲۵ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 5}{x^2 + ax + b} = -\infty$ باشد، $a + b$ کدام است؟

- ۱ -۱ ۲ صفر ۳ ۱ ۴ ۲

سراسری-ریاضی-۹۸

۱۲۶ در تقسیم عبارت $4x^3 - 19x + 12$ بر دو جمله‌ای $2x - 3$ ، مجموع ضرایب چند جمله‌ای خارج‌قسمت، کدام است؟

- ۱ -۱ ۲ صفر ۳ ۱ ۴ ۲

نارج از کشور-سراسری-انسانی



۱۲۷ حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x + 1}$ کدام است؟

- ۱) -۲ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۲۸ اگر تابع f در $x = -2$ مشتق‌پذیر و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 3}{h} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $f(x)$ در $x = -2$ کدام است؟

- ۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲۹ در تقسیم عبارت $6x^3 - 13x^2 + 18x$ بر دو جمله‌ای $3x - 2$ ، مقدار چند جمله‌ای خارج‌قسمت، به ازای $x = 2$ کدام است؟

- ۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

سراسری-انسانی-۹۶

۱۳۰ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right)$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{5}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

سراسری-تجربی-۹۶

۱۳۱ اگر تابع f در $x = 4$ مشتق‌پذیر و $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 7}{x - 4} = \frac{-3}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $\frac{f(2x)}{x}$ در $x = 2$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

سراسری-ریاضی-۹۶

۱۳۲ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right)^3$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ کدام است؟

- ۱) -۲۱ ۲) -۱۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

سراسری-تجربی-۹۵

۱۳۳ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}$ باشد، آنگاه حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow -1$ کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{4}$

سراسری-تجربی-۹۵

۱۳۴ خط به معادله $y = 3x - 2$ در نقطه $x = 2$ ، بر منحنی پیوسته $y = f(x)$ مماس است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 4f(x)}{x - 2}$ کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

سراسری-ریاضی-۹۵



۱۳۵ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

$\frac{7}{16}$ (۴)

$\frac{7}{24}$ (۳)

$\frac{5}{24}$ (۲)

$\frac{7}{48}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۳۶ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه b کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۳۷ تابع f در $x=2$ مشتق‌پذیر است. اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 9}{h} = \frac{3}{2}$ باشد، مشتق تابع $g(x) = x\sqrt{f(x)}$ در $x=2$ کدام است؟

۴ (۴)

$3/5$ (۳)

۳ (۲)

$2/5$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۳۸ اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} = \frac{3}{2}$ باشد، b کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

-۶ (۲)

-۸ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۳۹ به‌ازای کدام مقادیر a، معادله‌ی $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4$ دارای سه ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت است؟

$(4, \infty)$ (۴)

$(-\infty, 4)$ (۳)

$(-\infty, -4)$ (۲)

$(-\infty, -4) - \{-5\}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۴۰ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x، در نقطه‌ی $x=1$ با نمو ۰/۴۴، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

$\frac{1}{6}$ (۴)

$\frac{1}{12}$ (۳)

$\frac{1}{24}$ (۲)

$\frac{1}{30}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۴۱ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax^n - 6}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$-\frac{1}{8}$ (۲)

$-\frac{1}{6}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۴۲ اگر $f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x|$ و $g(x) = 4x + |x|$ باشند، مشتق تابع fog کدام است؟

مشتق ندارد. (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

سراسری - تجربی - ۹۴

۱۴۳ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x، در نقطه‌ی $x=1$ با نمو ۰/۲۱، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

$\frac{2}{21}$ (۴)

$\frac{3}{42}$ (۳)

$\frac{1}{21}$ (۲)

$\frac{1}{42}$ (۱)



۱۴۴ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{ax^n + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام است؟

- ۱ -۶ (۱) ۲ -۴ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

سراسری-تجربی-۹۴

۱۴۵ به‌ازای مقداری از a چندجمله‌ای $f(x) = x^4 - ax^3 - 8x$ بر $x + 2$ بخش‌پذیر است. کوچک‌ترین ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = 0$ کدام است؟

- ۱ $1 - \sqrt{2}$ (۱) ۲ $1 - \sqrt{5}$ (۲) ۳ $-1 - \sqrt{3}$ (۳) ۴ $-1 - \sqrt{5}$ (۴)

سراسری-ریاضی-۹۴

۱۴۶ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} - 5 & ; x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & ; x < 1 \end{cases}$ ، در نقطه‌ی $x = 1$ مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۴۷ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطه‌ی $x = 4$ تا $x = 6/25$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه‌ی $x = 4$ چقدر کمتر است؟

- ۱ $\frac{1}{36}$ (۱) ۲ $\frac{1}{18}$ (۲) ۳ $\frac{5}{72}$ (۳) ۴ $\frac{1}{12}$ (۴)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۴۸ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$ ، کدام است؟

- ۱ $-\frac{1}{6}$ (۱) ۲ $-\frac{1}{12}$ (۲) ۳ $\frac{1}{12}$ (۳) ۴ $\frac{1}{6}$ (۴)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۴۹ دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = 3x + |x|$ و $g(x) = \frac{3}{4}x + a|x|$ مفروض‌اند. به‌ازای کدام مقدار a ، تابع $g \circ f$ در مبدأ مختصات، مشتق‌پذیر است؟

- ۱ $-\frac{1}{4}$ (۱) ۲ $-\frac{1}{2}$ (۲) ۳ $\frac{1}{2}$ (۳) ۴ هیچ مقدار a (۴)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۵۰ در تقسیم عبارت $(3x^3 - 8x^2 + 7x + 3)$ بر دو جمله‌ای $3x - 2$ ، مقدار چند جمله‌ای خارج قسمت، به‌ازای $x = -1$ ، کدام است؟

- ۱ ۲ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-انسانی

۱۵۱ حد عبارت $\frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}}$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ کدام است؟

- ۱ -۳ (۱) ۲ -۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

سراسری-ریاضی-۹۰



۱۵۲ اگر مماس چپ و مماس راست تابع $f(x) = |x|(x+a)$ در نقطه گوشه‌ای آن عمود بر هم باشند، مجموعه مقادیر a کدام است؟

- ۱ $\{-1\}$ ۲ $\{1\}$ ۳ $\{-1, 1\}$ ۴ $\emptyset$

سراسری-ریاضی-۹۰

۱۵۳ در تابع با ضابطه $f(x) = x\sqrt{x} + |x-1|$ ، مقدار $f'_+(1) + 3f'_-(1)$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ ۵

سراسری-تجربی-۹۰

۱۵۴ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{26}{x^2}$ ، آهنگ متوسط تابع از $x_1 = 2$ تا $x_2 = 3$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن، در $x = \sqrt[3]{12}$ بیشتر است؟

- ۱ ۱ ۲ ۱/۵ ۳ ۲ ۴ ۲/۵

سراسری-تجربی-۹۰

۱۵۵ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{ax^n + 4}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{3}$ ۲ $\frac{2}{3}$ ۳ $\frac{3}{4}$ ۴ $\frac{3}{2}$

سراسری-تجربی-۹۰

۱۵۶ مشتق تابع $y = x\sqrt{x}$ به ازای $x = 4$ کدام است؟

- ۱ $\frac{3}{2}$ ۲ ۳ ۳ ۶ ۴ ۱۲

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-تجربی

۱۵۷ اگر $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ ، $g(x) = \frac{(x+1)^2}{x}$ باشد، حاصل $(f(x) \cdot g(x))'$ به ازای $x = 2$ کدام است؟

- ۱ ۶ ۲ ۴ ۳ ۵ ۴ ۸

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-تجربی

۱۵۸ حد کسر $\frac{x^2 + 2x - 3}{\sqrt{x} + x - 2}$ وقتی $x \rightarrow 1$ چه قدر است؟

- ۱ ۸ ۲ $\frac{16}{3}$ ۳ $\frac{4}{3}$ ۴ $\frac{8}{3}$

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-تجربی

۱۵۹ تابع $y = x|x^2 - x|$ ، در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

- ۱ ۲ ۲ صفر ۳ ۱ ۴ ۳

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۱۶۰ مشتق دوم تابع $y = x^2\sqrt{x}$ در $x = 1$ کدام است؟

- ۱ $\frac{15}{2}$ ۲ $\frac{5}{2}$ ۳ $\frac{15}{4}$ ۴ $\frac{5}{4}$

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی



۱۶۱) حد تابع $y = \sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 - 4x}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ کدام است؟

۴ -۱

۳ ۱

۲ -۳

۱ ۳

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۱۶۲) در تابع $f(x) = \frac{x}{x-1}$ روی بازه $[2, 2.02]$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x ، از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x = 2$ ، چه قدر بیشتر است؟

۴ $\frac{2}{51}$

۳ $\frac{1}{51}$

۲ $\frac{1}{1.1}$

۱ $\frac{1}{2.2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۶۳) حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5-x}}$ کدام است؟

۴ ۴

۳ ۲

۲ -۲

۱ -۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۶۴) اگر $f(x) = 1 - |x|$ ، تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر تابع با ضابطه $y = f(f(x))$ کدام است؟

۴ صفر

۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۶۵) در تقسیم عبارت $(x^2 - 2)(6x + 1)$ بر دو جمله‌ای $3x + 2$ ، خارج قسمت به صورت توان‌های نزولی x نوشته شده است. ضریب جمله از درجه ۱ کدام است؟

۴ ۲

۳ ۱

۲ -۱

۱ -۲

سراسری-انسانی-۹۰

۱۶۶) در تابع با ضابطه $f(x) = x^3$ ، آهنگ متوسط تغییر این تابع وقتی $x = 3$ و $\Delta x = 0.1$ ، از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه $x = 3$ چه قدر بیشتر است؟

۴ 0.91

۳ 0.62

۲ 0.42

۱ 0.31

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۶۷) در تابع با ضابطه $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$ ، تفاضل آهنگ لحظه‌ای در نقطه $a + \frac{h}{2}$ از آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از عدد a به عدد $a + h$ تغییر کند، کدام است؟

۴ ۰

۳ $3h$

۲ $2h$

۱ h

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۶۸) حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9x}}{3x + \sqrt{x}}$ کدام است؟

۴ $\frac{2}{3}$

۳ $\frac{1}{3}$

۲ $-\frac{1}{4}$

۱ $-\frac{1}{3}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۶۹) حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2 + x}$ کدام است؟

۴ $\frac{5}{4}$

۳ $\frac{3}{4}$

۲ $-\frac{1}{4}$

۱ $-\frac{7}{4}$

نارج از کشور-سراسری-تجربی



۱۷۰ اگر $f(x) = (x-2)\sqrt[3]{x^2}$ حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$ کدام است؟

$\frac{4}{3}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۷۱ نقطه‌ی $M(x, y)$ بر روی منحنی به معادله‌ی $y = \sqrt{x+8}$ در حرکت است. T فاصله‌ی نقطه‌ی M تا مبدا مختصات است. آهنگ لحظه‌ای تغییر T در نقطه‌ی $x=7$ کدام است؟

$\frac{5}{4}$ (۴)

$\frac{3}{7}$ (۳)

$\frac{15}{8}$ (۲)

$\frac{15}{16}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۷۲ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$ کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۳ (۲)

∞ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۷۳ اگر $f(x) = \sqrt{x^2\sqrt{x}}$ و $g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ حاصل $f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$ در $x=1$ کدام است؟

$\frac{5}{12}$ (۴)

$-\frac{21}{12}$ (۳)

۱ (۲)

$\frac{21}{12}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۱۷۴ حد کسر $\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} - \sqrt{4x+12}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x} - \sqrt{4x+12}}$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

$-\frac{3}{4}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۱۷۵ حد عبارت $\sqrt{x^2+4x} + \sqrt[3]{x^2+9x^2}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ کدام است؟

-۵ (۴)

۵ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۱۷۶ مشتق تابع $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{x^2-1}{x+\sqrt{x}}$ به ازای $x=1$ کدام است؟

۱ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

۴ (۲)

صفر (۱)

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۱۷۷ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \left[x + \frac{1}{3}\right] + [x]$ روی بازه‌ی $(0, 3)$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی



۱۷۸ اگر $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ و $g(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ ، آن‌گاه $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g \circ f)(x)$ کدام است؟

۲ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

-۱ (۲)

-۳ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۷۹ حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x+19}{x^2+3x-4} + \frac{3}{x+4} \right)$ کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{2}{5}$ (۳)

$-\frac{2}{3}$ (۲)

$-\frac{4}{5}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۸۰ تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{1+|x|}$ در نقطه $x = \alpha$ مشتق ندارد. مقدار $f'_+(\alpha) - f'_-(\alpha)$ کدام است؟

تعریف نشده (۴)

۱ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

-۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۸۱ اگر $f'(x) = \frac{1}{x}$ ، مشتق تابع $f(x + \sqrt{1+x^2})$ کدام است؟

$\sqrt{1+x^2}$ (۴)

$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (۳)

$x - \sqrt{1+x^2}$ (۲)

$-x + \sqrt{1+x^2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۸۲ حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2+2x}}$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

۲ (۳)

-۱ (۲)

۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۸۳ در تابع با ضابطه $f(x) = (2x+1)^{-\frac{1}{2}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از نقطه $x = 4$ تا $x = 12$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه $x = 4$ ، چقدر بیش‌تر است؟

$\frac{11}{270}$ (۴)

$\frac{7}{270}$ (۳)

$\frac{11}{540}$ (۲)

$\frac{7}{540}$ (۱)

سراسری-تجربی-سراسری - آزاد (۹۳)

۱۸۴ حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3}{2x^2+5x+2} - \frac{4}{x^2-4}$ ، کدام است؟

$\frac{7}{12}$ (۴)

$\frac{5}{12}$ (۳)

$-\frac{5}{12}$ (۲)

$-\frac{7}{12}$ (۱)

سراسری-تجربی-سراسری - آزاد (۹۳)

۱۸۵ مشتق راست تابع با ضابطه $f(x) = ([x] - |x|)\sqrt[3]{9x}$ ، در نقطه $x = -3$ ، کدام است؟

$\frac{7}{3}$ (۴)

-۴ (۳)

-۵ (۲)

$-\frac{16}{3}$ (۱)

سراسری-ریاضی-سراسری - آزاد (۹۳)



۱۸۶ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{2x^2+ax+b} = -\infty$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۶ (۳)

۳ (۲)

-۳ (۱)

سراسری-ریاضی-سراسری - آزاد (۹۳)

۱۸۷ اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ و $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ حاصل $f'(x) \cdot g'(f(x))$ کدام است؟

$\frac{1}{2}x$ (۴)

x (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۸۸ در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & x < 1 \end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود است، $f(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟

$3 - 2\sqrt{2}$ (۴)

$2 - 2\sqrt{2}$ (۳)

$2 - \sqrt{2}$ (۲)

$3 - \sqrt{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۸۹ حد عبارت $\frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{2[x]}{2-x}$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

$+\infty$ (۴)

۱ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

$-\infty$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۹۰ اگر $f'(0) = g(0) = 1$ و $f(x) = x + 1 + (g(x))^0$ مقدار $f''(0)$ برابر کدام است؟

$5g''(0) + 20$ (۴)

$2g''(0) + 20$ (۳)

$5g''(0)$ (۲)

$2g''(0)$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۹۱ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^n - 3x + 1}{3x^2 + x}$ اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3}$ باشد، $f(-1)$ کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

-۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۹۲ در تقسیم عبارت $(x-2)(x^2+1)$ بر دو جمله ای $x+2$ مجموع ضرایب در خارج قسمت آن کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

سراسری-انسانی-سراسری - آزاد (۹۲)

۱۹۳ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}} = 3$ باشد، آنگاه حدّ این کسر وقتی $x \rightarrow 3$ کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

سراسری-تجربی-سراسری - آزاد (۹۲)

۱۹۴ اگر $f(x) = \frac{x^2-2}{1+x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ حاصل $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ کدام است؟

$\frac{x-2}{x^2}$ (۴)

$\frac{1}{3x}$ (۳)

$\frac{3}{x^2}$ (۲)

$\frac{3}{x}$ (۱)

سراسری-ریاضی-سراسری - آزاد (۹۲)



۱۹۵ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & ; x < 1 \\ 2\sqrt{2x-3} & ; x \geq 1 \end{cases}$ ، بر روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۲ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۱ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

سراسری-ریاضی-سراسری - آزاد (۹۲)

۱۹۶ اگر $f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt{x^2 - 7x}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ کدام است؟

$-\frac{3}{4}$ (۴)

$-\frac{3}{2}$ (۳)

-۳ (۲)

-۶ (۱)

سراسری-ریاضی-سراسری - آزاد (۹۲)

۱۹۷ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(2x+6)^2} & ; x > 1 \\ ax+b & ; x \leq 1 \end{cases}$ ، مقدار $f'(1)$ موجود است، b کدام است؟

$\frac{10}{3}$ (۴)

$\frac{8}{3}$ (۳)

$\frac{7}{3}$ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۹۸ در تقسیم عبارت $(2x^3 - 5x^2 + x)$ بر دو جمله‌ای $2x + 1$ مجموع ضرایب عددی در خارج قسمت کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

۰ (۲)

-۱ (۱)

سراسری-انسانی-۹۱

۱۹۹ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax+1+\sqrt{2x^2+9}}{3x-2}$ از نقطه‌ی (۲،۱) می‌گذرد، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

۱ (۲)

$-\frac{1}{3}$ (۱)

سراسری-تجربی-۹۱

۲۰۰ تابع با ضابطه $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$ در کدام بازه مشتق‌پذیر است؟

$(-\infty, -1)$ (۴)

$[1, +\infty)$ (۳)

$(-1, 0)$ (۲)

$[0, 1]$ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۱

۲۰۱ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2-4|}{ax^2-x+2} = -1$ ، آنگاه حد راست این عبارت در نقطه‌ی $x = -2$ کدام است؟

$\frac{4}{3}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$-\frac{2}{3}$ (۲)

$-\frac{4}{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۰۲ در تقسیم $(2x-1) \div (4x^3 + 18x^2 - 11x)$ ، مقدار چند جمله‌ای خارج قسمت به ازای $x = \frac{1}{2}$ کدام است؟

۱ (۴)

صفر (۳)

-۱ (۲)

-۳ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-انسانی



۲۰۳ در تابع $f(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{ax - 2}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ باشد، آن گاه $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ، کدام است؟

- ۱) صفر ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۲۰۴ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x}}{x} ; x \geq 1 \\ ax^2 + bx ; x < 1 \end{cases}$ بر روی R مشتق پذیر است. b کدام است؟

- ۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۳ ۴) ۵

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۰۵ در تابع با ضابطه $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$ کدام است؟

- ۱) -۱ ۲) صفر ۳) $-\infty$ ۴) موجود نیست.

