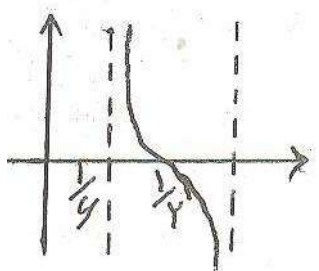


باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : حسابان ۲	ساعت شروع:	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	نام و نام خانوادگی :
رشته : ریاضی و فیزیک	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه	تاریخ امتحان:	تعداد صفحه: ۲
نوبت دی			

ردیف	سؤال	بارم
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف. اگر $k > 1$ باشد، نمودار تابع $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور xها بدست می آید. ب. هر تابع یک به یک، اکیدا یکنواست. پ. به کوچکترین انتقال افقی از نظر قدر مطلق به طوری که نمودار بر خودش منطبق باشد، دوره تناوب می گویند. ت. تابع $y = \tan x$ به ازای $x = \frac{k\pi}{4}$ تعریف نمی شود.	۱
۲	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف. اگر $x = 2$ محور تقارن سهمی $y = f(3 - x)$ باشد، محور تقارن $y = f(x - 4)$ برابر است با..... ب. تابع $f(x) = 2x^2 - 10x$ روی بازه $[a, +\infty)$ اکیدا صعودی است. حداقل مقدار a برابر است با پ. اگر عبارت $x(x + 1)^3$ بر عبارت درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + 1$ بخش پذیر باشد، آنگاه مقدار $a + b + c$ برابر است با ت. اگر $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} \leq \frac{1}{64}$ باشد، حدود x برابر است با..... ث. اگر دامنه ی تابع $y = f(2x - 3)$ برابر $[-1, 2]$ باشد، دامنه تابع $y = f(3x + 1)$ برابر است با ج. معادله $\tan x \tan 5x = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ جواب دارد.	۳
۳	قرینه ی نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده و سپس ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال می دهیم. نمودار حاصل نیمساز نواحی اول و سوم را با کدام طول قطع می کند؟	۱
۴	اگر f تابعی نزولی با دامنه R باشد، دامنه تعریف $y = \sqrt{f(x - 1) - f(x + 2)}$ را تعیین کنید.	۱

۵	باقی مانده تقسیم کوچکترین چندجمله‌ای بر دوجمله‌ای‌های $x - 2$ ، $x + 2$ و $x + 1$ برابر ۵ می‌باشد. اگر این چندجمله‌ای بر x بخش پذیر باشد، ضریب جمله با بیشترین درجه را تعیین کنید.	۱
۶	اگر باقی مانده چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x - 1$ و $x - 2$ به ترتیب مساوی ۵ و ۳ باشد، باقی مانده $xf(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ را بیابید.	۱
۷	دوره تناوب توابع زیر را تعیین کنید. الف. $y = \frac{\cos x}{\cos x}$ ب. $y = \cos^3 x \cos x - \sin^3 x \sin x$	۲
۸	نمودار تابع $f(x) = \tan(a + bx)$ به صورت مقابل است. b را بیابید. 	۱
۹	نمودار تابع $y = 3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ روی بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ در چند نقطه محور x را قطع می‌کند؟	۱

۱	جواب کلی معادله $\tan x + \cot x = \frac{2}{\cos^2 x}$ را تعیین کنید.	۱۰
۲	حاصل حدهای زیر را بیابید. الف. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{\cos^4 x - 1}$ ب. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 4x}}{\sqrt[3]{x^3 + 6x} - \sqrt[3]{x^3 + 9x^2}}$	۱۱
۱	اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^3 + ax + b} = +\infty$ باشد، $a + b$ را تعیین کنید.	۱۲
۱	اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + ax - 1} + bx + 1) = 0$ مقدار $b - a$ را تعیین کنید.	۱۳
۱	نمودار تابع $f(x) = \log\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)$ چند خط مجانب قائم دارد؟	۱۴

۱	اگر مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x} - 4}{x - 1}$ نمودار تابع را در نقطه A قطع کند، فاصله نقطه A تا مجانب قائم آن چقدر است؟	۱۵
۱	مساحت ناحیه‌ی محصور بین مجانب‌های قائم و افقی تابع $f(x) = \frac{x + [x]}{ x - 1}$ چند واحد سطح است؟	۱۶

