



www.sejall.ir

تست های طبقه بندی شده و فصل به فصل کنکور سراسری همراه با پاسخ کامل تشریحی

پایه تحصیلی : یازدهم ریاضی

نام درس : هندسه ۲

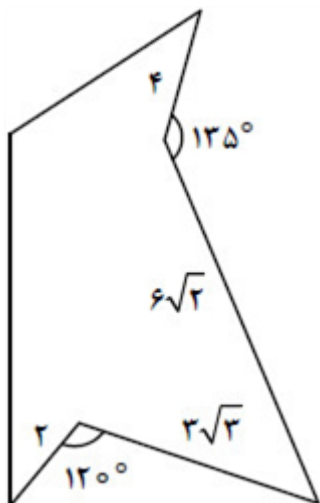
نام آموزشگاه : سامانه جامع آزمونهای

الکترونیکی سجال sejall.ir

سوال ۱۳۷

هندسه ۲

۱ میزان افزایش مساحت شکل مقابل، بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع، کدام است؟



۳۹ (۴)

۳۳ (۳)

۱۹/۵ (۲)

۱۶/۵ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲ در مثلث ABC، M وسط BC و MP و MQ به ترتیب نیمساز زوایای $\widehat{AMC}$ و $\widehat{AMB}$ هستند. اگر $AP = \sqrt{5}$ ، $CP = 3\sqrt{5}$ و $MP = \sqrt{33}$ باشند، طول MQ کدام است؟

$\sqrt{3}$ (۴)

$\sqrt{5}$ (۳)

$\sqrt{11}$ (۲)

$\sqrt{13}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳ مماسهای رسم شده بر دو دایره متقاطع در نقطه تقاطع دو دایره، بر هم عمودند. اگر اندازه شعاع دو دایره ۸ و ۱۵ باشد، فاصله بین مراکز دو دایره کدام است؟

۱۱/۵ (۴)

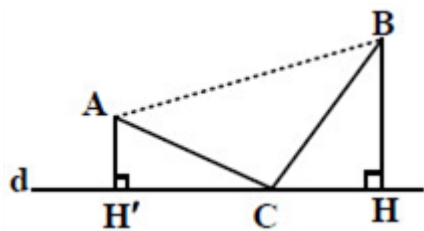
۱۳ (۳)

۱۶/۵ (۲)

۱۷ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴ در شکل مقابل، فاصله نقاط A و B از خط d به ترتیب، ۴ و ۶ واحد است و نقطه C روی خط d طوری انتخاب شده است که محیط مثلث ABC کمترین باشد. اگر مساحت چهارضلعی ABHH' برابر $۵۰\sqrt{۳}$ باشد، اندازه CH کدام است؟



۱۰۰ $\sqrt{۳}$ (۴)

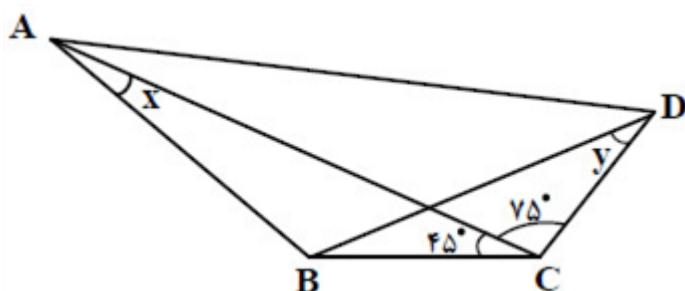
۸ $\sqrt{۳}$ (۳)

۶ $\sqrt{۳}$ (۲)

۴ $\sqrt{۳}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴ تیرماه

۵ در شکل مقابل، اگر $\widehat{ADB} = \widehat{BAD}$ و $x + y = 90^\circ$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام است؟



$\frac{\sqrt{۶}}{۶}$ (۴)