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۰۶ اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 2x^2 - 5x^2 - x + m$ ، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، طول‌های دو نقطه تلاقی دیگر آن با محور x ها کدام است؟

- ۱) $-\frac{1}{2}$ و ۱ ۲) $-\frac{1}{2}$ و ۱ ۳) $-\frac{3}{2}$ و -۱ ۴) ۲ و $-\frac{1}{2}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۲۰۷ در صورتی که $f(x) = \frac{x}{1-x}$ باشد، $f'(2)$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۰۸ اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{xf(x+h) - xf(x)}{xh + h} = \frac{1}{x}$ ، مقدار $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{f(x) - f(2)}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{16}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{16}{3}$ ۴) ۳

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۰۹ دو نقطه به طول‌های ۱- و $\frac{1-a}{2}$ روی تابع $y = 3x^2 + ax - 1$ وجود دارند که شیب‌های آن‌ها قرینه یکدیگرند. مقدار a کدام است؟

- ۱) $-1/2$ ۲) -۳ ۳) $2/1$ ۴) $-2/1$

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۱۰ اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل باشد، تابع $g(x) = \frac{x+1}{1+f'(x)}$ در چند نقطه تعریف نمی‌شود؟



- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳



۲۱۱) اگر مشتق تابع $f(x) = \frac{ax^2 + 8x - x^2 - 2a}{x^2 + 4}$ در هر نقطه‌ای برابر $4 - a$ باشد، $f(1) + f'(x)$ کدام است؟

($a \neq 4$)

۴ ۲

۳ ۱

۲ ۳

۱ ۴

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۱۲) حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{x^5 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x}}{\sqrt[5]{x^5 - 1} - \sqrt[2]{x^2 + 1}}$ کدام است؟

۴ -۳

۳ $\frac{3}{2}$

۲ $\frac{1}{2}$

۱ ۱

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۱۳) به ازای چند مقدار صحیح a ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left((a^2 - 4)x^3 - \left(a + \frac{3}{2}\right)x^2 - 1 \right) = +\infty$ می‌شود؟

۴ ۱

۳ ۲

۲ ۳

۱ ۴

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۱۴) حاصل $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x^2 - 4}{|x + 2|(x^2 + 4x + 4)}$ کدام است؟

۴ $-\infty$

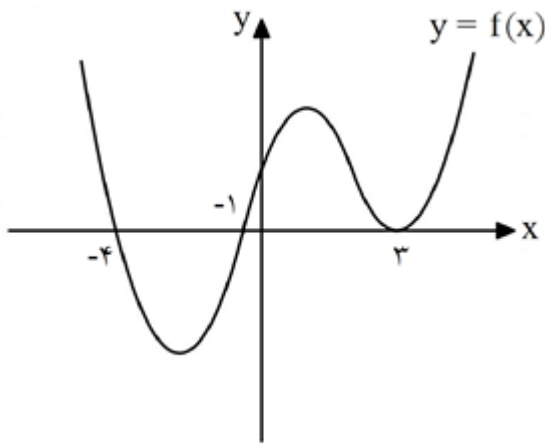
۳ $+\infty$

۲ ۴

۱ -۴

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۱۵) اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل باشد، در این صورت به ازای کدام مقدار a ، $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x)} = -\infty$ است؟
([] نماد جزء صحیح است.)



۴ -۱ و -۴

۳ فقط -۴

۲ فقط -۱

۱ فقط ۳

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۱۶) اگر $f(x) = \frac{[-x]}{1 - 2 \cos x}$ و $g(x) = \frac{[x]}{1 + \cos x}$ باشند، کدام حد درست محاسبه شده است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

۲ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = -\infty$

۱ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = +\infty$

۴ $\lim_{x \rightarrow \pi} g(x) = -\infty$

۳ $\lim_{x \rightarrow \pi} g(x) = +\infty$

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳



۲۱۷ مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{x - 1}$ کدام است؟

$\frac{1}{8}$ (۴)

$-\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{1}{5}$ (۲)

$-\frac{1}{6}$ (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۱۸ اگر تابع $f(x) = x^5 + ax^2 + bx + c$ بر تابع $g(x) = x^2 - 2x^2 - x + 2$ بخش پذیر باشد، باقی مانده $f(x)$ بر $x + 2$ کدام است؟

-60 (۴)

-50 (۳)

50 (۲)

60 (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۱۹ اگر $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 - 4x - 1} - 2\sqrt{x^2 + 6x}}{|x - 1| + x + 2}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} f\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$ کدام است؟

$+\infty$ (۴)

$\frac{5}{4}$ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

$\frac{7}{4}$ (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۲۰ اگر در ریشه‌ای از معادله $2\sqrt{2-x} - ax^2 - 2b = 0$ تابع $f(x) = \frac{x^2 - 2ax^2 + 2b}{x+2}$ حد داشته باشد ولی ناپیوسته باشد،

حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) - x^2}{bx + a}$ کدام است؟

-2 (۴)

2 (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۲۱ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5 - x^2}{2x^2 - ax + b} = -\infty$ باشد، حاصل $A = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(-1)^{[-bx]}}{3^{x-\frac{a}{6}} - 2^{x-\frac{b}{9}}}$ کدام است؟

$-\infty$ (۴)

$+\infty$ (۳)

-1 (۲)

1 (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۲۲ اگر $g(x) = \log_2^x$ و $(f \circ g)(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ باشد، باقی مانده تقسیم تابع $(f \circ f)(x+1)$ بر $x-1$ کدام است؟

$\frac{17}{7}$ (۴)

$\frac{15}{7}$ (۳)

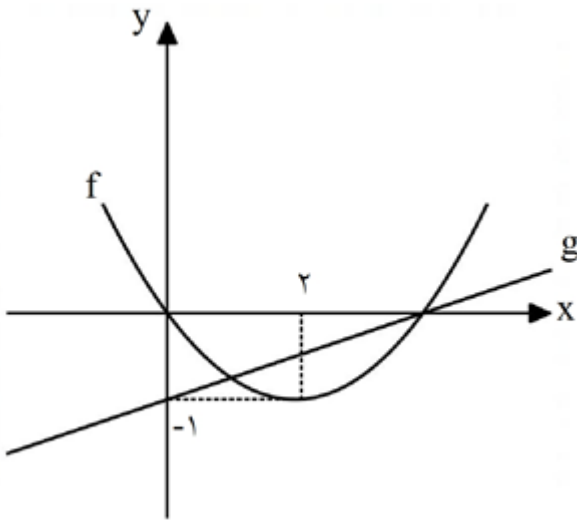
صفر (۲)

-1 (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳



۲۲۳ شکل مقابل، نمودار سهمی f و خط راست g را نمایش می‌دهد. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + x^2 - 5x + 4}{g(2x) + x^3 - x - 63}$ کدام است؟



$\frac{1}{16}$ (۴)

$\frac{1}{12}$ (۳)

$\frac{1}{48}$ (۲)

$\frac{1}{6}$ (۱)

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۲۴ اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + b}{x^2 + 2x - 35} = a$ که در آن $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ باشد، مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{12a \cos^2 x - 6 \cos x - 1}{7 \cos x + 2b}$ کدام است؟

$\frac{1}{7}$ (۴)

$\frac{1}{35}$ (۳)

$\frac{4}{7}$ (۲)

$\frac{4}{35}$ (۱)

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۲۵ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2x + \sqrt{2x-1} - 2}{8x^2 + \sqrt{2x-1} - 1}$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

صفر (۱)

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۲۶ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{\cos^2(\pi x)}{[2x] - \sin(\pi x)}$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

2π (۴)

π (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۲۷ حاصل $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x+2| + [2x]}{x+1 - [-2x]}$ کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

وجود ندارد. (۴)

۲ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

۱ (۱)

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۲۸ اگر $f(x) = \sqrt{x+1} + 2$ آن‌گاه حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{f^{-1}(x)}$ کدام است؟

$\frac{1}{8}$ (۴)

$\frac{1}{6}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

سوالات گردآوری شده-سری (۳)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳



۲۲۹ حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_3 x - \log_3 3}{\log_3 \frac{x}{3}}$ کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

-۱ (۳)

-۲ (۴)

سوالات گردآوری شده-سری (۲) سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۳۰ اگر $\lim_{a \rightarrow b} \frac{2a^2b - ab^2 - b^2}{a^2 - b^2} = \frac{1}{8}$ آن گاه مقدار b کدام است؟

۶ (۱)

$\frac{1}{6}$ (۲)

۴ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۴)

سوالات گردآوری شده-سری (۲) سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{5 - [x]}{x - 6}$$

۲۳۱ حد مقابل را محاسبه کنید. ([]) نماد جزء صحیح است.)

سوالات گردآوری شده-سری (۲) سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۳۲ حدود زیر را محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$ الف)

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{2x + 1}$
ج) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 4}$

سوالات گردآوری شده-سری (۲) سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۳۳ ثابت کنید. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5 + x^2}}{x^2} = +\infty$

سوالات گردآوری شده-سری (۲) سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۳۴ اگر باقی‌مانده چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + 2x^2 - ax + b$ بر $x - 1$ و $x - 2$ به ترتیب برابر ۳ و -۵ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

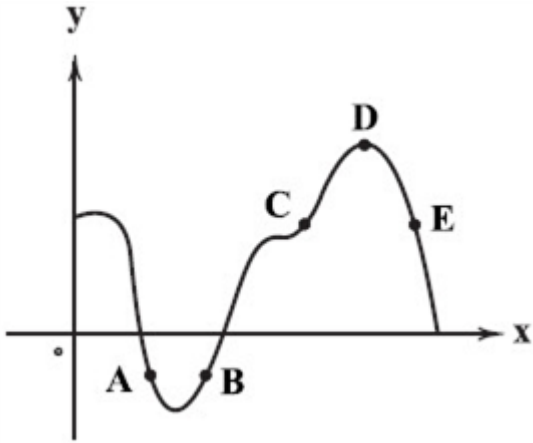
سوالات گردآوری شده-سری (۲) سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۳۵ اگر $f(x) = 2x^2 - x + 2$ باشد:
الف) مقدار $f'(3)$ را به دست آورید.
ب) معادله خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر آن بنویسید.

سوالات گردآوری شده-سری (۲) سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳



نقاط داده شده در منحنی را به شیب‌های نوشته شده در جدول نظیر کنید. ۲۳۶



۲	۱	۰	-۲	-۴	شیب
					نقطه

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در دو شرط $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ صدق کند. مسئله چند جواب دارد؟ ۲۳۷

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

عبارت‌های $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید. ۲۳۸

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

حاصل حدهای زیر را به دست آورید. ۲۳۹

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{2 + \frac{1}{\sqrt{x}}} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} \quad (\text{الف})$$

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

چندجمله‌ای $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 8$ را در نظر بگیرید. ۲۴۰
الف) آیا $f(x)$ بر $(x-1)$ بخش‌پذیر است؟ چرا؟
ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید.
پ) $f(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل‌هایش بنویسید.

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

اگر $f(x)$ چندجمله‌ای درجه ۴ و $f(6) = 720$ باشد، در صورتی که $f(x)$ در رابطه‌ی ۲۴۱
 $(x-2)f(x+2) = (x+2)f(x+1)$ صدق کند، باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 3x + 3$ کدام است؟
۱) $x+2$ ۲) $-x-2$ ۳) 6 ۴) -6

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

اگر $Q(x)$ خارج قسمت تقسیم $x^3 + 1$ بر $x^2 + 1$ باشد، باقی‌مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x^2 + 1$ کدام است؟ ۲۴۲
۱) 6 ۲) -6 ۳) 12 ۴) -12

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱

$$A(x, f(x)) \Rightarrow m_{OA} = f'(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = f'(x)$$

$$O(.,.) \Rightarrow f(x) = x f'(x) \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{-2x^2 + x + 1} = x \left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(-2x^2 + x + 1) - \sqrt{x}(-4x + 1)}{(-2x^2 + x + 1)^2} \right)$$

$$\frac{\sqrt{x}}{1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 4x^2 - x}{-2x^2 + x + 1} \Rightarrow -2x^2 + x + 1 = 3x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow 5x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

$$1 \cdot x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{5} \text{ غ ق و} \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲

مماس یعنی هم مقدار و هم مشتق برابر دارند

$$f(2) = -2a - 5$$

$$f'(2) = -a$$

$$\Rightarrow -a + 2a + 5 = 2 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{f(2)}{f'(2)} = \frac{-3 \times \frac{-2}{2} - 5}{\frac{2}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{2}{2}} = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{k[2^+] - 2}{2^+ - 2} = \frac{2k - 2}{0^+} = +\infty \Rightarrow 2k - 2 > 0 \Rightarrow k > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{k[2^-] - 2}{2^- - 2} = \frac{k - 2}{0^-} = +\infty \Rightarrow k - 2 < 0 \Rightarrow k < 2$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$1 < k < 2 \Rightarrow \pi < k\pi < 2\pi \Rightarrow \sin k\pi < 0$$

پس نقاطی به فرم $(k\pi, \sin k\pi)$ دارای طول مثبت و عرض منفی هستند، یعنی در ناحیه چهارم قرار دارند.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۴

$$\begin{cases} \forall x - 9 < 5 \Rightarrow x < 2 \\ 5 < 3x + 1 \Rightarrow x > \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{4}{3} < x < 2 \Rightarrow a = \frac{4}{3}, b = 2 \Rightarrow ab = \frac{8}{3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۵

$$x = 1 : \text{پیوستگی در } a = b + c (*)$$

$$f'(x) = \begin{cases} a \times \frac{1}{x\sqrt{x}} & x \geq 1 \\ c & 0 < x < 1 \end{cases}, f'_+(1) = f'_-(1) \Rightarrow \frac{1}{3}a = c \Rightarrow *$$

$$a = b + \frac{1}{3}a \Rightarrow b = \frac{2}{3}a \Rightarrow \frac{ab}{c^2} = \frac{a \times \frac{2}{3}a}{\frac{1}{9}a^2} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۶

$$f(x) = mx + 2a, f(2a) = 0 \Rightarrow 2ma + 2a = 0 \Rightarrow m = -\frac{2}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{2}{2}x + 2a \Rightarrow f^{-1} : \frac{2}{2}x = -y + 2a \Rightarrow x = -\frac{2}{2}y + 2a \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{2}{2}x + 2a$$

$$\Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(-\frac{2}{2}x + 2a\right)^2}{x \left|-\frac{2}{2}x + 2a\right|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4}{4}x^2}{x \left|-\frac{2}{2}x\right|} \xrightarrow{x < 0} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4}{4}x^2}{-\frac{2}{2}x^2} = -\frac{4}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۷

باید + باشد تا مقداری برای a حاصل شود

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{در مخرج}} \left| \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} + a \right| + a = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} + a + a = 0 \Rightarrow -\frac{1}{6} \Rightarrow [a] = -1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۸

$$L = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{2}{a}\right)^+} \frac{2\sqrt{x - \frac{2}{a}}}{\sqrt{x - \frac{2}{a}} \times \sqrt{x + \frac{2}{a}}} + \lim_{x \rightarrow \left(\frac{2}{a}\right)^+} \frac{2\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{2}{a}}\right)}{\sqrt{x - \frac{2}{a}} \times \sqrt{x + \frac{2}{a}}}$$

$$\times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{2}{a}}}{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{2}{a}}} \times \frac{\sqrt{x - \frac{2}{a}}}{\sqrt{x - \frac{2}{a}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{2}{a}}} + \frac{2 \times 0}{\sqrt{\frac{2}{a}} + 2\sqrt{\frac{2}{a}}} = 2\sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{4a}{2}} = \sqrt{\frac{2a}{1}}$$

تذکر: برای ساده‌تر شدن راه حل و رسیدن به گزینه درست می‌توان $a = 2$ را در نظر گرفت.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۹

$$f(x) = \begin{cases} a + |x| & x < 1 \\ b\sqrt{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ نقطه شکستگی ضابطه اول است} \Rightarrow$$

f در نقطه ۱ مشتق‌پذیر است $\rightarrow f^*$ در صفر مشتق‌ناپذیر است

$$a + |1| = b\sqrt{1^2} \Rightarrow a + 1 = b$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$0 + 1 = \frac{2}{2}b \Rightarrow 1 = \frac{2}{2}b \Rightarrow b = \frac{2}{2}$$

$$a + b = \frac{3}{2} = 2$$

$$a = \text{عرض از مبدا} \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{a} = 1 \Rightarrow m = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{a}{2} \Rightarrow f(x) = -\frac{a}{2}x + a$$

$$\Rightarrow y = -\frac{a}{2}x + a \Rightarrow \frac{a}{2}x = -y + a \Rightarrow x = -\frac{2}{a}y + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{2}{a}x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{2}{a}x + 2}{\left| 2\left(-\frac{a}{2}x + a\right) - a\left(-\frac{2}{a}x + 2\right) \right|} = 2$$

$$\text{مخرج} = \left| -ax + \cancel{2a} + 2x - \cancel{2a} \right| = |2x - ax| = |x| \times |2 - a| = -x|2 - a|$$

$$\text{ضریب بالاترین درجه صورت} = -\frac{2}{a}$$

$$\text{ضریب بالاترین درجه در مخرج} = -|2 - a|$$

$$\text{جواب حد} = \frac{-\frac{2}{a}}{-2|2 - a|} = 2 \Rightarrow |2 - a| = \frac{1}{a} \Rightarrow a|2 - a| = 1$$

$a \geq 2 \Rightarrow a(-2 + a) = 1 : a^2 - 2a - 1 = 0$
 $\Delta = 8$
 $a = 1 \pm \sqrt{2}$
 $a \geq 2 \Rightarrow a = 1 + \sqrt{2}$

$a \leq 2 \Rightarrow a(2 - a) = 1$
 $-a^2 + 2a - 1 = 0$
 $a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

غ ق ق چون گفته مقدار غیر صحیح a

$$\text{جواب} = +\infty \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{4}}{\cdot} = +\infty \Rightarrow \sqrt[3]{4} \text{ بوده مخرج} \Rightarrow x^2 + ax + b = (x - \sqrt[3]{4})^2$$

$$x^2 - 2\sqrt[3]{4}x + \sqrt[3]{16}$$

$a = -2\sqrt[3]{4}$
 $b = \sqrt[3]{16}$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt[3]{16}}{-2\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{16}}{-\sqrt[3]{32}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = -\sqrt[3]{0.5} \Rightarrow \left[-\sqrt[3]{0.5}\right] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2a^+} \frac{2\sqrt{x - 2a} + 2(\sqrt{x} - \sqrt{2a})}{\sqrt{x - 2a} \times \sqrt{x + 2a}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2a^+} \frac{2\sqrt{x - 2a}}{\sqrt{x - 2a} \times \sqrt{x + 2a}} + \lim_{x \rightarrow 2a^+} \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{2a}}{\sqrt{x - 2a} \times \sqrt{x + 2a}}$$

$$\Rightarrow \frac{2(\sqrt{x} - \sqrt{2a})}{\sqrt{x - 2a} \times \sqrt{x + 2a}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2a}}{\sqrt{x} + \sqrt{2a}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2a^+} \frac{\sqrt{a - 2a}}{(\sqrt{x + 2a})(\sqrt{x} + \sqrt{2a})} = 0$$

$$\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{2}{\sqrt{2a}} + 0 = \sqrt{\frac{2}{2a}} = \sqrt{\frac{1}{a}}$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۳

$$f(x) = \lambda x^{\frac{0}{r}} + \epsilon x^{\frac{1}{r}} \Rightarrow f'(x) = r \cdot x^{\frac{r}{r}} + \epsilon x^{-\frac{1}{r}}$$

$$\frac{f(\alpha) - \cdot}{\alpha - \cdot} = f'(\alpha) \Rightarrow \lambda \alpha^{\frac{0}{r}} + \epsilon \alpha^{\frac{1}{r}} = r \cdot \alpha^{\frac{0}{r}} + \epsilon \alpha^{\frac{1}{r}} \Rightarrow \epsilon \alpha^{\frac{1}{r}} = 1 \Rightarrow \epsilon \alpha^{\frac{1}{r}} \xrightarrow{\alpha > \cdot} 1 = \epsilon \alpha^{\frac{1}{r}} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{r}$$

$$\text{شیب خط} = f'(\alpha) = f'\left(\frac{1}{r}\right) = r \cdot \times \frac{1}{r\sqrt{r}} + \epsilon \sqrt{r} = \epsilon \sqrt{r} + \epsilon \sqrt{r} = \lambda \sqrt{r}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۴

$$y = -ax + 2$$

$$f(4) = -4a + 2 \xrightarrow{+} -5a + 2 = -1 \Rightarrow a = \frac{3}{5} = \cdot / \epsilon \Rightarrow f'(4) = -a = -\cdot / \epsilon$$

$$f'(4) = -a$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۵

$$\left. \begin{aligned} x \rightarrow (-1)^+ : \frac{1-k[(-1)^+]}{\cdot} = -\infty \rightarrow \frac{1+k}{\cdot} = -\infty \rightarrow 1+k > \cdot \Rightarrow k > -1 \\ x \rightarrow (-1)^- : \frac{1-k[(-1)^-]}{\cdot} = -\infty \rightarrow \frac{1+\epsilon k}{\cdot} = -\infty \rightarrow 1+\epsilon k < \cdot \Rightarrow k < -\frac{1}{\epsilon} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$-1 < k < -\frac{1}{\epsilon} \Rightarrow -\pi < k\pi < -\frac{\pi}{\epsilon} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \cos(k\pi) < \cdot \\ k\pi < \cdot \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{نقطه در ناحیه سوم قرار دارد.}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۶

$$\left\{ \begin{aligned} a+b &= 4 \xrightarrow{+} 5b = 8 \Rightarrow b = \frac{8}{5} \Rightarrow a = 4 - \frac{8}{5} = \frac{12}{5} \Rightarrow b-a = -\frac{4}{5} \\ 4b-a &= 4 \end{aligned} \right.$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۷

$$\left\{ \begin{aligned} f(2) &= \cdot \Rightarrow 8 + 2a - b = \cdot \Rightarrow 2a - b = -8 \\ f'(x) &= 2x^r + a \Rightarrow f'(2) = \cdot \Rightarrow a = -12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = -16 \Rightarrow b-a = -4$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۸