ردیف	سؤال	بارم
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف. اگر $k > 1$ باشد، نمودار تابع $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور xها بدست می آید. (نادرست) ب. هر تابع یک به یک، اکیدا یکنواست. (نادرست) پ. به کوچکترین انتقال افقی از نظر قدرمطلق به طوری که نمودار بر خودش منطبق باشد، دوره تناوب می گویند. ت. تابع $y = \tan x$ به ازای $x = \frac{k\pi}{p}$ تعریف نمی شود. (نادرست)	۱
۲	جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف. اگر $x = 2$ محور تقارن سهمنی $y = f(3-x)$ باشد، محور تقارن $y = f(x-4)$ برابر است با $x = 5$. ب. تابع $f(x) = 2x^2 - 10x$ روی بازه $[a, +\infty)$ اکیدا صعودی است. حداقل مقدار a برابر است با $\frac{5}{2}$. پ. اگر عبارت $x(x+1)^3$ بر عبارت درجه سوم $ax^3 + bx^2 + cx + 1$ بخش پذیر باشد، آنگاه مقدار $a + b + c$ برابر است با $\dots\dots\dots$ (هفت) ت. اگر $\frac{1}{64} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2}$ باشد، حدود x برابر است با $\dots\dots\dots \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$. ث. اگر دامنه ی تابع $y = f(2x-3)$ برابر $[-1, 2]$ باشد، دامنه تابع $y = f(3x+1)$ برابر است با $\dots\dots\dots [0, 2]$. ج. معادله $\tan x \tan 5x = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ $\dots\dots\dots$ جواب دارد.	۳
۳	قرینه ی نمودار $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده و سپس ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال می دهیم. نمودار حاصل نیمساز نواحی اول و سوم را با کدام طول قطع می کند؟ $y = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{نقطه } (-2, 0)]{\text{نیمساز}} y = \sqrt{-x} \xrightarrow[\text{نقطه } (2, 0)]{\text{نیمساز}} y = \sqrt{2-x}$ $y = \sqrt{2-x} = x \Rightarrow 2-x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) = 0$ $0 < x < 2 \Rightarrow x = 1$	۱
۴	اگر f تابعی نزولی با دامنه R باشد، دامنه تعریف $y = \sqrt{f(x-1) - f(x+2)}$ را تعیین کنید. $f(x-1) \geq f(x+2) \xrightarrow{\text{تروی}} x-1 \leq x+2$ $\xrightarrow{\text{تروی}} (x-1)^2 \leq (x+2)^2 \Rightarrow (x-1+x+2)(x-1-x-2) \leq 0$ $\Rightarrow 2x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$	۱

باقی مانده تقسیم کوچکترین چندجمله‌ای بر دو جمله‌ای‌های $x-2$ ، $x+2$ و $x+1$ برابر ۵ می‌باشد. اگر این چندجمله‌ای بر x بخش پذیر باشد، ضریب جمله با بیشترین درجه را تعیین کنید.

کوچکترین چندجمله‌ای صورت زیر است:

$$p(x) = a(x+1)(x+2)(x-2) + 5$$

نمونه x نخب پذیر است $\rightarrow p(0) = 0 \Rightarrow -4a + 5 = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{4}$

ضریب جمله با بیشترین درجه $\rightarrow \frac{5}{4}x^3$

اگر باقی مانده چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-1$ و $x-2$ به ترتیب مساوی ۵ و ۳ باشد، باقی مانده $xf(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ را بیابید.

$$f(1) = 5, f(2) = 3$$

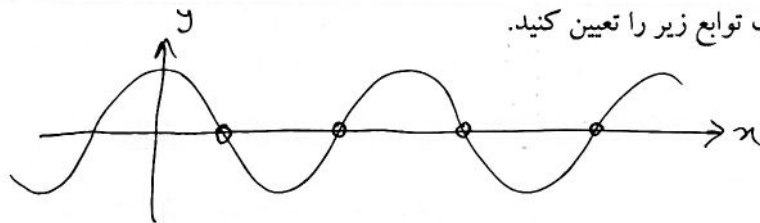
$$xf(x) = (x-1)(x-2)q(x) + \alpha x + \beta$$

$$\begin{cases} x=1: f(1) = \alpha + \beta = 5 \\ x=2: 2f(2) = 2\alpha + \beta = 6 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 4$$

باقی مانده $\frac{1}{4}x + 4$

الف $y = \frac{\cos x}{\cos x}$

$T = 2\pi$

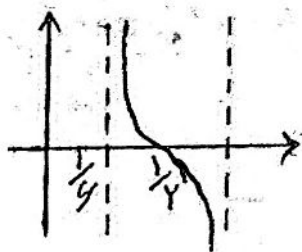


دوره تناوب توابع زیر را تعیین کنید.