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{\left(1 - \frac{a}{r}\right) - (1-a)}{r} = \frac{1}{r}a$$

$$f'(x) = \frac{a}{x^r} \Rightarrow \frac{a}{x^r} = \frac{a}{r} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x^r &= r \\ 1 < x < r \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = \sqrt{r}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۹

$$x \rightarrow (-2\pi)^+ : \frac{4-2k}{\cdot} = +\infty \Rightarrow k < 2$$

$$x \rightarrow (-2\pi)^- : \frac{4-2k}{\cdot} = +\infty \Rightarrow \frac{4}{r} < k$$

$$\Rightarrow \frac{4}{r} < k < 2 \Rightarrow -2 < -k < -\frac{4}{r} \Rightarrow [-k] = -2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۰

$$x+2 = \cdot \Rightarrow x = -2 \Rightarrow r = f(-2) = -22 + 24 - 2a + 5 = \cdot \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -1/5$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۱

$$rab + c = 3a^r : \text{شرط پیوستگی}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2b & x > a \\ \epsilon x & x < a \end{cases}$$

$$f'_+(a) = f'_-(a) \Rightarrow 2b = \epsilon a \Rightarrow b = \epsilon a \Rightarrow 2a(2a) + c = 3a^r \Rightarrow c = -3a^r$$

$$a^r + b - c = a^r + 3a + 3a^r = a^r + 3a^r + 3a = (a^r + 3a^r + 3a + 1) - 1 = (a+1)^r - 1$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۲

$$(0, 1), (3, 5) \in d$$

$$f'(3) = m_d = \frac{5-1}{3-0} = \frac{4}{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۳

$$\begin{aligned} f'(1) - 2g'(1) &= (f - 2g)'(1) \\ f(x) - 2g(x) &= \frac{|2x-4|}{\sqrt{x^2}} - \frac{2|x-2| + 2\sqrt{3x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{|2x-4| - |2x-4| - 2\sqrt{3x}}{\sqrt{x^2}} \\ &= \frac{-2\sqrt{3x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{-2\sqrt{3x}^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{2}}} = -2\sqrt{3x}^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow (f - 2g)'(x) = -2\sqrt{3} \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}-1} \\ &\Rightarrow (f - 2g)'(1) = +\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۴

$$x \rightarrow \pi^- \Rightarrow [x - \pi] = \left[\cdot^- \right] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cot x}{[x - \pi]} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos x}{(-1) \sin x} = \frac{-1}{(-1)(0^+)} = +\infty$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون بین f و f^{-1} یک نقطه برخورد است پس این نقطه برخورد روی خط $y = x$ قرار دارد یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = \frac{f(a)}{a} = \frac{a}{a} = 1 \quad \text{چون } f(0) = 2 \text{ پس: } a \neq 0 \text{ در ضمن } f(a) = a$$

تذکر: در اصل سؤال کلمه «فقط» وجود نداشت که در این صورت سؤال ایراد پیدا می‌کرد و جواب هر عددی می‌توانست بشود. مثلاً:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x} = \frac{f(2)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\begin{array}{ccc} f^{-1} & & f \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & & f(a) \end{array}$$

یکی از نقاط برخورد f و f^{-1} : $(2, 0)$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا معادله خط را می‌نویسیم: ۲۶

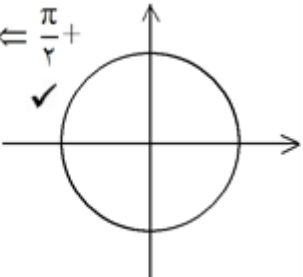
$$\begin{aligned} a &= \frac{6 - (-12)}{2/5 - (-0/5)} = \frac{18}{2} = 9 \Rightarrow y = 6x - 9 \\ 6 &= 6(2/5) + b \Rightarrow b = -9 \end{aligned}$$

خط بر منحنی مماس است $\Leftrightarrow$ معادله تقاطع ریشه مضاعف دارد $\Delta = 0$

$$\begin{aligned} \frac{a}{2x-1} &= 6x-9 \Rightarrow 12x^2 - 24x + 9 - a = 0 \xrightarrow[\Delta=0]{b^2-4ac} 12^2 - (12)(9-a) = 0 \\ &\Rightarrow 12(12-9+a) = 0 \Rightarrow 3+a = 0 \Rightarrow a = -3 \end{aligned}$$

$$f(5) = \frac{-3}{2(5)-1} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۲۷

$$\begin{aligned} \cos x < 0 &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \checkmark \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= +\infty \Rightarrow f(x) < 0 \\ \frac{\pi}{2} &= \frac{3/14}{2} \simeq 1/5 \end{aligned}$$


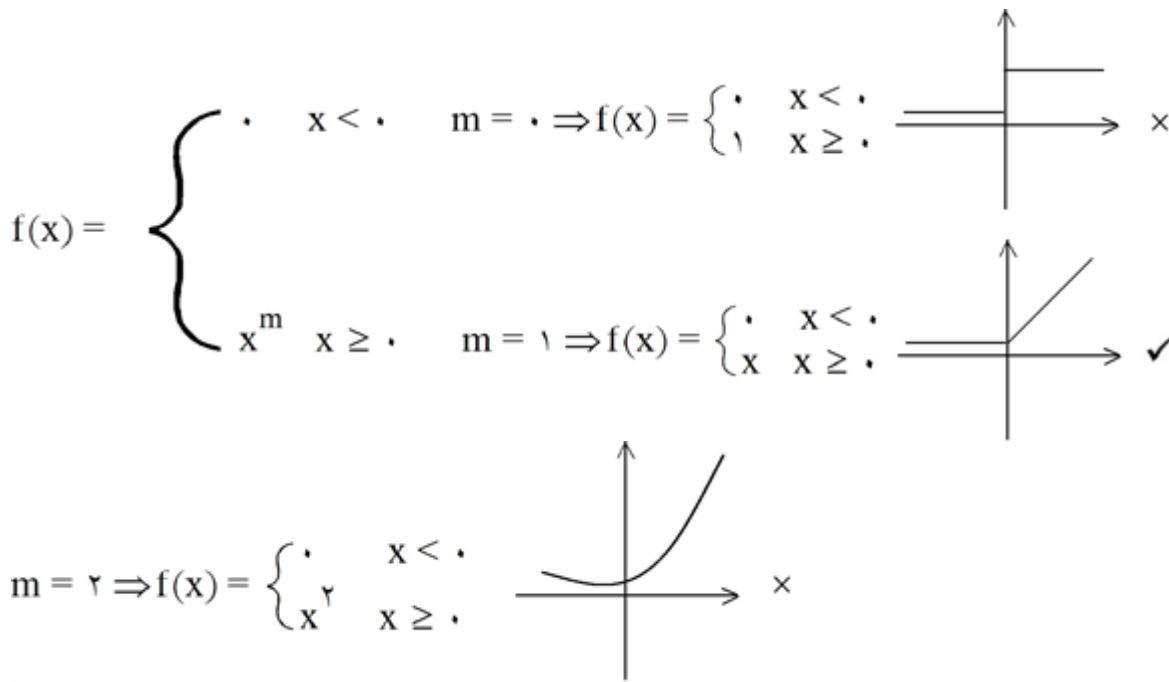


$$a = 0$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از آنجا که a گوشه‌ای است پس می‌تواند هر مقداری باشد، فرض:

$$b = 0$$

b یک عدد ثابت است. فرض



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $x = 0$ ریشه مخرج است اما حد جواب دارد پس $x = 0$ ریشه صورت هم هست

$$a + \sqrt{c} = 0 \Rightarrow a = -\sqrt{c}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + \sqrt{bx+c}}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{bx+c} - \sqrt{c}}{x} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{bx} + \cancel{c} - \cancel{c}}{\cancel{x}(\sqrt{bx+c} + \sqrt{c})} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{b}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{c}}{2}$$

$$\frac{ab}{c} = \frac{-\sqrt{c} \times \frac{\sqrt{c}}{2}}{c} = -\frac{1}{2}$$



$$f(x) = \sqrt{ax-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax-1}}$$

$$m = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2\sqrt{ax-1}} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3a = 2\sqrt{ax-1} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow 3y = x + 2 \Rightarrow x + 2 = 2\sqrt{ax-1} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow x + 2 = 2\left(\frac{3a}{2}\right) = 3a \Rightarrow x = 3a - 2$$

$$3 \Rightarrow 3 + 2 = 2\sqrt{a(3+2-1)} - 1 \Rightarrow 9a^2 - 16a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -\frac{2}{9} \end{cases}$$

$$f(5) = \sqrt{2 \times 5 - 1} = \sqrt{9} = 3$$

راه دوم:

$$B(-1, 1) \Rightarrow \text{معادله خط مماس: } y = \frac{x+2}{3}$$

پس اگر خط مماس را با تابع قطع دهیم باید ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\frac{x+2}{3} = \sqrt{ax-1} \Rightarrow x+2 = 3\sqrt{ax-1} \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 9ax - 9$$

$$x^2 + (4-9a)x + 13 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} \begin{cases} 16 - 36a = 0 \Rightarrow a = \frac{4}{9} \\ 16 - 36a = -16 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{2x-1} \Rightarrow f(5) = \sqrt{9} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x)}{\sin x} = \frac{f(x)}{0^+} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \text{عدد منفی}$$

$$\left(\text{گزینه ۲} \right) \lim_{x \rightarrow \pi^-} 2 \left[\frac{x}{\pi} \right] + 1 = 1$$

$$\left(\text{گزینه ۴} \right) \lim_{x \rightarrow \pi^-} \left[\frac{2x}{\pi} \right] - 2 = 2 - 2 = 0$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۱

$$\left(\text{گزینه ۱} \right) \lim_{x \rightarrow \pi^-} \left[\frac{2x}{\pi} \right] - 1 = 0$$

$$\left(\text{گزینه ۳} \right) \lim_{x \rightarrow \pi^-} 2 \left[\frac{x}{\pi} \right] + 2 = 4$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون تابع در $a < x \leq a$ مشتق پذیر است، پس نقطه گوشه $x = a$ است. ۳۲

$$x = a \Rightarrow f(x) \text{ پیوسته} \checkmark$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ m(x-a)^{m-1} & x > a \end{cases}$$

$$f'_-(a) = 0 \Rightarrow f'_+(a) \neq 0 \Rightarrow m(a-a)^{m-1} \neq 0 \Rightarrow m = 1$$

$$\left. \begin{matrix} \text{حاصل حد} = 2 \\ \text{حد مخرج} = 0 \end{matrix} \right\} \text{حد صورت} = 0 \Rightarrow a + \sqrt{1} = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{bcx^2 + (b+c)x + 1} - 1}{x} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bcx^2 + (b+c)x + 1 - 1}{x(\sqrt{bcx^2 + (b+c)x + 1} + 1)} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{bcx + b + c}{\sqrt{bcx^2 + (b+c)x + 1} + 1} = 2$$

$$\frac{b+c}{2} = 2 \Rightarrow b+c = 4$$

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{b+c}{a} = \frac{4}{-1} = -4$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۳



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۳۴

$$\frac{f(-1) - f(0)}{-1} = \frac{\Lambda(-a+1) - 1}{-1} = -11 \Rightarrow -\Lambda a + 1 = 11 \Rightarrow -\Lambda a = 10 \Rightarrow a = -\frac{10}{\Lambda}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \Lambda(x^{\Lambda} + 1)^{\Lambda-1}(\Lambda x + 1) + a(x^{\Lambda} + 1)^{\Lambda-1} \xrightarrow{x=1} f'(1) = \Lambda$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۵

$$Vy - x = 5 \Rightarrow y = \frac{1}{V}(x + 5)$$

$$\frac{ax - 1}{\Lambda x + 1} = \frac{1}{V}(x + 5) \Rightarrow (\Lambda x + 1)(x + 5) = V(ax - 1) \Rightarrow \Lambda x^2 + 16x + 5 = Vax - V$$

$$\Rightarrow \Lambda x^2 + x(16 - Va) + 12 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} \Delta = (16 - Va)^2 - (12\Lambda)^2 = 0 \Rightarrow (16 - Va) = \pm 12\Lambda$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16 - Va = 12\Lambda \Rightarrow a = \frac{4}{V} \Rightarrow \text{نقطه تماس} : A\left(-2, \frac{4}{V}\right) \in \text{ناحیه دوم} \\ 16 - Va = -12\Lambda \Rightarrow a = \frac{4}{V} \Rightarrow A(2, 1) \in \text{ناحیه اول} \end{cases}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۳۶

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{\Lambda}^+} \frac{a + \Lambda[-x]}{1 - \Lambda x} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\Lambda}^+} \frac{a - \Lambda}{1 - \Lambda x} = -\infty \Rightarrow a - \Lambda > 0 \Rightarrow a > \Lambda > 0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{\Lambda} \Rightarrow -1 < \frac{1}{a} - 1 < -\frac{2}{\Lambda}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\Lambda} < \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{1}{a} - 1 \right) < -\frac{1}{\Lambda}$$

$$\frac{x}{a} - x = \left(\frac{1}{a} - 1 \right) x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\Lambda}} \left[\frac{x}{a} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\Lambda}} (-1) = -1$$

$$\text{فرض } a = \Lambda \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\Lambda}} \left[\frac{x}{a} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\Lambda}} \left[\frac{x}{\Lambda} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{\Lambda}} \left[-\frac{\Lambda x}{\Lambda} \right] = \left[-\frac{\Lambda}{\Lambda} \right] = -1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع باید در $x = a$ نیز مشتق پذیر باشد. پس در این نقطه در ابتدا باید پیوسته باشد. ۳۷

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = ab + c, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \frac{1}{a} = f(a) \xrightarrow{\text{پیوستگی}} ab + c = \frac{1}{a} (*)$$

تابع مشتق را به دست می آوریم:

$$f'(x) = \begin{cases} b & ; x < a \\ -\frac{1}{x^2} & ; x > a \end{cases} \Rightarrow f'_-(a) = b, f'_+(a) = -\frac{1}{a^2}$$

مشتق های چپ و راست نیز باید با هم برابر باشند:

$$b = -\frac{1}{a^2} \xrightarrow{(*)} a \left(-\frac{1}{a^2} \right) + c = \frac{1}{a} \Rightarrow c = \frac{2}{a} \Rightarrow ac = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۸

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{1} = \frac{1}{1} f(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2} = 0 \xrightarrow{x=1} f'(1) \cdot g(1) - g'(1) f(1) = 0$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۳۹

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2}{x^2 - [x^2]} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2}{x^2 - 2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x^2 - [x^2]} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x^2 - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{4}$$

پس مجموع حد ها برابر $\frac{1}{4}$ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۴۰

$$g'(\sqrt[5]{x}) \cdot f'(g(\sqrt[5]{x})) = (f \circ g)'(\sqrt[5]{x})$$

$$x = \sqrt[5]{x} > 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{x}}, g(x) = \frac{1}{x^5}$$

$$(f \circ g)(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{x} \left(\frac{1}{x^5} \right)} = -x \Rightarrow (f \circ g)'(x) = -1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۴۱

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{|f(x)|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\text{شیب خط } g}{|\text{شیب خط } f|} = \frac{2}{-\frac{2}{3}} = -3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون حد صورت صفر است پس حد مخرج نیز باید صفر باشد. ۴۲

$$a + b = 0 \Rightarrow a = -b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{b(\sqrt{2-x} - 1)}{-bx + b} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x} - 1}{1-x} \xrightarrow{\sqrt{x}=t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-t} - 1}{1-t^2} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\cancel{1-t}(\sqrt{2-t} + 1)}{(1-\cancel{t})(1+t)(\sqrt{2-t} + 1)} = \frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{6}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۴۳

$$y = x^r - 1$$

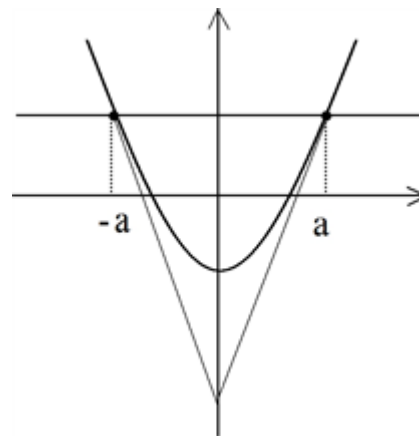
$$y' = rx \begin{cases} ra \\ -ra \end{cases}$$

$$ra \times (-ra) = -1$$

$$a = +\frac{1}{r} \rightarrow y = \left(+\frac{1}{r}\right)^r - 1 = -\frac{r}{r}$$

$$ra^r = 1 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{r}$$

$$a = -\frac{1}{r} \rightarrow y = \left(-\frac{1}{r}\right)^r - 1 = -\frac{r}{r}$$



$$\text{مجموع} = -\frac{r}{r}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۴۴

$$g'(-\sqrt[3]{x}) f'(g(-\sqrt[3]{x})) \Rightarrow (f \circ g)'(-\sqrt[3]{x})$$

$$D_g = (-\infty, \infty) : g(x) = \frac{1}{x^3} \xrightarrow{g(x)=t} f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}}} = \sqrt[3]{x} = x$$

$$\Rightarrow (f \circ g)'(x) = 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۴۵

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|-2x|}{\frac{2}{3}x} = \frac{-2x}{\frac{2}{3}x} = -3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۴۶

$$\lambda a - b = 0 \Rightarrow b = \lambda a \Rightarrow a = \frac{b}{\lambda}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}} - 2}{\frac{x}{\lambda} - 1} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}} + 2}{2+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 2}{\frac{x}{\lambda} - 2} \times \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 2^2}{2+2+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 4}{6x - 4\lambda} = \frac{1}{6}$$

تذکر: سؤال با قاعده هوییتال نیز قابل حل است.



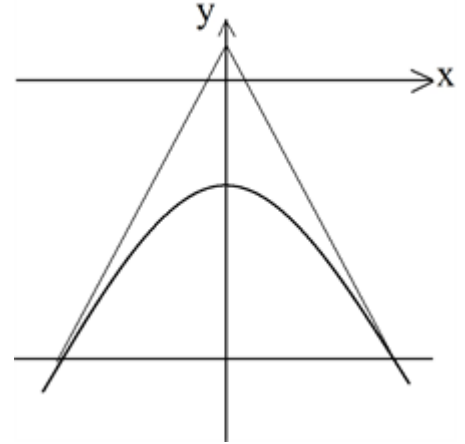
۴۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. خط d سهمی $y = -x^2 - 1$ را در دو نقطه قطع کرده است.

برای اینکه دو خط مماس بر هم عمود باشند، لازم است که شیب‌های آن‌ها $+1$ و -1 باشند، زیرا نسبت به خط $x = 0$ متقارن هستند، پس مشتق تابع را برابر ± 1 قرار می‌دهیم تا طول نقطه برخورد حاصل شود:

$$y' = -2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \xrightarrow{y = -x^2 - 1} y = -\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$$

این همان عرض خط d است و فاصله آن از مبدأ مختصات برابر $1/25$ است.



۴۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f'(x) = \frac{1 \times \sqrt{2x+1} - \frac{2}{\sqrt{2x+1}} \times x}{2x+1} \Rightarrow f'(4) = \frac{3 - \frac{2}{2}}{9} \Rightarrow f'(4) = \frac{5}{27}$$

۴۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = vx - 2 \Rightarrow m = v \xrightarrow{m \times m' = -1} m' = -\frac{1}{v}; y' = \frac{-5(1+2x) - 2(1-5x)}{(1+2x)^2} = \frac{-v}{(1+2x)^2}$$

$$y'(x) = -\frac{1}{v} \Rightarrow \frac{-v}{(1+2x)^2} = -\frac{1}{v} \Rightarrow (1+2x)^2 = 49$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+1 = 7 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow A(3, -2) \\ 2x+1 = -7 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow B(-4, -2) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(3 - (-4))^2 + (-2 - (-2))^2} = \sqrt{50} \Rightarrow AB = 5\sqrt{2}$$

۵۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\lambda+1} &= 2, \lim_{x \rightarrow 2^-} \lambda a + 2b = \lambda a + 2b = 2 \\ f'_+(2) &= \frac{2}{2\sqrt{2(2)+1}} = \frac{2}{5}, f'_-(2) = \lambda a + b \Rightarrow \lambda a + b = \frac{2}{5} \end{aligned} \right\} b = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + |x|}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax - x}{x} = a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 12}}{x + 2} \times \frac{2x - \sqrt{x^2 + 12}}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x^2 - 4)}{(x + 2)(2x - \sqrt{x^2 + 12})} \times \frac{1}{-4 - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x + 2)(x - 2)}{x + 2} \times \frac{1}{-8} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} p(x) = (x - 1)q(x) + 2 \\ p'(x) = (x^2 - 1)q'(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(-2) = -2q(-2) + 2 \xrightarrow{P(-2)=0} q(-2) = \frac{2}{2} \\ P'(-2) = 0 \Rightarrow P(-2) = 0 \end{cases}$$

$$h'(x) = f'\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2f'\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\otimes \rightarrow h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\pi\right) \otimes$$

$$g(x) = f(x) \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} - 2 = -\sqrt[3]{x} \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ناحیه چهارم} \\ \sqrt[3]{x} = -2 \Rightarrow x = -8 \text{ ناحیه دوم} \end{cases}$$

$$g'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow m = g'(-8) = \frac{2}{3}(-8)^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}, y - 2 = -\frac{1}{3}(x + 8) \xrightarrow{x=0}$$

$$y = -\frac{2}{3} \Rightarrow |y| = \frac{2}{3}$$

$$p(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^{2n-1} + 2(-2)^{2n-2} + \frac{1}{27}(-2)^6 - \frac{1}{9}(-2)^4 + a = 0 \Rightarrow a = -27 + 9 \Rightarrow a = -18$$

$$\begin{cases} p(1) = 1 + 2 + \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - 18 = a + b \\ p(-1) = -1 + 2 + \frac{1}{27} - \frac{1}{9} - 18 = -a + b \end{cases} \xrightarrow{-} 2 = 2a \Rightarrow a = 1, b = -\frac{20}{27}; R(x) = x - \frac{20}{27}$$

$$y = -\sqrt{x - 27} \Rightarrow y^2 = x - 27 \Rightarrow x = y^2 + 27 \Rightarrow f(x) = x^2 + 27$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x + \sqrt{f(x)}}{|x^2 + x - 6|} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 27}}{|(x + 3)(x - 2)|} \times \frac{2x - \sqrt{x^2 + 27}}{2x - \sqrt{x^2 + 27}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2(x^2 - 9)}{(x + 3)(x - 2)} \times \frac{1}{-6 - 6} = -\frac{1}{2}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۵۷

$$f(-1) = 5, f'(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x}f(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}f(x) + \sqrt[3]{x}f'(x) \Rightarrow g'(-1) = \frac{1}{3}f(-1) - f'(-1)$$

$$= \frac{1}{3}(5) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{3} + \frac{1}{2} = \frac{13}{6}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۵۸

$$a \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

$$g(x) = \sqrt{3} \cos x - \sin x \Rightarrow \text{نزولی است} \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow g(x) < g\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

پس مخرج کسر منفی است.

$$\Rightarrow \sqrt{3}\frac{\pi}{3} + b > 0 \Rightarrow b > \frac{-\pi}{\sqrt{3}} = -1/\dots$$

$b = -1$ حداقل صحیح

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۵۹

$$f(x) = \sqrt[3]{ax} \Rightarrow \begin{cases} f'_+\left(\frac{r}{r}\right) = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{\frac{r}{r}} = \sqrt[3]{ra} \\ f'_-\left(\frac{r}{r}\right) = -\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{\frac{r}{r}} = -\sqrt[3]{ra} \end{cases}$$

$$f'_+\left(\frac{r}{r}\right) - f'_-\left(\frac{r}{r}\right) = \sqrt[3]{ra} - (-\sqrt[3]{ra}) = 2\sqrt[3]{ra} \xrightarrow{\text{توان } r} 16 \times ra = 2 \times r \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۶۰

$$f^{-1}(x) = -\frac{\pi}{m}x + \pi \Rightarrow f(x) = -\frac{m}{\pi}x + m$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\pi}{m}x + \pi}{-\frac{m}{\pi}x + m} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{\pi}{m}x}{-\frac{m}{\pi}x} = \frac{\pi^2}{m^2} = \pi$$

$$\Rightarrow m^2 = \pi \xrightarrow{m < 0} m = -\sqrt{\pi}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۶۱

$$\left. \begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow y = b + 2 \\ x = 1 &\Rightarrow y = \frac{a+1}{a+1} = 1 \end{aligned} \right\} b + 2 = 1 \Rightarrow b = -1$$

$$y'_{(1)} = 2 \Rightarrow \frac{1-a^r}{(a+1)^r} = 2 \Rightarrow \frac{1-a}{1+a} = 2 \Rightarrow a = \frac{-1}{3} \Rightarrow a-b = \frac{-1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۶۲

راه اول:

$$g(x) = \frac{2f(x)-1}{2(x-1)} = \frac{\frac{2x\sqrt{x}}{2x^r+x-1}-1}{2(x-1)} = \frac{2x\sqrt{x}-2x^r-(x-1)}{2(x-1)(2x^r+x-1)} = \frac{-2x\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x-1)}{2(x-1)(2x^r+x-1)}$$

$$= \frac{-2x\sqrt{x}\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}-(x-1)}{2(x-1)(2x^r+x-1)} = \frac{\frac{-2}{1+1}-1}{2(2+1-1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

راه دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x)-1}{2(x-1)} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f'(x)}{2} = f'(1) \Rightarrow \frac{1/5(2)-5(1)}{(2)^2} = \frac{2-5}{4} = -\frac{3}{4}$$



۶۳ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2 + x + 1}}{x + 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$x \rightarrow -1^- \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -1^+ \Rightarrow \left[\frac{1}{x} \right] = -1$$

$$-f(-1) = -1 \times \sqrt{\frac{1}{4}(1) - 1 + 1} = -\frac{1}{2}$$

$$a = \frac{-1 - 0}{\frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi}$$

۶۴ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. آهنگ متوسط تابع اول:

آهنگ متوسط تابع دوم:

$$y = \sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$$

$$b = \frac{1 - 0}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi} \Rightarrow \frac{a}{b} = -1$$

۶۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شیب خط $1 = 3x - 6y$ برابر $\frac{1}{6}$ است، پس در نقطه مطلوب، شیب خط مماس باید برابر -2 باشد.

$$\Rightarrow y' = 2x - 6 = -2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$$

نقطه مطلوب $(1, 2)$ است.

۶۶ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به گزینه‌ها، خارج قسمت را باید درجه یک بگیریم. خارج قسمت $\alpha x + \beta$ را در نظر

می‌گیریم و داریم:

$$f(x) = (x^2 + 4x + 5)(\alpha x + \beta) + x + 2$$

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1 \cdot (\alpha + \beta) + 2 = 13 \Rightarrow \alpha + \beta = 1 \\ f(-1) &= 2(-\alpha + \beta) + 1 = 11 \Rightarrow -\alpha + \beta = 5 \end{aligned} \right\} \beta = 3, \alpha = -2$$

خارج قسمت $-2x + 3$ است.

۶۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\Leftarrow \text{نقطه مورد نظر} \left(1, \frac{2+m}{4} \right)$$

$$y'(1) = \frac{(2+m)(4) - (2+m)}{16} = \frac{2(2+m)}{16} = \frac{2}{4} \Rightarrow m = 2$$

$$y = \frac{2}{4}x + \frac{n}{4} \Rightarrow \frac{2}{4} + \frac{n}{4} = \frac{2+m}{4} \Rightarrow m - n = 1 \xrightarrow{m=2} n = 1$$

۶۸ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}} \right)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}} \right)^2 = \frac{1}{25}$$

۶۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (4 - 1) \times \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x - 1} = 6 \Rightarrow \sqrt{ax^2 + bx + c} = 2(x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{2(x - 1)}{x - 1} = 2$$

۷۰ گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x^2 + 4 + 2x)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



۷۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا مشتق را بدست آورید:

$$f(x) = (x-2)\sqrt{x+2} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{x+2} + (x-2) \times \frac{1}{2(\sqrt{x+2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f'(5-h) - f'(5-h) + 2}{h(5-h)} = \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{f(5-h) - 1}{5-h} \right) \times \left(-\frac{f(5-h) - 2}{-h} \right)$$

$$= \left(\frac{f(5) - 1}{5} \right) (-f'(5)) = \frac{1}{5} \times \frac{-25}{12} = \frac{-5}{12}$$

تذکر: این مسأله با قاعده‌ی هوییتال نیز قابل حل است.

۷۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = f(x+1) + f(3x+10) \Rightarrow g'(x) = f'(x+1) + 3f'(3x+10)$$

$$g'(-2) = f'(-1) + 3f'(4)$$

چون دوره تناوب ۵ است پس:

$$f(x+5) = f(x) \Rightarrow f'(x+5) = f'(x) \xrightarrow{x=-1} f'(4) = f'(-1)$$

$$g'(-2) = \frac{2}{2} + 3\left(\frac{2}{2}\right) = 6$$

۷۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$p(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^6 + 3x^0 + 16a \xrightarrow{n=1} p(-2) = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$p(x) = x^6 + 3x^0 + x^2 + 2x^3 + 22$$

$$p(x) = (x^2 + 2x - 3)Q(x) + R(x) \xrightarrow{x=1} p(1) = R(1) = 39$$

$$-5x + 22 \quad \text{تنها گزینه‌ای که به ازای } x=1 \text{ برابر } 39 \text{ میشود:}$$

۷۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. روش اول: با روش هوییتال برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ فوق داریم:

$$\frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+2}} - \frac{3}{2\sqrt{2x+2}}}{\frac{1}{2\sqrt{x^2}}} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{2x+2}}{1 + \sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x+2}}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{2x+2}} \times \frac{1 + (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x})}{1 + (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x+1)(1+1+1)}{(1+x)(1+1)} = \frac{-3}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۷۵

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 5x + b & x \leq 2 \\ 2ax + 5 & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{شرط پیوستگی: } \cancel{2}a + 10 + b = \cancel{2}a + 5 \Rightarrow b = -5$$

$$\text{شرط مشتق های راست و چپ: } 2ax + 5 = 2a \Rightarrow 4a + 5 = 2a \Rightarrow 2a = -5 \Rightarrow a = \frac{-5}{2}$$

$$\Rightarrow -5 + \left(\frac{-5}{2} \right) = \frac{-15}{2}$$



$$\left(\log \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right) \right)' = g' \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right) \times f' \left(g \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right) \right)$$

$$g(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(x) = \frac{-1}{2} (x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} \times 2x$$

$$\Rightarrow g' \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{-1}{2} \times \underbrace{\left(\frac{5}{4} - 1 \right)^{-\frac{3}{2}}}_{\frac{1}{2-2}} \times \sqrt{5} = \frac{-1}{2} \times 1 \times \sqrt{5} = -\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$g \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} \right)} = 2$$

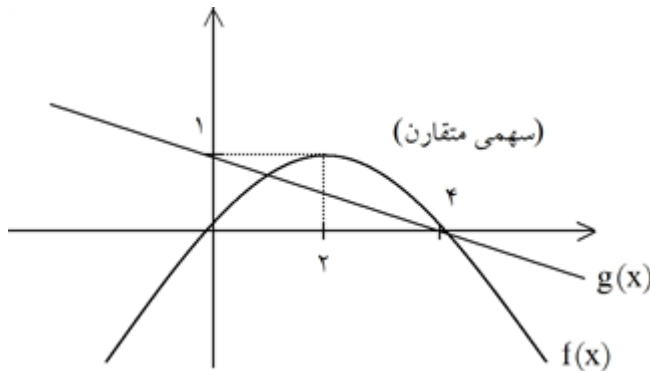
$$f'(2) \Rightarrow ((2x)^2)' = (4x^2)' = 2 \times 2x = 4x \Rightarrow \frac{2 \times 2 \times 2 \times \sqrt{5}}{4 \times \sqrt{5}} = 2$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \Rightarrow \sqrt{x}y - y = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow \sqrt{x}y - \sqrt{x} = 1 + y \Rightarrow \sqrt{x}(y - 1) = y + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{y + 1}{y - 1} \Rightarrow x = \left(\frac{y + 1}{y - 1} \right)^2$$

$$f^{-1}(x) = \left(\frac{x + 1}{x - 1} \right)^2 \Rightarrow (f^{-1}(x))' = 2 \left(\frac{x + 1}{x - 1} \right) \times \frac{-2}{(x - 1)^2}$$

$$\Rightarrow (f^{-1}(2))' = 2 \times 2 \times -2 = -8$$



$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)}{2 - x} + \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{g(x)}{2 - x}$$

$$\xrightarrow{HOP} -f'(2) - g'(2)$$

$$(\cdot, 1), (2, \cdot) \Rightarrow g(x) : y - \cdot = \frac{\cdot - 1}{2 - \cdot} (x - 2) \Rightarrow y = \frac{-1}{2 - \cdot} (x - 2) \Rightarrow g(x) = \frac{-1}{2} x + 1$$

$$x_1 = \cdot, x_2 = 2 \Rightarrow f(x) = ax(x - 2) \xrightarrow{(2, 1)} f(x) = \frac{-1}{2} x(x - 2) \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{2} x^2 + x$$

$$g'(x) = \frac{-1}{2}, f'(x) = \frac{-1}{2} x + 1$$

$$-f'(2) - g'(2) = -(-1) - \left(\frac{-1}{2} \right) = \frac{3}{2}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۷۹

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^r + |x| - x^r}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} = -1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر x از راست به $-\frac{1}{r}$ نزدیک شود، x^r از چپ به $\frac{1}{r}$ و در نتیجه $\frac{1}{x^r}$ از راست به ۴ نزدیک می‌شود. بنابراین $-\frac{2}{x^r}$ از چپ به -8 و $\frac{r}{x^r}$ از راست به ۱۲ نزدیک می‌شود پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{r}\right)^+} \frac{16x - \left[-\frac{r}{x^r}\right]}{r^2x + \left[\frac{r}{x^r}\right]} = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{r}\right)^+} \frac{16x - (-9)}{r^2x + 12} = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{r}\right)^+} \frac{16x + 9}{12(r^2x + 1)} = \frac{1}{r^2} = +\infty$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۸۱

$$f(x) = \begin{cases} ax^r + bx + c & x \geq k \\ rax + b & x < k \end{cases}$$

شرط پیوستگی: $ak^r + bk + c = rak + b$

شرط مشتق‌پذیری: $rak + b = ra \Rightarrow b = ra - rak$

$$a = b + c \Rightarrow c = -a + rak \Rightarrow ak^r + (ra - rak)k + c - ra = 0$$

$$k^r + rk - rk^r - r + rk = 0 \Rightarrow k^r - rk + r = 0 \Rightarrow k = 1, k = r \max$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۸۲

$$(f \circ g)' \left(\frac{r}{\sqrt{\lambda}} \right) = g' \left(\frac{r}{\sqrt{\lambda}} \right) f' \left(g \left(\frac{r}{\sqrt{\lambda}} \right) \right)$$

$$g'(x) = \frac{-1}{r} (rx)(x^r - 1)^{\frac{-r}{r}} = \frac{-rx}{r\sqrt[r]{(x^r - 1)^r}} \Rightarrow g' \left(\frac{r}{\sqrt{\lambda}} \right) = \frac{-r \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}{\frac{1}{16}} = -\frac{r^2}{\sqrt{\lambda}} = -8\sqrt{2}$$

$$f(x) = 16x^r + 1 \Rightarrow f'(x) = 32x \Rightarrow f'(r) = 64$$

$$\Rightarrow (f \circ g)' \left(\frac{r}{\sqrt{\lambda}} \right) = -8\sqrt{2} \times f'(r) = -8\sqrt{2} \times 64 = -512\sqrt{2}$$

که حاصل چهار برابر $-128\sqrt{2}$ است.

$$\frac{-512\sqrt{2}}{-128\sqrt{2}} = 4$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باید $\sqrt{x}$ را در کل رادیکال‌ها ضرب کنیم. ۸۳

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x+1} + 1} - \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{x}{x^r + 1}} = \sqrt{1+1} - \sqrt{0-0} = \sqrt{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۸۴

$$x < -\frac{1}{r} \Rightarrow x^r > \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{x^r} < r \Rightarrow \begin{cases} \frac{r}{x^r} < 12 \Rightarrow \left[\frac{r}{x^r}\right] = 11 \\ \frac{-r}{x^r} > -8 \Rightarrow \left[\frac{-r}{x^r}\right] = -8 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{r}\right)^-} \frac{10x - 5 + \left[\frac{r}{x^r}\right]}{16x - \left[\frac{-r}{x^r}\right]} = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{r}\right)^-} \frac{10x - 5 + 11}{16x - (-8)} = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{r}\right)^-} \frac{10x + 6}{16x + 8} = \frac{-5 + 6}{-8} = -\infty$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۸۵

$$P(x) = ax^r + bx + c$$

$$P'(x) = rax + b$$

$$ax^r + bx + c = (rax + b)\left(\frac{1}{r}x + 1\right) - r \Rightarrow ax^r + bx + c = ax^r + rax + \frac{1}{r}bx + b - r$$

$$\Rightarrow ax^r + bx + c = ax^r + \left(r a + \frac{1}{r}b\right)x + b - r \Rightarrow b = r a + \frac{1}{r}b \Rightarrow r a = \frac{1}{r}b \Rightarrow r a = b$$

$$\left. \begin{aligned} c &= b - r \\ b &= r a \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = r a - r \Rightarrow p(x) = ax^r + r a x + r a - r \Rightarrow p(1) = 9a - r \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} \min = 7$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۸۶

$$f'(x) = \frac{rx + 6}{r\sqrt{x^r + 6x}} \Rightarrow f'(r) = \frac{5}{r}$$

$$\left[\frac{5}{r}\right] = 1 \Rightarrow f'(x) = rx - 9 \Rightarrow f'(5) = 1$$

$$f'(r) - f'(5) = \frac{5}{r} - 1 = \frac{1}{r}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۸۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. X را در تابع $y = x\sqrt{x}$ قرار داده و y را حساب می‌کنیم.

$$y = r\sqrt{r} \Rightarrow y = 8 \Rightarrow A(r, 8)$$

در نقطه A، y ها و همچنین y' ها برابر هستند.