ب $y = \cos^2 x \cos x - \sin^2 x \sin x = \cos(2x + x) = \cos 3x$

$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{1.5}$

نمودار تابع $f(x) = \tan(a + bx)$ به صورت مقابل است. b را بیابید.



نصف دوره $\frac{\pi}{2}$ برابر $\frac{1}{3}$ $\rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{|b|} = \frac{1}{12} \Rightarrow |b| = 12\pi \rightarrow b < 0$

$\Rightarrow b = -12\pi$

نمودار تابع $y = 3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$ روی بازه $[-\pi, \frac{3\pi}{4}]$ در چند نقطه محور x را قطع می‌کند؟

$$y = 3\sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0 \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{4} + 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k}{2}\pi + \frac{\pi}{8} = \frac{2k+1}{4}\pi$$

$\Rightarrow -1 < \frac{2k+1}{4} < \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{9}{2} < k < \frac{11}{2} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = -2, -1, 0, 1, 2$
معادله ۵ جواب دارد.

جواب کلی معادله $\tan x + \cot x = \frac{2}{\cos 2x}$ را تعیین کنید.

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin 2x}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\sin 2x} = \frac{2}{\cos 2x} \Rightarrow \sin 2x = \cos 2x \Rightarrow \tan 2x = 1$$

$$\Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

۱۰

حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{\cos^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\tan x}{2 \cos^2 x - 2} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{-2 \sin^2 x}$

$$= \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{1}{-2 \sin x \cos^2 x} = \frac{1}{-2(1)(0^-)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

ب. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-4x}}{\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2+9x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x+1| - |x-2|}{-x - (x+3)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-1+x-2}{-3}$

$$= \frac{-3}{-3} = 1$$

۱۱

اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^3+ax+b} = +\infty$ باشد، $a+b$ را تعیین کنید.

$$x^3+ax+b = (x-c)(x-3)^2 = (x-c)(x^2-6x+9)$$

$$\Rightarrow x^3+ax+b = x^3 - (c+6)x^2 + (6c+9)x - 9c$$

$$c+6=0 \Rightarrow c=-6 \Rightarrow x^3+ax+b = x^3 - 27x + 54$$

$$\Rightarrow a=-27, b=54 \Rightarrow a+b=27$$

۱۲

اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2+ax-1} + bx+1) = 0$ مقدار $b-a$ را تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2+ax-1} + bx+1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (|2x + \frac{a}{4}| + bx+1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - \frac{a}{2} + bx+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ -\frac{a}{2} = -1 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b-a = -4$$

۱۳

نمودار تابع $f(x) = \log(\frac{x^2}{1-x^2})$ چند خط مجانب قائم دارد؟

شیب ۱ و مجانب قائم: $y = \frac{x^2}{1-x^2}$ شیب ۲ و مجانب قائم: f شیب ۱

$$\frac{x^2}{1-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$1-x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

نمودار ۳ مجانب قائم دارد.

۱۴

اگر مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x} - 4}{x-1}$ نمودار تابع را در نقطه A قطع کند، فاصله نقطه A تا مجانب قائم آن چقدر است؟

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$y=2$ مجانب افقی و $x=1$ مجانب قائم است.

$$\frac{2x + \sqrt{x} - 4}{x-1} = 2 \Rightarrow 2x + \sqrt{x} - 4 = 2x - 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

فاصله نقطه A از خط مجانب قائم $x=1$ برابر $|4-1|=3$ است.

۱۵

مساحت ناحیه‌ی محصور بین مجانب‌های قائم و افقی تابع $f(x) = \frac{x+[x]}{|x|-1}$ چند واحد سطح است؟

$$|x|=1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+[x]}{|x|-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{\pm x} = \pm 2$$

خطوط $x=1$ و $x=-1$ مجانب قائم و خطوط $y=2$ و $y=-2$ مجانب افقی هستند.

۱۶

سطح نصیر و دوبرین این خط برابر است: $[2-(-2)] \times [1-(-1)] = 8$