$$A(r, 8) \Rightarrow \begin{cases} 16 + ra + b = 8 \Rightarrow ra + b = -8 \\ rx + a = \frac{r}{r}\sqrt{x} \Rightarrow 8 + a = r \Rightarrow a = -8 \Rightarrow -20 + b = -8 \Rightarrow b = 12 \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای پیدا کردن حد در بی‌نهایت و رفع ابهام حد $\frac{\infty}{\infty}$ می‌توان از حد پرتوان استفاده نمود: ۸۸

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^{rn} - r^{-rn+1}}{r \times r^{rn} + r^{-rn+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^{rn}}{r \times r^{rn}} = \frac{1}{r}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع $p(x)$ را به صورت روبه‌رو در نظر گرفته و شروع به حل می‌کنیم: ۸۹

$$p(x) = (rx - 1)Q(x)$$

$$\Rightarrow p\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \Rightarrow r\left(\frac{1}{16}\right) + a\left(\frac{1}{8}\right) + r\left(\frac{1}{4}\right) - r\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{2} - \frac{r}{2} = 0 \Rightarrow \frac{a}{8} = \frac{r}{2} - \frac{5}{4} \Rightarrow a = 2r - 10$$

$$x + r = 0 \Rightarrow x = -r \Rightarrow p(-r) = r^2 - 5r + 8 + 6 = -10$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۹۰

$$f(x) = \left(\frac{rx - x^r}{rx + 5}\right)^{\frac{r}{r}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{r}{r} \left(\frac{rx - x^r}{rx + 5}\right)^{-\frac{1}{r}} \left(\frac{(r - rx)(rx + 5) - r(rx - x^r)}{(rx + 5)^r}\right)$$

$$\Rightarrow f'(-r) = \frac{r}{r} \left(\frac{-r - r}{-1}\right)^{-\frac{1}{r}} \left(\frac{6 \times (-1) - r(-8)}{(-1)^r}\right) = \frac{r}{r} \times (8)^{-\frac{1}{r}} \times 18 = 12 \times \frac{1}{r} = 6$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۹۱

$$f'(x) = \frac{-r}{(x-1)^r}, g'(x) = rax + b$$

$$f(r) = g(r) \Rightarrow r = ra + rb \Rightarrow ra + b = r$$

$$f'(r) = g'(r) \Rightarrow -r = ra + b$$

$$\begin{cases} ra + b = r \\ ra + b = -r \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{5}{r} \Rightarrow b = r$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۹۲

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{rx^n - rx^r + 1}{ax^r + vx^r - r} = r \Rightarrow n = r, a = r$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{r}} \frac{rx^r - rx^r + 1}{rx^r + vx^r - r} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{r}} \frac{rx^r - rx^r}{rx^r + vx^r} = \frac{r - r}{\frac{r}{r} + v} = \frac{-r}{\frac{1v}{r}} = \frac{-r}{1v}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۹۳

$$p(r) = r$$

$$p(-r) = 1$$

$$\xrightarrow{x=r} p(r) + rp(-r) = p(r) + rp(-r) = r + r = r$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۹۴

$$x = r \Rightarrow y = 8$$

$$f'(x) = \frac{5\sqrt{x} - \frac{1}{r\sqrt{x}}(5x - r)}{(\sqrt{x})^r} \Rightarrow m = \frac{r}{r}$$

$$y - 8 = \frac{r}{r}(x - r) \xrightarrow{x=r} y = r$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۹۵

$$\frac{f(r) - f(5)}{r - 5} = f'(x) \Rightarrow -1 = \frac{-rx + r}{r\sqrt{r1 - x^r + rx}} \Rightarrow \sqrt{r1 - x^r + rx} = x - r$$

$$\Rightarrow rx^r - 8x - 1v = 0$$

$$\Delta' = 50$$

$$x = \frac{r + 5\sqrt{r}}{r}, x = \frac{r - 5\sqrt{r}}{r} \otimes$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۹۶

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{rx - v\sqrt{x} + 5}{rx - \sqrt{rx} + 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \frac{r - \frac{v}{r}}{r - \frac{r}{r}} = \frac{-r}{5} = -1/r$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۹۷

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^{rn} \times r - \frac{r}{r^{rn}}}{r \times r^{rn} + r \times \frac{r}{r^{rn}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(r^{rn})^r \times r - r}{(r^{rn})^r \times r + r} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r(r^{rn})}{r(r^{rn})} = 1$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ساده می‌کنیم. ۹۸

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x^2 - x} \right)^2 = \frac{x^2 + 2x}{(x^2 - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x + 2)(x^2 - x)^2 - 2(x^2 - x)(2x - 1)(x^2 + 2x)}{(x^2 - x)^4}$$

$$= \frac{(x^2 - x)((2x + 2)(x^2 - x) - 2(x - 1)(x^2 + 2x))}{(x^2 - x)^4} = \frac{2(2x^2 + 2 - 2x^2 - 2x + 2x^2 + 2x - 2x^2 - 2x)}{(x^2 - x)^4}$$

$$= \frac{-2(2x - 2)}{(x^2 - x)^4} = \frac{-4}{(x^2 - x)^4} = -\frac{4}{x^4}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا پیوستگی آن را بررسی می‌کنیم و سپس مشتق‌پذیری را حساب می‌کنیم. ۹۹

$$\sqrt{5 - 2(-2)} = -\frac{1}{2}(-2)^2 - 2b + c \Rightarrow 3 = -2 - 2b + c$$

$$\Rightarrow -2b + c = 5$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{2\sqrt{5 - 2x}} = -x + b \xrightarrow{x=-2} \frac{-2}{6} = 2 + b \Rightarrow b = -\frac{7}{3}$$

$$-2b + c = 5 \Rightarrow \frac{14}{3} + c = 5 \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۰۰

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax - \sqrt{x^2 - 1}}{x^n - 12} = \frac{1}{6} \xrightarrow{n=1} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{x} = \frac{1}{6} \Rightarrow a = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{a - \frac{2x}{\sqrt{(x^2 - 1)^2}}}{x} \xrightarrow{\text{HOP}} \frac{\frac{1}{6} - \frac{4}{12}}{2} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{3}}{2} = \frac{-\frac{1}{6}}{2} = -\frac{1}{12}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۰۱

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{[x] + 2}{x + 2} = \frac{[-2^-] + 2}{-2^- + 2} = \frac{-2 + 2}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0$$

$$P(1) = 0, P(-1) = 0$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم: ۱۰۲

$$\xrightarrow{x=2} q(2) = P(2 - 1) + P(1 - 2) = P(1) + P(-1) = 0 + 0 = 0$$

پس:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۰۳

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{(2 + \frac{1}{0}) - (1 + 1)}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x + 1}} - \frac{1}{(x + 1)^2} \Rightarrow f'\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{17}{10} = 1.7$$

$$f'\left(\frac{2}{2}\right) - \frac{\Delta f}{\Delta x} = 1.7 - 0.5 = 1.2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۰۴

$$f(x) = \frac{|x(x^2 - 2)|}{x} = \frac{|x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})|}{x} = \frac{|x| |x - \sqrt{2}| |x + \sqrt{2}|}{x}$$

تابع در $x = 0$ مشتق ندارد چون $D_f \notin$.

در $x = \pm\sqrt{2}$ نقطه‌ی گوشه (شکسته) است چون ریشه‌ی ساده قدرمطلق است. پس f در ۳ نقطه مشتق ندارد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. خط به معادله‌ی $y = 2x - 5$ در $x = 2$ بر منحنی $g(x)$ مماس است، پس: ۱۰۵

$$\begin{cases} g(2) = 2(2) - 5 = 1 \\ g'(2) = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2(x-1)} = \frac{2}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{2}{2} \Rightarrow f'(1) = \frac{2}{2}$$

$$(f \circ g)'(2) = g'(2)f'(g(2)) = 2 \times \frac{2}{2} = 2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۰۶

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos(\pi x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \cos^2(\pi x)}{1 + \cos(\pi x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - \cos \pi x)(1 + \cos \pi x)}{1 + \cos(\pi x)}$$

$$= 1 - \cos \pi = 1 - (-1) = 2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۰۷

$$\text{شیب مماس} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{2 - (-5)}{1} = 7 \Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow \frac{9}{(x+1)^2} = 1 \Rightarrow (x+1)^2 = 9$$

$$\frac{0 \leq x \leq 1}{x+1=2} \Rightarrow x=1 \Rightarrow f(1) = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \begin{matrix} T(2,1) \\ m=1 \end{matrix} \Rightarrow y = x - 1$$

$$\Rightarrow \text{عرض از مبدا} = -1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۰۸

$$f'(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x+2}} + x \left(\frac{2-1}{(x+2)^2} \right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x+1}{x+2}}} \Rightarrow f'(-3) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{\frac{2(-3)+1}{-3+2}}} = 2 + \frac{1}{2\sqrt{\frac{-5}{-1}}} = 2 + \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$= 2 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۰۹

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{ax+b} & x > 2 \\ -x^2 + 6x & x \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{شرط پیوستگی: } \frac{a}{2a+b} = -1 + 12 \Rightarrow a = (2a+b)4 \Rightarrow 2a+b=2$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-\lambda a}{(ax+b)^2} & x > 2 \\ -2x + 6 & x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{-\lambda a}{(2a+b)^2} = -2(2) + 6$$

$$\Rightarrow \frac{-\lambda a}{2} = -6 \Rightarrow -\lambda a = -12 \Rightarrow a = 2$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۱۰

$$f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{(-1)\sqrt{x} - (-x-1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{5}{4} \times 1}{\frac{1}{4}}$$

$$= -2 + 5 = 3 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{4} + h\right) - f\left(\frac{1}{4}\right)}{h} = f'\left(\frac{1}{4}\right) = 3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۱۱

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x}}{x} \xrightarrow{\text{برآورد}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - |x|}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - (-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۱۲

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{0^-} = -\infty$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۱۳

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16} \times \frac{2 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2}}{2 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(1 - 3x - 2)}{(x-2)(5x-8)(2 + 2\sqrt{3x+2} + \sqrt{(3x+2)^2})} = \frac{-3}{2(12)} = -\frac{1}{8}$$

روش دوم: در این روش از هوییتال استفاده می‌کنیم.

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}}{10x - 18} = \frac{-\frac{3}{2\sqrt{10}}}{2} = -\frac{1}{8}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۱۴

$$f(x) = \frac{1}{x} x^2 - \frac{1}{x}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{1} - 1\right)}{1} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(2) = 2 + \frac{1}{4}$$

$$\text{اختلاف} = \left(2 - \frac{1}{4}\right) - \left(2 + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2} = -0.5$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۱۵

$$g(x) = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow g'(x) = \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow g'(2) = -3$$

$$(f \circ g)'(2) = 6 \Rightarrow g'(2) \cdot f'(g(2)) = 6 \Rightarrow -3f'(5) = 6 \Rightarrow f'(5) = -2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۱۶

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & x \geq 2 \\ -x^2 + ax + b & x < 2 \end{cases}$$

شرط پیوستگی $\frac{1}{2-1} = -2 + 2a + b$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(x-1)^2} & x \geq 2 \\ -2x + a & x < 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{(2-1)^2} = -2 + a \Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow 1 = -2 + 6 + b \Rightarrow b = -1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۱۷

$$f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{5-2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5-2x) - (1+\sqrt{x})(-2)}{(5-2x)^2} \Rightarrow f'(4) = \frac{\frac{1}{2}(-3) - (3)(-2)}{9}$$

$$= \frac{\frac{-3}{2} + 6}{9} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = f'(4) = \frac{1}{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. روش اول: ۱۱۸

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 + x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x)^2 - 4x^2 - x}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} = \frac{-x}{2x - \sqrt{4x^2}} = \frac{-x}{2x - (-2x)} = -\frac{1}{4}$$

روش دوم (با هم‌ارزی بی‌نهایت):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 + x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + \sqrt{4} \left| x + \frac{1}{8} \right| \right) = 2x - 2x - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۱۹

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + |x|} = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{2x} & x > 0 \\ \text{تعریف نشده} & x \leq 0 \end{cases}$$

تابع به ازای $x \leq 0$ تعریف نمی‌شود بنابراین گزینه‌ی ۱ و ۲ نادرست می‌باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۲۰

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 \cdot x + 16}{12 + 6\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+2)(x+8)}{6(2 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+2)((\sqrt{x})^2 + 2^2)}{6(2 + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+2)(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2 + 2\sqrt{x} + 4)}{6(2 + \sqrt{x})} = \frac{-6(12)}{6} = -12$$

روش دوم: هوبیتال

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1 \cdot 0}{6 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)} = \frac{-6}{6 \left(\frac{1}{12} \right)} = \frac{-6}{\frac{1}{2}} = -12$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۲۱

$$x \in (x+1, 2x-2) \Rightarrow \begin{cases} x+1 < 2 \Rightarrow x < 1 \\ 2x-2 > 2 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$$

اشتراک دو بازه تهی است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۲۲

$$f(x) = (x+2)\sqrt{4x+1}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 \times 2 - 2}{2} = 1$$

$$f'(x) = \sqrt{4x+1} + (x+2) \frac{4}{2\sqrt{4x+1}} \Rightarrow f'\left(\frac{3}{4}\right) = 2 + \left(\frac{3}{4} + 2\right) \frac{4}{2 \times 2}$$

$$f'\left(\frac{3}{4}\right) = 2 + \frac{3}{4} + 2 = 4 + \frac{3}{4}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'\left(\frac{3}{4}\right) = 1 - 4 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4} = -1.75$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. توجه کنید: ۱۲۳

$$x < 2 \Rightarrow x(x-2) < 0 \Rightarrow x^2 - 2x < 0 \Rightarrow |x^2 - 2x| = -x^2 + 2x$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} -2^2 + 2(2) &= \frac{1}{2}(2^2) + 2a + b \Rightarrow 2a + b = -2 \\ f'(x) &= \begin{cases} -2x + 2 & x < 2 \\ x + a & x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow -2(2) + 2 = 2 + a \Rightarrow a = -4 \\ \Rightarrow b &= 6 \Rightarrow a + b = 2 \end{aligned} \right\}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۲۴

$$(f \circ g)'(1) = g'(1) \cdot f'(g(1)) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$$

$$g(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} g(1) = 2 \\ g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow g'(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3} \Rightarrow f'(2) = \frac{4}{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باید $x = 2$ ریشه‌ی مضاعف مخرج باشد پس: ۱۲۵

$$x^2 + ax + b = (x-2)^2 \Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 - 4x + 4$$

$$\left. \begin{aligned} a &= -4 \\ b &= 4 \end{aligned} \right\} a + b = 0$$



$$\begin{array}{r}
 4x^3 - 19x + 12 \quad | \quad 2x - 3 \\
 \underline{-(4x^3 - 6x^2)} \\
 6x^2 - 19x + 12 \\
 \underline{-(6x^2 - 9x)} \\
 -10x + 12 \\
 \underline{-(-10x + 15)} \\
 -3
 \end{array}$$

. $2 + 3 - 5 =$ مجموع ضرایب چندجمله‌ای خارج‌قسمت

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 - x(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 - x^2 + x}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x^2 - x - 2)}{(x - 1)(x + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x - 2)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x - 2)}{x - 1} = \frac{2}{-2}
 \end{aligned}$$

$$(x^2 f(x))' = 2xf(x) + x^2 f'(x) \xrightarrow{x=-2} -2f(-2) + 4f'(-2) = -4(-3) + 4\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 2}{h} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} f(-2) = -3 \\ f'(-2) = \frac{1}{2} \end{cases} = 12 + 2 = 14$$

$$\begin{array}{r}
 6x^3 - 13x^2 + 18x \quad | \quad 3x - 2 \\
 \underline{-(6x^3 - 4x^2)} \\
 9x^2 + 18x \\
 \underline{-(9x^2 - 6x)} \\
 24x \\
 \underline{-(24x - 16)} \\
 16
 \end{array}$$

خارج قسمت $2x^2 - 3x + 4$ است که به‌ازای $x = 2$ برابر است با:

$$2(2)^2 - 3(2) + 4 = 8 - 6 + 4 = 6$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۳۰

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6}{x(x-2)} - \frac{x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6 - x(x+1)}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 - x + 6}{x(x-2)}$$

روش اول $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x+3)(x-2)}{x(x-2)} = \frac{-5}{2}$

روش دوم $\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x-1}{2x-2} = \frac{-5}{2}$
هویتال

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به این که مخرج صفر حدی می شود و حاصل حد نیز یک عدد است بنابراین این حد،

حتماً حد مبهم $\frac{0}{0}$ است. $f(4) + 7 = 0 \Rightarrow f(4) = -7$

بنابراین برای محاسبه از هویتال استفاده می کنیم و این همان تعریف مشتق است.

$$\xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f'(x)}{1} = f'(4) = -\frac{7}{2}$$

$$y = \frac{f(2x)}{x} \Rightarrow y' = \frac{2f'(2x)x - f(2x)}{x^2} \xrightarrow{x=4} y' = \frac{4f'(4) - f(4)}{4}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-6 + 7}{4} = \frac{1}{4}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۳۲

$$f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right)^2 \Rightarrow f'(x) = 2 \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right) \times \frac{\frac{x-3-2x-2}{(2x-3)^2}}{2 \sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}}$$

$$= 2 \sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \times \frac{-7}{2(2x-3)^2} \xrightarrow{x=4} 2 \times \sqrt{\frac{6}{5}} \times \frac{-7}{2 \times 5} = \frac{2 \times \sqrt{6} \times -7}{5} = -\frac{14\sqrt{6}}{5}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۳۳

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 2x}{2x} = \frac{2+a}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 3$$

$$\xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3 + \frac{4x}{2\sqrt{4x^2 + 5}}}{2} = \frac{3 + \frac{4}{2 \times 3}}{2} = \frac{3 + \frac{2}{3}}{2} = \frac{\frac{11}{3}}{2} = \frac{11}{6}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون خط $y = 3x - 2$ در نقطه $x = 2$ بر منحنی مماس است بنابراین y آن ها و شیب آن ها با یکدیگر برابر است. ۱۳۴

$$f'(2) = 3$$

$$f(2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 4f(x)}{x-2} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x)f'(x) - 4f'(x)}{1} = 2f(2)f'(2) - 4f'(2)$$

$$= 2(4)(3) - 4(3) = 24 - 12 = 12$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۳۵

$$f'(x) = \frac{\frac{r(x+r)-(rx+0)}{(x+r)^r}}{r\sqrt{\frac{rx+0}{x+r}}} \Rightarrow f'(1) = \frac{v}{48}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۳۶

چون حد صورت صفر می‌شود و حد متناهی است باید حد مخرج نیز صفر شود:
با استفاده از قاعده هسپیتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{r}{r\sqrt{rx-r}}}{a} = \frac{1 - \frac{r}{r}}{a} = \frac{1}{r} \Rightarrow a = \frac{1}{r} \Rightarrow b = -1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۳۷

$$\Rightarrow \begin{cases} f(2) = 9 \\ f'(2) = \frac{r}{2} \end{cases}$$

$$g(x) = x\sqrt{f(x)} \Rightarrow g'(x) = \sqrt{f(x)} + \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \times x$$

$$\xrightarrow{x=2} g'(2) = \sqrt{f(2)} + \frac{f'(2)}{2\sqrt{f(2)}} \times 2 = 3 + \frac{\frac{r}{2}}{6} \times 2 = 3\frac{1}{3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۳۸

$$\sqrt{a+b} - 2 = 0 \Rightarrow a+b = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{a}{r\sqrt{ax+b}}}{2x} = \frac{\frac{a}{r\sqrt{a+b}}}{2} = \frac{a}{4} = \frac{r}{2} \Rightarrow a = 12 \Rightarrow b = -8$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۳۹

$$x^2 + (a-1)x^2 + (2-a)x - 2 = x^2 - x^2 + ax^2 - ax + 2x - 2 =$$

$$= x^2(x-1) + ax(x-1) + 2(x-1) = (x-1)(x^2 + ax + 2)$$

این معادله همواره دارای یک ریشه‌ی مثبت $x = 1$ است، پس عبارت درجه دوم باید دوریشه مثبت متمایز و مخالف یک داشته باشد یعنی:

$$\left. \begin{aligned} \Delta &> 0 \Rightarrow a^2 - 16 > 0 \\ s &> 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow a < 0 \\ p &> 0 \Rightarrow 2 > 0 \\ 1 + a + 2 &\neq 0 \end{aligned} \right\} a < -4 \text{ و } a \neq -5$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۴۰

$$x = 1 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(1 + 0.44) - f(1)}{0.44} = \frac{f(1.44) - f(1)}{0.44}$$

$$= \frac{\frac{1/44-1}{1/2} - \frac{1-1}{1}}{0.44} = \frac{\frac{1/2}{1/2}}{0.44} = \frac{1}{1/2} = \frac{1}{0.5} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1}$$

برای مشتق در $x = 1$ تنها کافی است از عامل صفر مشتق گرفته و در مابقی ضرب کنیم.

$$f(x) = \underbrace{(x-1)}_{\text{عامل صفر}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = 1 \times \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = 1$$

اختلاف آن‌ها برابر است با: $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۴۱

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + |x|}{ax^n} \xrightarrow{n=1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{a} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{3}{a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{-6x - 6} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 + \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}}{-6} = \frac{2 - \frac{5}{2}}{-6} = \frac{\frac{4-5}{2}}{-6} = \frac{-\frac{1}{2}}{-6} = \frac{1}{12}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع fog را تشکیل می‌دهیم. فقط ابتدا باید توابع f و g را با حذف قدر مطلق بازنویسی کنیم: ۱۴۲

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}x, & x \geq 0 \\ \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x + x, & x \geq 0 \\ 3x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} 3x, & x \geq 0 \\ 3x, & x < 0 \end{cases}$$

پس ضابطه‌ی fog برابر است با:

$$f(g(x)) = \begin{cases} \frac{2}{5}(3x) & x \geq 0 \\ 3x & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{6}{5}x & x \geq 0 \\ 3x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow (fog)(x) = 3x \Rightarrow (fog)'(x) = 3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۴۳

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ و } \begin{cases} x=1 \\ \Delta x = 0.21 \end{cases}$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x} = \frac{f(1 + 0.21) - f(1)}{1 + 0.21 - 1} = \frac{f(1.21) - f(1)}{0.21}$$

$$= \frac{\sqrt{1.21} - \sqrt{1}}{0.21} = \frac{1.1 - 1}{0.21} = \frac{0.1}{0.21} = \frac{1}{2.1}$$

$$x=1 \text{ در } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{آهنگ متوسط - آهنگ لحظه‌ای} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.1} = \frac{2.1 - 2}{2(2.1)} = \frac{0.1}{4.2} = \frac{1}{42}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۴۴

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} = \frac{\infty}{\infty}$$

پس از هم‌ارزی جمله‌ی بزرگ‌تر برای رفع ابهام استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n + 15}{3x - \sqrt{4x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n + 15}{3x - |2x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{3x - (-2x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{5x} = -1$$

چون مقدار حد، عددی مشخص است پس باید توان x در صورت و مخرج یکسان باشد یعنی n = 1 و در نتیجه:

$$\frac{a}{5} = -1 \Rightarrow a = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} = \frac{0}{0}$$

از هوییتال کمک می‌گیریم:

$$\text{Hop} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5}{3 - \frac{4x+15}{2\sqrt{4x^2+15x}}} = \frac{-5}{3 - \frac{24+15}{2\sqrt{36+45}}} = \frac{-5}{3 - \frac{39}{18}} = \frac{-5}{\frac{54-39}{18}} = \frac{-5}{\frac{15}{18}} = -6$$

$$f(-2) = 0 \Rightarrow 16 + 8a + 16 = 0 \Rightarrow a = -4$$

$$f(x) = x(x^2 + 4x^2 - 8)$$

$$\begin{array}{r} x^3 + 4x^2 - 8 \quad | \quad x+2 \\ -x^3 - 2x^2 \\ \hline 2x^2 - 8 \\ -2x^2 - 4x \\ \hline -4x - 8 \\ +4x + 8 \\ \hline 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} - 1 \\ x = -\sqrt{5} - 1 \end{cases}$$

کوچک ترین ریشه

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای آن که تابع در نقطه‌ی $x = 1$ مشتق‌پذیر باشد، باید در این نقطه حد داشته باشد، پیوسته باشد و ضمناً مشتق‌های راست و چپ آن با هم برابر باشند. ۱۴۶

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} - 5 & x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 - 5 = -4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + a + b \end{cases} \Rightarrow 1 + a + b = -4 \Rightarrow a + b = -5 \quad (\text{رابطه‌ی ۱})$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x^2} & x \geq 1 & f'_+(1) = -1 \\ 2x + a & x < 1 & f'_-(1) = 2 + a \end{cases} \Rightarrow 2 + a = -1 \Rightarrow a = -3$$

$$-5 + b = -3 \Rightarrow b = 2$$

$a = -5$ را در ا قرار می‌دهیم، داریم:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. آهنگ متوسط تغییر تابع هنگامی که متغیر از مقدار x_1 به مقدار x_2 تغییر می‌کند برابر است با: ۱۴۷

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{و آهنگ لحظه‌ای تابع در } x_1 \text{ برابر است با } f'(x_1).$$

$$\text{آهنگ متوسط تغییر} = \frac{f(6/25) - f(2)}{6/25 - 2} = \frac{\sqrt{6/25} - \sqrt{2}}{6/25 - 2} = \frac{2/5 - 2}{6/25 - 2} = \frac{-8/5}{-44/5} = \frac{8}{11}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow x = 2 \text{ در آهنگ لحظه‌ای} = f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{تفاضل آهنگ لحظه‌ای و متوسط} = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{9 - 4}{18} = \frac{5}{18}$$



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{\sqrt{(x-2)^2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{x-2} = \frac{0}{0}$$

برای $x \rightarrow 2^+$ داریم: $|x-2| = x-2$ برای رفع ابهام بهتر است از قاعده‌ی هوییتال استفاده کنیم: (در این روش از صورت و مخرج کسر به‌طور مستقل مشتق گرفته و سپس حاصل حد را محاسبه می‌کنیم.)

$$\text{Hop: } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+6}}}{1} = -\frac{1}{12}$$

روش دوم: برای رفع ابهام استفاده از اتحاد $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$ می‌باشد.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{x-2} &\times \frac{2 + \sqrt{x+6} + \sqrt{(x+6)^2}}{2 + \sqrt{x+6} + \sqrt{(x+6)^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-x}{(x-2)(2 + \sqrt{x+6} + \sqrt{(x+6)^2})} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{2 + \sqrt{x+6} + \sqrt{(x+6)^2}} = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = \text{gof}(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + |x| & x \geq 0 \\ \frac{2}{3}x - |x| & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع در } x=0 \text{ پیوسته است.}$$

$$y' = \begin{cases} \frac{2}{3} + 1 & x > 0 \\ \frac{2}{3} - 1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y'_+(0) = y'_-(0) \Rightarrow \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3} - 1 \Rightarrow a = \frac{-1}{4}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{array}{r} \cancel{3x^2} - \cancel{12x} + 7x + 2 \\ -\cancel{3x^2} + 2x^2 \\ \hline -6x + 7x \\ +6x - 4x \\ \hline 2x + 2 \\ -2x + 2 \\ \hline 4 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 3x-2 \\ x^2-2x+1 \end{array} \right|_{x=-1} \rightarrow 1+2+1=4$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. وقتی $x \rightarrow 2^-$ آن‌گاه $x^2 - x - 2 < 0$ پس $|x^2 - x - 2| = -(x^2 - x - 2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 + x + 2}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 1}{2 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 12}}} = \frac{-3}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{-3}{\frac{3}{2}} = -2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{x(x+a) - \cdot}{x - \cdot} = a$$

$$f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{-x(x+a) - \cdot}{x - \cdot} = -a$$

$$\text{mm}' = -1 \Rightarrow -a^2 = -1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۵۳

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{x} + x - 1 & x \geq 1 \\ x\sqrt{x} - x + 1 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x} + 1 & x > 1 \\ \frac{3}{2}\sqrt{x} - 1 & x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_+(1) = \frac{5}{2} \\ f'_-(1) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f'_+(1) + 2f'_-(1) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۵۴

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-9}{3-2} = -5, f'(x) = \frac{-7x}{x^2} \Rightarrow f'(\sqrt[3]{12}) = \frac{-7\sqrt[3]{12}}{12} = -\frac{7}{12} \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(\sqrt[3]{12}) = -5 - (-\frac{7}{12}) = 1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۵۵

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{ax^n} = \frac{1}{a} \Rightarrow \begin{cases} n=1 \\ a=-2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3-\sqrt{x^2+5}}{-2x+4} \xrightarrow{H} \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{x^2+5}}}{-2} = \frac{-\frac{2}{2}}{-2} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۵۶

$$y = x\sqrt{x} \xrightarrow{\text{تابع به شکل ضربی است}} y' = (1) \cdot \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \Rightarrow y'(4) = \frac{3}{2}\sqrt{4} = 3$$

$$\text{روش دوم: } y = x\sqrt{x} = x \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \Rightarrow y'(4) = 3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۵۷

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}, g(x) = \frac{(x+1)^2}{x} \Rightarrow f(x) \cdot g(x) = \frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{(x+1)^2}{x} = x(x+1) = x^2 + x$$

$$\Rightarrow (f(x) \cdot g(x))' = (x^2 + x)' = 2x + 1 \xrightarrow{x=2} (f \cdot g)'(2) = 2(2) + 1 = 5$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۵۸

$$\text{حد مورد نظر} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\cancel{\sqrt{x}-1})(\sqrt{x}+1)(x+2)}{(\sqrt{x}+2)(\cancel{\sqrt{x}-1})} = \frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۵۹

قدرمطلق، احتمال مشتقناپذیری وجود دارد:

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ و } x = 0$$

$$f(x) = x|x^2 - x| \Rightarrow f'(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{x|x^2 - x| - \cdot}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot} |x^2 - x| = 0$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x|x^2 - x| - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x|x||x-1|}{x-1}$$

$$\left. \begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x|x||x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2(x-1)}{x-1} = 1 \\ f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x|x||x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2(x-1)}{x-1} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1)$$

بنابراین تابع f در $x = 0$ مشتقپذیر و در $x = 1$ مشتقناپذیر است و تنها یک نقطه‌ی مشتقناپذیری دارد.

۱۶۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا تابع $y = x^2\sqrt{x}$ را به صورت $y = x^{\frac{5}{2}}$ بازنویسی می‌کنیم و سپس دوبار از آن مشتق می‌گیریم. داریم:

$$y = x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow y' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y = \frac{5}{2} \times \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{15}{4}\sqrt{x}$$

$$y(1) = \frac{15}{4} \times \sqrt{1} = \frac{15}{4}$$

۱۶۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو هم‌ارزی مهم حد در بی‌نهایت به صورت زیر است:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \cong \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|, x \rightarrow \pm\infty \text{ I}$$

$$\sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + c + d} \cong \sqrt[3]{a} \left(x + \frac{b}{3a} \right), x \rightarrow \pm\infty \text{ II}$$

با توجه به رابطه‌ی I داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 - 4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x - 1| - |x - 2| = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x - (2 - x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 = -1$$

۱۶۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$[2, 2.02] \text{ روی بازه‌ی } x \text{ متغیر } f \text{ نسبت به تغییر تابع } f = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2.02) - f(2)}{2.02 - 2} = \frac{\frac{2.02}{2.02-1} - \frac{2}{2-1}}{.02} =$$

$$\frac{\frac{2.02}{1.02} - \frac{2}{1}}{.02} = \frac{\frac{2.02}{1.02} - 2}{.02} = \frac{\frac{-2}{1.02}}{.02} = -\frac{50}{51}$$

$$x = 2 \text{ در } f \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع } f'(2) = \frac{-1}{(2-1)^2} = -1$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ لحظه‌ای - آهنگ متوسط} = \left(-\frac{50}{51}\right) - (-1) = \frac{-50 + 51}{51} = \frac{1}{51}$$

۱۶۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

روش اول:

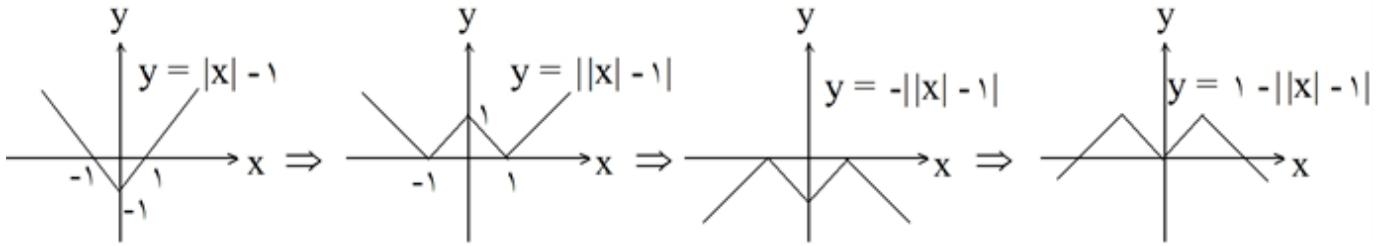
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5-x}} \xrightarrow{\text{HOP}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{-1}{2\sqrt{5-x}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = -2$$

روش دوم: صورت و مخرج عبارت مبهم $\frac{0}{0}$ را یک‌بار در مزدوج صورت و بار دیگر در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5-x}} \times \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \times \frac{2 + \sqrt{5-x}}{2 + \sqrt{5-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(2+\sqrt{5-x})}{(4-(5-x))(1+\sqrt{x})} = \frac{2+\sqrt{4}}{-(1+\sqrt{1})} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$y = f(f(x)) = 1 - |1 - |x|| = 1 - ||x| - 1|$$



تابع در ۳ نقطه‌ی $\{-1, 0, 1\}$ مشتق ندارد.

$$(x^2 - 2)(6x + 1) = 6x^3 + x^2 - 12x - 2$$

$$\begin{array}{r} 6x^3 + x^2 - 12x - 2 \\ - (6x^3 + 12x^2 - 2x - 2) \\ \hline -11x^2 + 14x \\ + (11x^2 + 22x - 22) \\ \hline 36x - 24 \\ - (36x - 24) \\ \hline 0 \end{array}$$

ضرب جمله از درجه‌ی ۱ (ضرب x): خارج قسمت، عدد -1 می‌باشد. $2x^2 - x + \dots \Rightarrow$

$$x + \Delta x \text{ تا } x \text{ تغییر از } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x = 0.1]{x=3} \frac{f(3.1) - f(3)}{0.1} =$$

$$\frac{(3.1)^3 - 3^3}{0.1} = \frac{29.791 - 27}{0.1} = 27.91$$

$$(x = 3) \text{ آهنگ لحظه ای تغییر در } f'(3) = 3(3)^2 = 27 \Rightarrow \text{آهنگ متوسط} = 27.91 - 27 = 0.91$$

متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از عدد a به عدد $a + h$ تغییر کند، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 2 \Rightarrow f'(x) = 6x + 4$$

$$a + \frac{h}{2} \text{ آهنگ لحظه ای تغییر تابع در } f'\left(a + \frac{h}{2}\right) = 6\left(a + \frac{h}{2}\right) + 4 = 6a + 3h + 4$$

$$a + h \text{ تا } a \text{ آهنگ متوسط تغییر تابع از } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a} = \frac{(3(a + h)^2 + 4(a + h) - 2) - (3a^2 + 4a - 2)}{h}$$

$$= \frac{6ah + 3h^2 + 4h}{h} = 6a + 3h + 4$$

$$\Rightarrow (2) - (1) = (6a + 3h + 4) - (6a + 3h + 4) = 0$$

دارای ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ است. برای رفع ابهام کافی است ابتدا جمله‌ی پرتوان صورت و مخرج را مشخص کرده و سپس با توجه به درجه‌ی جمله‌ی پرتوان صورت و مخرج، جواب حد را مشخص کنیم. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9x}}{3x + \sqrt{x}} \quad (\text{پرتوان}) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2}}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2|x|}{3x}$$

$$\xrightarrow{x > 0} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{3x} = -\frac{1}{3}$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2 + x}$ دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است. برای رفع ابهام از روش هوییتال بهره می‌گیریم. داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2 + x} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 + \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}}{2x + 1} = \frac{2 + \frac{-1}{2\sqrt{4}}}{2(-1) + 1} = \frac{2 - \frac{1}{4}}{-1} = \frac{\frac{7}{4}}{-1} = -\frac{7}{4}$$

(توجه کنید که با ضرب صورت و مخرج کسر در $2x - \sqrt{3-x}$ نیز می‌توانستیم اقدام به رفع ابهام کنیم ولی روش طولانی‌تری بود.)

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$ با توجه به تعریف مشتق، برابر با $f'(-1)$ است. پس برای تعیین حاصل این حد، از تابع f مشتق گرفته و در ضابطه‌ی مشتق $x = -1$ را جایگذاری می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = (x - 2) \cdot \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f'(x) = (1) \cdot \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \cdot (x - 2) \Rightarrow$$

$$f'(-1) = (1) \cdot \sqrt[3]{(-1)^2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{(-1)}} \cdot (-1 - 2) = 1 + 2 = 3$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی $M(x, y)$ بر روی منحنی به معادله‌ی $y = \sqrt{x+8}$ در حرکت است و T فاصله‌ی نقطه‌ی M تا مبدا مختصات است. پس داریم:

$$T = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{x^2 + x + 8} \Rightarrow T' = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 8}}$$

با توجه به این‌که آهنگ لحظه‌ای تغییر T به ازای واحد تغییر x در نقطه‌ی $x = 7$ ، برابر با مشتق تابع T در این نقطه است، می‌نویسیم:

$$(x = 7) \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر } T = T'(7) = \frac{2(7) + 1}{2\sqrt{7^2 + 7 + 8}} = \frac{15}{2\sqrt{64}} = \frac{15}{16}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ می‌توانیم صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت صورت کسر ضرب کنیم.

داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})}{\sin^2 x (1 + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos^2 x)(1 + \sqrt{\cos x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1 - \cos x}}{\cancel{(1 - \cos x)}(1 + \cos x)(1 + \sqrt{\cos x})} = \frac{1}{(1 + 1)(1 + \sqrt{1})} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

روش دوم: می‌دانیم در اطراف صفر، $\sqrt[n]{1+u} \sim \left(1 + \frac{u}{n}\right)$ و نیز $\cos x \sim \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$ و هم چنین $\sin x \sim x$ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در واقع باید $(f \cdot g)'(1)$ را به دست آوریم:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}} \rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{2}} \\ g(x) &= \frac{1}{x \times x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2} + 1}} \rightarrow g(x) = x^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \right\} \rightarrow f(x) \cdot g(x) = x^{\frac{1}{2}} \times x^{-\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}} = x^{-1}$$

$$\rightarrow (fg)'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \rightarrow (fg)'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با میل کردن x به سمت $+\infty$ ، مقدار کسر داده شده به سمت مقدار مبهم زیر میل خواهد کرد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} - \sqrt{4x+12}}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x} - \sqrt{4x+12}} = \frac{+\infty + \infty - \infty}{+\infty + \infty - \infty} = \frac{\infty - \infty}{\infty - \infty} \text{ مبهم}$$

لذا جهت رفع ابهام با در نظر گرفتن این‌که $x > 0$ (چون $x \rightarrow +\infty$)، صورت و مخرج کسر را در عامل $\sqrt{x}$ ضرب

می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+2x} - \sqrt{4x^2+12x}}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2} - \sqrt{4x^2+12x}} \xrightarrow[\text{رادیکالی در بی نهایت}]{\text{استفاده از هم ارزی}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right) + (x+1) - 2\left(x + \frac{12}{2 \times 2}\right)}{\left(x + \frac{2}{2}\right) + (x) - 2\left(x + \frac{12}{2 \times 2}\right)} = \frac{-\frac{3}{2}}{-2} = \frac{3}{4}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+4x} + \sqrt{x^2+9x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left|x + \frac{4}{2}\right| + \left|x + \frac{9}{2}\right| \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - 2 - x - \frac{9}{2}) = 1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $x = 1$ ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی سوم کسر اول و ریشه‌ی ساده‌ی کسر دوم می‌باشد. پس مشتق اول

برای کسر اول به ازای $x = 1$ صفر خواهد شد (چون $x = 1$ ریشه‌ی مکرر است). برای مشتق‌گیری از کسر دوم کافی است فقط از

عوامل $x - 1$ مشتق‌گرفته و در مقدار مابقی تابع به ازای $x = 1$ ضرب کنیم، داریم:

مشتق از عامل $x - 1$

$$y = \frac{(x-1)^3}{x^2+x+1} + \frac{(x-1)(x+1)}{(x+\sqrt{x})} \rightarrow f'(1) = 0 + (1) \times \left(\frac{1+1}{1+1}\right) = 1$$

مشتق اول این کسر به ازای $x = 1$ صفر می‌شود

حاصل به ازای $x = 1$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این که تابع داده شده مجموع دو تابع $y_1 = [x]$ و $y_2 = \left[x + \frac{1}{3}\right]$ می باشد، ابتدا نقاط مشتق ناپذیر دو تابع اخیر را در بازه $(0, 3)$ مشخص می کنیم. با توجه به ساختار توابع y_1 و y_2 ، نقاط ناپیوستگی این دو تابع، همان نقاط مشتق ناپذیرشان هم هست:

در این دو نقطه ناپیوسته ولی y_2 در آن ها پیوسته است $x = 1, 2$ $\xrightarrow{x \in (0, 3)} x = 1, 2$ $y_1 = [x] \Rightarrow k \in \mathbb{Z}$

$$y_2 = \left[x + \frac{1}{3}\right] \Rightarrow x + \frac{1}{3} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = k - \frac{1}{3} \xrightarrow{x \in (0, 3)} x = \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}$$

در این سه نقطه ناپیوسته ولی y_1 در آن ها پیوسته است. در هر یک از نقاط به طول $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ یکی از دو تابع y_1 و y_2 پیوسته و دیگری ناپیوسته است. بنابراین تابع $f(x) = y_1 + y_2$ در هر یک از این پنج نقطه ناپیوسته و مشتق ناپذیر است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 2^{\frac{1}{x}} \\ g(x) &= \frac{2x-3}{x+1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{gof}(x) = g(f(x)) = g\left(2^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{2\left(2^{\frac{1}{x}}\right) - 3}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{gof}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\left(2^{\frac{1}{x}}\right) - 3}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{2(2^{-\infty}) - 3}{(2^{-\infty}) + 1} = \frac{2 \times (0) - 3}{0 + 1} = -3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حد داده شده از نوع مبهم $\infty - \infty$ می باشد لذا ابتدا اقدام به مخرج مشترک گیری از تابع می کنیم، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{x+19}{x^2+3x-4} + \frac{3}{x+4} \right) = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+19+3(x-1)}{(x-1)(x+4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\cancel{3}(x+4)}{(x-1)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3}{x-1} = \frac{-3}{5}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ریشه های ساده ای داخل قدر مطلق طول نقاط زاویه دار منحنی تابع می باشند، پس نقطه ای مورد نظر $x = 0$ می باشد.

$$f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{\sqrt{1+|x|} - 1}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \xrightarrow{\text{برنولی}} \lim_{x \rightarrow \cdot^+} \frac{\cancel{1} + \frac{x}{2} - \cancel{1}}{x} = \frac{1}{2}$$

$$f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{\sqrt{1+|x|} - 1}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} \xrightarrow{\text{برنولی}} \lim_{x \rightarrow \cdot^-} \frac{\cancel{1} - \frac{x}{2} - \cancel{1}}{x} = -\frac{1}{2}$$

در نتیجه مقدار عبارت $f'_+(\alpha) - f'_-(\alpha)$ برابر با $\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$ می باشد.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطه مشتق تابع مرکب، ابتدا از تابع داده شده مشتق می‌گیریم:

$$y = f(x + \sqrt{1+x^2}) \Rightarrow y' = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \cdot f'(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \cdot f'(x + \sqrt{1+x^2}) \quad (*)$$

حال با توجه به این که ضابطه مشتق تابع f در صورت تست داده شده، داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \quad (**)$$

و با جایگذاری $(**)$ در رابطه $(*)$ داریم:

$$y' = \left(\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right) \times \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطه هم‌ارزی رادیکال در بی‌نهایت داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - |x+1|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - (x+1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

روش دوم: صورت و مخرج کسر داده شده را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + 2x}} \times \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{x + \sqrt{x^2 + 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{x^2 - (x^2 + 2x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2}}{-2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{-2x} = -1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \Rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(12) - f(4)}{12 - 4} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}}{8} = -\frac{1}{60}$$

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)(2)(2x+1)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(4) = -(2^2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{24}$$

$$\text{اختلاف} = -\frac{1}{60} + \frac{1}{24} = \frac{-4 + 5}{60} = \frac{1}{60}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{2x^2 + 5x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3}{(x+2)(2x+1)} - \frac{4}{(x+2)(x-2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x - 6 - 4x - 4}{(x+2)(2x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x - 10}{(x+2)(2x+1)(x-2)} = \frac{-5}{(-3)(-4)} = \frac{-5}{12}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x \rightarrow (-3)^+ : f(x) = (-3 - (-x))\sqrt[3]{9x} = (x-3)\sqrt[3]{9x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{9x} + \frac{9(x-3)}{3(\sqrt[3]{9x})^2} \Rightarrow f'_+(-3) = -3 + \frac{-54}{+27} = -3 - 2 = -5$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۸۶

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{2x^2+ax+b} = -\infty \Rightarrow 2x^2+ax+b = 2(x-2)^2 = 2x^2-4x+8$$

$$\Rightarrow a = -4, b = 8 \Rightarrow a+b = 4$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۸۷

$$f'(x)g'(f(x)) = (g(f(x)))'$$

$$g(f(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = x \Rightarrow (g(f(x)))' = 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون مشتق در $x=1$ وجود دارد پس تابع پیوسته است و $f'_-(1) = f'_+(1)$ ۱۸۸

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x - \frac{1}{x}\right) = 0 \quad (1)$$

شرط پیوستگی:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+ax+b) = a+b+1 \xrightarrow{(1)} a+b+1 = 0$$

$$\Rightarrow a+b = -1 \quad (2)$$

$$f'_-(1) = f'_+(1) \text{ شرط}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{x^2} & x > 1 \\ 2x+a & x < 1 \end{cases} \Rightarrow 1+1 = 2+a \Rightarrow a = 0 \xrightarrow{(2)} b = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ x^2-1 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow f(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2})^2-1$$

$$= 1-2\sqrt{2}+2-1 = 2-2\sqrt{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $[2^-] = 1$ ۱۸۹

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x^2-2x} + \frac{2(1)}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x(x-2)} - \frac{2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2-2x}{x(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{x} = -\frac{1}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۹۰

$$f(x) = x+1+(g(x))^0 \Rightarrow f'(x) = 1+\mathcal{O}(g(x))^f g'(x) \Rightarrow f'(\cdot) = 1+\mathcal{O}(g(1))^f g'(\cdot)$$

$$\Rightarrow 1 = 1+\mathcal{O}g'(\cdot) \Rightarrow g'(\cdot) = 0$$

$$f''(x) = 2\mathcal{O}(g(x))^f (g'(x))^2 + \mathcal{O}(g(x))^f g''(x) \Rightarrow f''(\cdot) = 0 + \mathcal{O}g''(\cdot)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۹۱

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3} \Rightarrow n=2, \frac{a}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow a=2 \Rightarrow f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{3x^2+x} \Rightarrow f(-1) = \frac{2+3+1}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$$



$$\begin{array}{r} (x-2)(x^2+1) = x^3 - 2x^2 + x - 2 \\ \underline{x^3 - 2x^2 + x - 2} \\ -x^3 + 2x^2 \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \\ -x + 2 \\ \underline{-x + 2} \\ 0 \end{array}$$

خارج قسمت تقسیم $(x^2 - 4x + 9)$ می باشد که مجموع ضرایب آن برابر است با: $1 + (-4) + 9 = 6$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+9}{1-x+\sqrt{x+1}} = \frac{a}{-1} = 2 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x+9}{1-x+\sqrt{x+1}} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{hop}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2}{-1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = 2$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \Rightarrow (f(g(x)))' = \left(\frac{x-1-2}{1+x-1} \right)' = \frac{2}{x^2}$$

شرط پیوستگی: $\lim_{x \rightarrow 1^-} ax^2 + bx = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2\sqrt{4x-3} = f(1) \Rightarrow a+b=2$

$$\Rightarrow 2 \times \frac{2}{2\sqrt{4x-3}} = 2ax^2 + b \xrightarrow{x=1} 2a+b=2$$

از حل دستگاه به وجود آمده به $a=1$ و $b=1$ می‌رسیم.

$$f'(x) = (2x-1)\sqrt[3]{x^2-4x} \xrightarrow{x=-1} f'(-1) = (-2-1)\sqrt[3]{1} = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[3]{(2x+6)^2} = 4 \Rightarrow a+b=4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax+b) = a+b$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2(2x+6)}{3\sqrt[3]{(2x+6)^2}} & x > 1 \Rightarrow f'_+(1) = \frac{2}{3} \\ a & x \leq 1 \Rightarrow f'_-(1) = a \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{3}, b = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{array}{r}
 2x^3 - 5x^2 + x \quad | \quad 2x + 1 \\
 \underline{-2x^3 \pm x^2} \\
 -6x^2 + x \\
 \underline{+6x^2 + 3x} \\
 4x \\
 \underline{-4x \pm 2} \\
 -2
 \end{array}$$

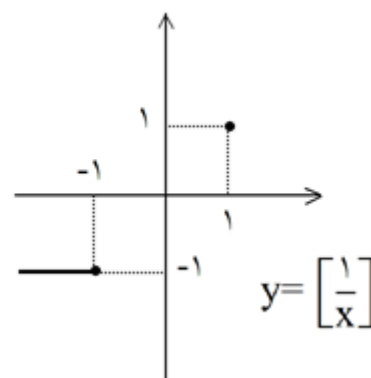
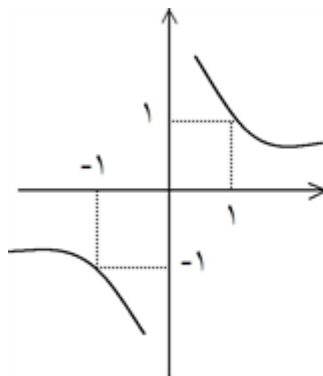
مجموع ضرایب خارج قسمت برابر است با: $1 + (-3) + 2 = 0$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(2) = 1 \Rightarrow \frac{2a + 1 + 5}{2} = 1 \Rightarrow 2a + 6 = 2 \Rightarrow a = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1 + \sqrt{4x^2 + 9}}{3x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + |2x|}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 2x}{3x} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بازه‌ی پیوستگی تابع، جواب مسئله است. تابع در فاصله‌ی $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ پیوسته است پس در $(-\infty, -1)$ مشتق‌پذیر است. (با توجه به شکل) توجه: بین بازه‌ی $[1, +\infty)$ بی‌شمار نقطه‌ی ناپیوستگی وجود دارد.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، عبارت داخل قدرمطلق به $+\infty$ میل می‌کند بنابراین:

$$|x^2 - 4| = x^2 - 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{ax^2 - x + 2} = \frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a = -1$$

و در نتیجه:

حال حد راست عبارت را در $x = -2$ می‌بایم.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x^2 - 4|}{-x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x - 2||x + 2|}{-(x^2 + x - 2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-(x - 2)(x + 2)}{-(x + 2)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x - 2}{x - 1} = \frac{4}{3}$$

دقت کنید که:

$$x \rightarrow (-2)^+ \Rightarrow |x - 2| = -(x - 2)$$

$$x \rightarrow (-2)^+ \Rightarrow |x + 2| = x + 2$$

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 11x - 11x \\ & - (2x^2 - 2x^2) \\ & 1 \cdot x^2 - 11x \\ & - (1 \cdot x^2 - 0x) \\ & - 6x \\ & - (-6x + 3) \\ & - 3 \end{aligned}$$

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = \frac{1}{2} + \frac{0}{2} - 3 = .$$

مقدار $2x^2 + 0x - 3$ را به ازای $x = \frac{1}{2}$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 2x - 1 \\ 2x^2 + 0x - 3 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{ax - 2} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - |x|}{ax} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + x}{ax} = 2 \Rightarrow \frac{3}{a} = 2 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x^2 - x^2 - 6x)}{(x - 2)(2x + \sqrt{x^2 + 6x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x \cancel{(x - 2)}}{\cancel{(x - 2)}(2x + \sqrt{x^2 + 6x})} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x}} & x \geq 1 \\ ax^2 + bx & x < 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{شرط پیوستگی در } x=1} a + b = 2$$

$$f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow 2a + b = \frac{-1}{1\sqrt{1}} \Rightarrow 2a + b = -1 \Rightarrow \begin{matrix} a = -3 \\ b = 5 \end{matrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow .-} u = \lim_{x \rightarrow .-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow .-} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right) = \frac{-1}{.} = +\infty : u = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \text{ با فرض}$$

پس:

$$\lim_{x \rightarrow .-} f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (u - \sqrt{u^2 + 1}) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^2 - (u^2 + 1)}{(u + \sqrt{u^2 + 1})} =$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} -\frac{1}{(u + \sqrt{u^2 + 1})} = .$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق فرض نمودار تابع $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + m$ ، محور xها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند. پس:

$$f(2) = 0 \Rightarrow 16 - 20 - 2 + m = 0 \Rightarrow m = 6$$

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$$

بنابراین با توجه به این‌که یکی از ریشه‌های این تابع $x = 2$ است، بنابراین $f(x)$ بر $x - 2$ بخش‌پذیر است. با تقسیم $f(x)$ بر $x - 2$ ، خارج قسمت تقسیم $2x^3 - x - 3$ می‌شود. بنابراین:

$$f(x) = (x - 2)(2x^2 - x - 3)$$

به این ترتیب ریشه‌های دیگر f (غیر از $x = 2$) از معادله‌ی $2x^2 - x - 3 = 0$ به دست می‌آید:

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow (x + 1)(2x - 3) = 0 \Rightarrow x = -1, \frac{3}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x}{1-x} + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{(1 - x)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{1 - x} = 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(f(x+h) - f(x))}{(x+1)h} = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{x+1}{x^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{f(x) - f(2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{f(x) - f(2)} \times \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = \frac{1}{f'(2)} \times 4 = 4 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

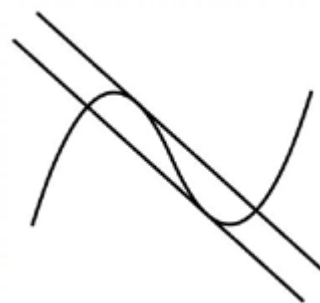
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. به دلیل تقارن سهمی، رأس سهمی وسط دو نقطه قرار می‌گیرند.

$$\frac{1}{2} \left(-1 + \frac{1-a}{2} \right) = -\frac{a}{6} \Rightarrow a = -3$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

در نقاطی که $f'(x) = -1$ باشد، تابع g تعریف نمی‌شود، بنابراین در نقاطی که مماس بر $f(x)$ شیب -۱ دارد، تابع g تعریف نمی‌شود.

بنابراین در دو نقطه A و B این شرایط رخ می‌دهد.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون مشتق تابع در هر نقطه برابر $4 - a$ است، بنابراین تابع f یک تابع خطی است و مشتق آن برابر شیب خط خواهد بود.

$$a = 4 - a \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = \frac{2x^3 + 8x - x^2 - 4}{x^2 + 4} = 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2$$

$$f(1) + f'(x) = 1 + 2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt{x^4}} = 1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. پرتوان‌ها را انتخاب می‌کنیم.



۲۱۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر ضریب x^r مثبت باشد، حاصل حد $-\infty$ است. اگر ضریب x^r منفی شود، حاصل حد $+\infty$

$$a^r - r < 0 \Rightarrow -r < a < r \xrightarrow{a \in \mathbb{Z}} a = 0, 1, -1 \quad \text{خواهد بود.}$$

$$a = r \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{r}{r} x^r \right) = -\infty$$

در صورتی که ضریب x^r برابر صفر شود، دو حالت رخ می‌دهد.

$$a = -r \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{r} x^r \right) = +\infty$$

بنابراین برای a چهار مقدار صحیح به دست می‌آید.

۲۱۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow (-r)^-} \frac{(x-r)(x+r)}{|x+r|(x+r)^r} = \lim_{x \rightarrow (-r)^-} \frac{x-r}{|x+r|(x+r)} = \frac{-r}{\cdot^-} = +\infty$$

۲۱۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow r^+} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x)} = \frac{-1}{\cdot^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow r^-} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x)} = \frac{1}{\cdot^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x)} = \frac{-1}{\cdot^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x)} = \frac{-1}{\cdot^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-r)^+} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x)} = \frac{1}{\cdot^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-r)^-} \frac{(-1)^{[x]}}{f(x)} = \frac{1}{\cdot^+} = -\infty$$

۲۱۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}^+} \frac{[-x]}{1 - r \cos x} = \frac{-r}{1 - r \left(\frac{1}{r} \right)^-} = \frac{-r}{1 - 1^-} = \frac{-r}{\cdot^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{r}^-} \frac{[-x]}{1 - r \cos x} = \frac{-r}{1 - r \left(\frac{1}{r} \right)^+} = \frac{-r}{1 - 1^+} = \frac{-r}{\cdot^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{[x]}{1 + \cos x} = \frac{r}{\cdot^+} = +\infty$$

۲۱۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[r]{x} - 1 - (\sqrt{x} - 1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[r]{x} - 1}{x - 1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[r]{x^r} + \sqrt[r]{x^{r-1}} + \dots + 1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{r} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$



$$g(x) = x^2(x-2) - (x-2) = (x-2)(x^2-1) = (x-2)(x-1)(x+1)$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 1, x = -1$$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = -1 & (1) \\ f(-1) = 0 \Rightarrow a - b + c = 1 & (2) \\ f(2) = 0 \Rightarrow 4a + 4b + c = 0 & (3) \end{cases}$$

$$2b = -2 \Rightarrow b = -1$$
 معادله‌های ۱ و ۲ را از هم کم می‌کنیم:

اکنون معادله‌های ۲ و ۳ را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ 4a + c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ 3a = -3 \end{cases} \xrightarrow{(-)} \begin{cases} a + c = 0 \\ 3a = -3 \end{cases} \Rightarrow a = -1, c = 1$$

$$f(-2) = -4a + 4b + c = -4(-1) + 4(-1) + 1 = -6$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۱۹

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

برای یافتن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ روش زیر را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 4x - 1} - 2\sqrt{x^2 + 6x}}{-x + 1 + x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 4x - 1} - 2\sqrt{x^2 + 6x}}{\sqrt{4x^2 - 4x - 1} + 2\sqrt{x^2 + 6x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 4x - 1 - 4x^2 - 24x}{4(|2x| + 2|x|)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-28x}{-16x} = \frac{28}{16} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع $f(x)$ در $x = -2$ ناپیوسته است و برای آن که حد داشته باشد $x = -2$ باید ریشه صورت کسر نیز باشد و از طرفی $x = -2$ ریشه معادله اول هم هست و داریم:

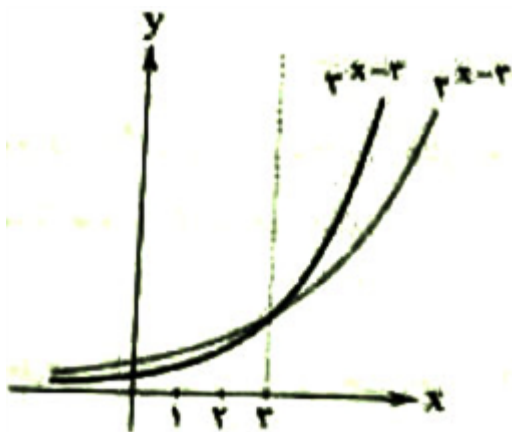
$$2\sqrt{2-x} - ax^2 - 2b = 0 \Rightarrow 2 - 2a - 2b = 0 \Rightarrow 2a + b = 2 \quad (1)$$

$$-8 - 8a + 2b = 0 \Rightarrow 4a - b = -4 \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 2 \\ 4a - b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) - x^2}{bx + a} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 - 2ax^2 + 2b}{x+2} - x^2}{bx + a} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-2a - 2)x^2}{bx^2} = \frac{-2a - 2}{b} = \frac{-\frac{1}{2} - 2}{\frac{3}{2}} = -\frac{5}{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حد چپ و راست در $x = 3$ برابر $-\infty$ هستند، بنابراین $x = 3$ ریشه مضاعف مخرج است و داریم:



$$\text{مخرج} = 3(x-3)^2 = 3x^2 - 18x + 27 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 18 \\ b = 27 \end{cases}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(-1)^{[-bx]}}{3^{x-3} - 2^{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(-1)^{[-18x]}}{3^{x-3} - 2^{x-3}}$$

با مقایسه نمودار تابع $y = 3^{x-3}$ و $y = 2^{x-3}$ ملاحظه می‌شود به ازای $x > 3$ داریم $3^{x-3} > 2^{x-3}$ بنابراین خواهیم

$$A = \frac{(-1)^{(-18)}}{+} = \frac{1}{+} = +\infty \quad \text{داشت:}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باقی‌مانده تقسیم $(f \circ f)(x+1)$ بر $x-1$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \text{باقی مانده} = (f \circ f)(2) = f(f(2))$$

$$\begin{cases} g(x) = 2 \Rightarrow \log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4 \\ (f \circ g)(x) = \frac{2x+1}{x-1} \xrightarrow{x=4} f(2) = \frac{9}{2} = 4.5 \\ g(x) = 3 \Rightarrow \log_2 x = 3 \Rightarrow x = 8 \\ (f \circ g)(x) = \frac{2x+1}{x-1} \xrightarrow{x=8} f(3) = \frac{17}{2} \end{cases}$$

$$f(f(2)) = f(4.5) = \frac{17}{2} \quad \text{بنابراین باقی‌مانده تقسیم برابر است با:}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا ضابطه توابع f و g را می‌یابیم. در تابع f ، $S(2, -1)$ رأس سهمی است، پس ضابطه تابع f به

صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-2)^2 - 1 \xrightarrow[\text{با توجه به شکل}]{f(0)=0} 0 = a(0-2)^2 - 1 \Rightarrow 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{1}{4}(x-2)^2 - 1 \xrightarrow[\text{تلاقی با محور ها}]{\frac{1}{4}(x-2)^2 - 1 = 0} \Rightarrow (x-2)^2 = 4 \\ \Rightarrow x-2 &= \pm 2 \Rightarrow x = 0, 4 \end{aligned}$$

پس خط g از دو نقطه $(0, -1)$ و $(4, 0)$ گذشته است، لذا داریم:

$$m = \frac{-1-0}{0-4} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{معادله } g} y-0 = \frac{1}{4}(x-4) \Rightarrow y = g(x) = \frac{1}{4}x - 1 \Rightarrow g(4x) = \frac{1}{4}(4x) - 1 = x - 1$$

و اما خواسته سؤال:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + x^2 - 5x + 4}{g(4x) + x^2 - x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{4}(x-2)^2 - 1 + x^2 - 5x + 4}{x-1 + x^2 - x - 6} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{4}x^2 - x + 1 - 1 + x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x} \xrightarrow{\div} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{4}x(x-4) + (x-4)(x-1)}{(x-4)(x^2 + 4x + 16)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)\left(\frac{1}{4}x + x - 1\right)}{(x-4)(x^2 + 4x + 16)} = \frac{\frac{1}{4} \times 4 + 4 - 1}{16 + 16 + 16} = \frac{4}{3 \times 16} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون حد مخرج در $x = 5$ برابر صفر است و جواب حد عددی حقیقی است، پس باید صورت کسر

$$v \times 5 + b = 0 \Rightarrow b = -25$$

نیز در $x = 5$ برابر صفر باشد، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{vx - 25}{x^2 + 2x - 25} \xrightarrow{(*)} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{v(x-5)}{(x-5)(x+5)} = \frac{v}{5+5} = \frac{v}{10} = a \quad (**)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12a \cos^2 x - 6 \cos x - 1}{v \cdot \cos x + 2b} \xrightarrow{(**)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{v \cos^2 x - 6 \cos x - 1}{v \cdot \cos x - v} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(v \cos x + 1)(\cos x - 1)}{v \cdot (\cos x - 1)} = \frac{v+1}{v} = \frac{8}{v} = \frac{4}{25}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با جایگذاری $x = \frac{1}{y}$ در تابع به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم، لذا داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{(2x-1) + \sqrt{2x-1}}{(2x-1) + \sqrt{2x-1}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2(2x-1) + \sqrt{2x-1}}{(2x-1)(2x^2 + 2x + 1) + \sqrt{2x-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{\sqrt{2x-1} (2\sqrt{2x-1} + 1)}{\sqrt{2x-1} ((\sqrt{2x-1})) (2x^2 + 2x + 1) + 1} = \frac{0+1}{0+1} = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. هرگاه $x \rightarrow \frac{1}{2}^+$ مقدار $[2x]$ برابر ۱ خواهد بود و در نتیجه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{\cos^2(\pi x)}{[2x] - \sin(\pi x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{1 - \sin^2 \pi x}{1 - \sin \pi x} \xrightarrow{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{(1 - \sin \pi x)(1 + \sin \pi x)}{1 - \sin \pi x}$$

$$= 1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x \rightarrow -2^+ \Rightarrow \begin{cases} |x+2| = x+2 \\ [2x] = -2 \\ [-2x] = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x+2| + [2x]}{x+1 - [-2x]} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x+2) + (-2)}{x+1-2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \sqrt{x+1} + 2 \Rightarrow x = \sqrt{y+1} + 2 \Rightarrow \sqrt{y+1} = x-2 \Rightarrow y+1 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+3-9}{(x-2)(x-1)(\sqrt{2x+3}+3)} = \frac{2}{2 \times 6} = \frac{1}{6}$$

$$\log_x 3 = A \Rightarrow \log_3 x = \frac{1}{A}$$

$$x \rightarrow 3 \quad A \rightarrow 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log_x x - \log_x 3}{\log_3 x - \log_3 3} = \lim_{A \rightarrow 1} \frac{A - \frac{1}{3}}{A - 1} = \lim_{A \rightarrow 1} \frac{(A-1)(A+1)}{A(A-1)} = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{a \rightarrow b} \frac{(a-b)(ab+b(a+b))}{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{b^2+b(2b)}{2b(b^2+b^2)} = \frac{1}{8} \Rightarrow b = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 6^-} \frac{5 - [x]}{x - 6} = \frac{5 - [6^-]}{6^- - 6} = \frac{5 - 5}{-} = \frac{0}{-} = 0$$

۲۳۱

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$

۲۳۲

ب) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{2x + 1} \stackrel{\text{هم ارزی}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| - x}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - x}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{2x + 1} = -1$

ج) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x + 2)}{(x + 2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{-} = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5 + x^2}}{x^2} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{5 + x^2}}{x^2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{5 + x^2}}{x^2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{-} = +\infty \end{cases}$$

۲۳۳

پس حد تابع برابر $+\infty$ است.

۲۳۴ ابتدا ریشه‌های $x - 1$ و $x - 2$ را به دست آورده و در تابع چندجمله‌ای $P(x)$ قرار داده و باقی‌مانده آن‌ها را مساوی ۳ و -5 قرار می‌دهیم.

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\begin{cases} P(1) = 3 \\ P(2) = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1)^2 + 2(1)^2 - a(1) + b = 3 \\ (2)^2 + 2(2)^2 - a(2) + b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2 - a + b = 3 \\ 4 + 8 - 2a + b = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ -2a + b = -21 \end{cases}$$

$$-a = -21 \Rightarrow a = 21$$

$$-a + b = 0 \Rightarrow -21 + b = 0 \Rightarrow b = 21$$

پس داریم که: $P(x) = x^2 + 2x^2 - 21x + 21$

الف) $f(x) = 2x^2 - x + 2 \Rightarrow f(3) = 35$

۲۳۵

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(3+h)^2 - (3+h) + 2 - 35}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(9 + 6h + h^2) - 3 - h + 2 - 35}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{22h + 2h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (22 + 2h) = 22$$

ب) $f'(3) = 22$ شیب خط در نقطه‌ای به طول ۳

معادله: $y - 35 = 22(x - 3) \Rightarrow y = 22x - 34$



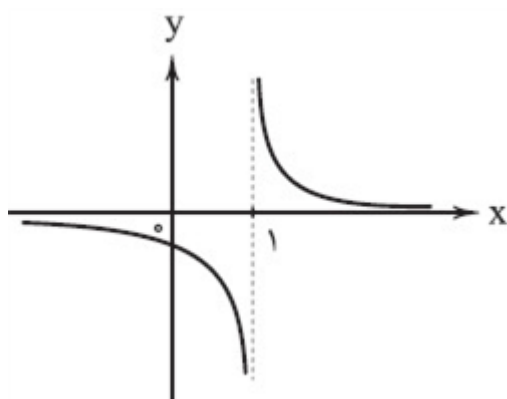
خط مماس بر منحنی در نقطه D ، موازی محور x ها است؛ بنابراین شیب آن صفر است.

شیب	-۴	-۲	۰	۱	۲
نقطه	E	A	D	C	B

شیب خط مماس بر منحنی در نقاط B و C مثبت است که با توجه به این که زاویه خط مماس در نقطه B با جهت مثبت محور x ها از زاویه در نقطه C بیشتر است، پس شیب خط B از C بیشتر است.

شیب خط مماس بر منحنی در نقاط A و E منفی است؛ زیرا از چپ به راست به صورت سرازیری است. زاویه خط مماس در نقطه A با جهت مثبت محور x ها از زاویه خط مماس در نقطه E با جهت مثبت محور x ها بیشتر است، پس مقدار شیب خط A از E بیشتر است.

مسئله بی شمار جواب دارد. یعنی بی شمار نمودار متفاوت برای این مسأله می توان رسم کرد.



عبارت $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ به این معناست که می توان مقادیرهای $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی کوچک تر کرد، به شرطی که x با مقادیر کوچک تر از ۱ به قدر کافی به ۱ نزدیک شود.

و عبارت $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ به این معناست که می توان مقادیرهای $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگ تر کرد، به شرطی که x با مقادیر بزرگ تر از ۱ به اندازه کافی به ۱ نزدیک شود.

الف) چون مقدار صورت و مخرج به ازای $x = 2$ برابر صفرند، باید عامل $(x - 2)$ را در صورت و مخرج ظاهر کرد:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x+3} = \frac{4}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{2 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{1 - 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

ب) در حد $+\infty$ ، مقادیر $\frac{1}{\sqrt{x}}$ و $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ به صفر نزدیک می شوند:

الف) می‌دانیم اگر $f(a) = 0$ باشد؛ آن‌گاه $f(x)$ بر $(x - a)$ بخش‌پذیر است.

$$f(1) = 3(1)^2 + 5(1) - 8 = 0 \Rightarrow f(x) \text{ بر } (x - 1) \text{ بخش‌پذیر است}$$

(ب)

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 + 5x - 8 & x - 1 \\ - (3x^2 - 3x) & \\ \hline 8x - 8 & \\ - (8x - 8) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\text{پ)} f(x) = 3x^2 + 5x - 8 = (x - 1)(3x^2 + 8x + 8)$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با عددگذاری در رابطه‌ی $(x - 2)f(x + 2) = (x + 2)f(x + 1)$ داریم:

$$x = -2 \Rightarrow -2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow -2f(1) = f(0) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow -2f(2) = 2f(1) = 0 \Rightarrow f(2) = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow -f(3) = 2f(2) = 0 \Rightarrow f(3) = 0$$

در نتیجه $f(x)$ بر $x - 1, x - 2, x - 3$ و $x - 4$ بخش‌پذیر است و داریم:

$$720 = k \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \Rightarrow k = 2$$

از طرفی داریم $f(6) = 720$ و می‌توان نوشت:

$$\Rightarrow f(x) = 2x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$\Rightarrow f(x) = 2[x(x - 3)][(x - 1)(x - 2)] = 2(x^2 - 3x)(x^2 - 2x + 1)$$

$$x^2 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = -3$$

برای یافتن باقی‌مانده $f(x)$ بر $x^2 - 3x + 3$ داریم:

$$\Rightarrow R = 2(-3)(-1) = 6$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا باقی‌مانده تقسیم $x^{12} + 1$ بر $x^2 + 1$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$

$$\Rightarrow \text{باقی مانده} = (x^2)^6 + 3 = (-1)^6 + 3 = 1 + 3 = 4$$

رابطه تقسیم را به صورت زیر می‌نویسیم و $Q(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$x^{12} + 3 = (x^2 + 1)Q(x) + 4 \Rightarrow x^{12} - 1 = (x^2 + 1)Q(x)$$

$$\Rightarrow (x^2)^6 - 1 = (x^2 + 1)Q(x)$$

$$\Rightarrow (x^2 + 1)(x^{10} - x^8 + x^6 - x^4 + x^2 - 1) = (x^2 + 1)Q(x)$$

$$\Rightarrow Q(x) = x^{10} - x^8 + x^6 - x^4 + x^2 - 1$$

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$

برای یافتن باقی‌مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x^2 + 1$ داریم:

$$\Rightarrow R = (-1)^5 - (-1)^4 + (-1)^3 - (-1)^2 + (-1) - 1 = -1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = -6$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴

۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴

۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	۳	۴
۸۸	۱	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	۳	۴
۹۰	۱	۲	۳	۴
۹۱	۱	۲	۳	۴
۹۲	۱	۲	۳	۴
۹۳	۱	۲	۳	۴
۹۴	۱	۲	۳	۴
۹۵	۱	۲	۳	۴
۹۶	۱	۲	۳	۴

۹۷	۱	۲	۳	۴
۹۸	۱	۲	۳	۴
۹۹	۱	۲	۳	۴
۱۰۰	۱	۲	۳	۴
۱۰۱	۱	۲	۳	۴
۱۰۲	۱	۲	۳	۴
۱۰۳	۱	۲	۳	۴
۱۰۴	۱	۲	۳	۴
۱۰۵	۱	۲	۳	۴
۱۰۶	۱	۲	۳	۴
۱۰۷	۱	۲	۳	۴
۱۰۸	۱	۲	۳	۴
۱۰۹	۱	۲	۳	۴
۱۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۱۹	۱	۲	۳	۴
۱۲۰	۱	۲	۳	۴
۱۲۱	۱	۲	۳	۴
۱۲۲	۱	۲	۳	۴
۱۲۳	۱	۲	۳	۴
۱۲۴	۱	۲	۳	۴
۱۲۵	۱	۲	۳	۴
۱۲۶	۱	۲	۳	۴
۱۲۷	۱	۲	۳	۴
۱۲۸	۱	۲	۳	۴

۱۲۹	۱	۲	۳	۴
۱۳۰	۱	۲	۳	۴
۱۳۱	۱	۲	۳	۴
۱۳۲	۱	۲	۳	۴
۱۳۳	۱	۲	۳	۴
۱۳۴	۱	۲	۳	۴
۱۳۵	۱	۲	۳	۴
۱۳۶	۱	۲	۳	۴
۱۳۷	۱	۲	۳	۴
۱۳۸	۱	۲	۳	۴
۱۳۹	۱	۲	۳	۴
۱۴۰	۱	۲	۳	۴
۱۴۱	۱	۲	۳	۴
۱۴۲	۱	۲	۳	۴
۱۴۳	۱	۲	۳	۴
۱۴۴	۱	۲	۳	۴
۱۴۵	۱	۲	۳	۴
۱۴۶	۱	۲	۳	۴
۱۴۷	۱	۲	۳	۴
۱۴۸	۱	۲	۳	۴
۱۴۹	۱	۲	۳	۴
۱۵۰	۱	۲	۳	۴
۱۵۱	۱	۲	۳	۴
۱۵۲	۱	۲	۳	۴
۱۵۳	۱	۲	۳	۴
۱۵۴	۱	۲	۳	۴
۱۵۵	۱	۲	۳	۴
۱۵۶	۱	۲	۳	۴
۱۵۷	۱	۲	۳	۴
۱۵۸	۱	۲	۳	۴
۱۵۹	۱	۲	۳	۴
۱۶۰	۱	۲	۳	۴

۱۶۱	۱	۲	۳	۴
۱۶۲	۱	۲	۳	۴
۱۶۳	۱	۲	۳	۴
۱۶۴	۱	۲	۳	۴
۱۶۵	۱	۲	۳	۴
۱۶۶	۱	۲	۳	۴
۱۶۷	۱	۲	۳	۴
۱۶۸	۱	۲	۳	۴
۱۶۹	۱	۲	۳	۴
۱۷۰	۱	۲	۳	۴
۱۷۱	۱	۲	۳	۴
۱۷۲	۱	۲	۳	۴
۱۷۳	۱	۲	۳	۴
۱۷۴	۱	۲	۳	۴
۱۷۵	۱	۲	۳	۴
۱۷۶	۱	۲	۳	۴
۱۷۷	۱	۲	۳	۴
۱۷۸	۱	۲	۳	۴
۱۷۹	۱	۲	۳	۴
۱۸۰	۱	۲	۳	۴
۱۸۱	۱	۲	۳	۴
۱۸۲	۱	۲	۳	۴
۱۸۳	۱	۲	۳	۴
۱۸۴	۱	۲	۳	۴
۱۸۵	۱	۲	۳	۴
۱۸۶	۱	۲	۳	۴
۱۸۷	۱	۲	۳	۴
۱۸۸	۱	۲	۳	۴
۱۸۹	۱	۲	۳	۴
۱۹۰	۱	۲	۳	۴
۱۹۱	۱	۲	۳	۴
۱۹۲	۱	۲	۳	۴

۱۹۳	۱	۲	۳	۴
۱۹۴	۱	۲	۳	۴
۱۹۵	۱	۲	۳	۴
۱۹۶	۱	۲	۳	۴
۱۹۷	۱	۲	۳	۴
۱۹۸	۱	۲	۳	۴
۱۹۹	۱	۲	۳	۴
۲۰۰	۱	۲	۳	۴
۲۰۱	۱	۲	۳	۴
۲۰۲	۱	۲	۳	۴
۲۰۳	۱	۲	۳	۴
۲۰۴	۱	۲	۳	۴
۲۰۵	۱	۲	۳	۴
۲۰۶	۱	۲	۳	۴
۲۰۷	۱	۲	۳	۴
۲۰۸	۱	۲	۳	۴
۲۰۹	۱	۲	۳	۴
۲۱۰	۱	۲	۳	۴
۲۱۱	۱	۲	۳	۴
۲۱۲	۱	۲	۳	۴
۲۱۳	۱	۲	۳	۴
۲۱۴	۱	۲	۳	۴
۲۱۵	۱	۲	۳	۴
۲۱۶	۱	۲	۳	۴
۲۱۷	۱	۲	۳	۴
۲۱۸	۱	۲	۳	۴
۲۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۲۴	۱	۲	۳	۴

۲۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۲۹	۱	۲	۳	۴
۲۳۰	۱	۲	۳	۴
۲۴۱	۱	۲	۳	۴
۲۴۲	۱	۲	۳	۴