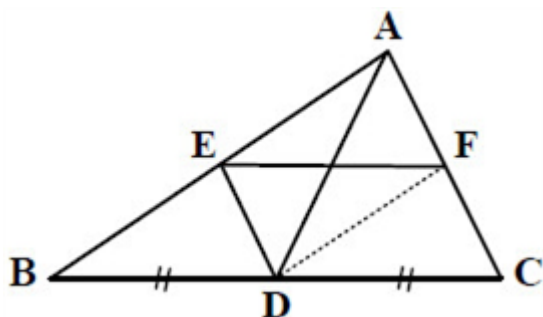
$\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ (۳)

$\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ (۲)

$\frac{\sqrt{۶}}{۲}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴ تیرماه

۶ در مثلث ABC، DE نیمساز زاویه $\widehat{ADB}$ و $EF \parallel BC$ است. اگر $AC = ۸$ ، $BC = ۱۴$ و $AD = ۳$ باشد، اندازه DF کدام است؟



$\frac{۱}{۶}\sqrt{۲۱}$ (۴)

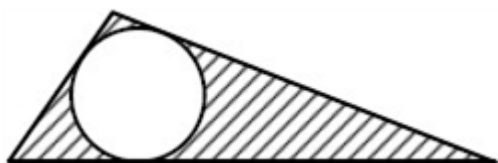
$\frac{۱}{۵}\sqrt{۲۱}$ (۳)

$\frac{۱}{۹}\sqrt{۷}$ (۲)

$\sqrt{۷}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴ تیرماه

۷ در شکل مقابل، محیط مثلث محیطی $\sqrt{۴۸\pi}$ است. اگر مساحت قسمت هاشورخورده برابر ۳ باشد، مساحت مثلث محیطی کدام است؟



$\frac{۱}{۵}\pi + ۳$ (۴)

$\pi + ۳$ (۳)

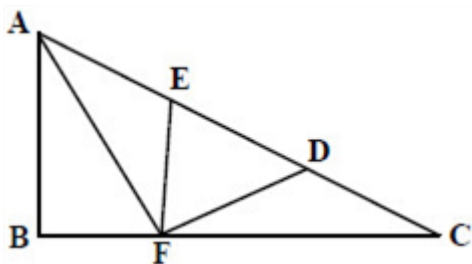
$\frac{۶}{۵}$ (۲)

۶ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴ تیرماه



۸ در مثلث شکل مقابل، نقاط D و E ضلع AC را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و مثلث EFD، متساوی الاضلاع است. اگر $\frac{AF}{BC} = \frac{2}{3}$ و $AB = 3\sqrt{3}$ باشد، طول FC کدام است؟



۶ $\sqrt{3}$ (۴)

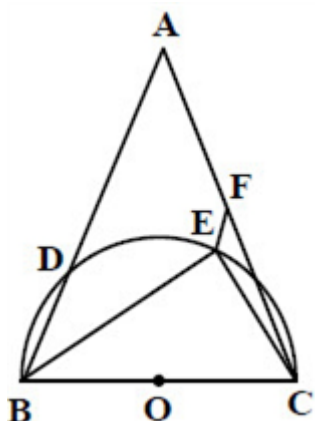
۶ (۳)

۴ (۲)

۴ $\sqrt{3}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴ تیرماه

۹ در شکل مقابل، شعاع نیم‌دایره برابر ۴/۵ و $EF = 2$ است. اگر $\widehat{DE} = \widehat{EC}$ و $\frac{AF}{AC} = \frac{1}{2}$ باشد، اندازه AB کدام است؟



۱۵ (۴)

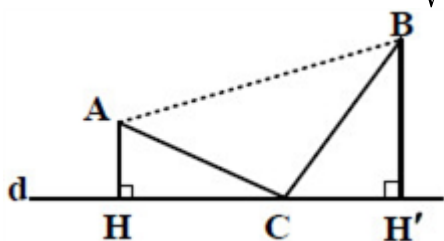
۱۴ (۳)

۱۳ (۲)

۱۲ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴ تیرماه

۱۰ در شکل مقابل، فاصله نقاط A و B از خط d، به ترتیب، $2\sqrt{3}$ و $5\sqrt{3}$ واحد است و نقطه C روی خط d طوری انتخاب شده است که محیط مثلث ABC کمترین باشد. اگر مساحت مثلث ACH برابر $6\sqrt{3}$ باشد، اندازه HH' کدام است؟



۲۴ (۴)

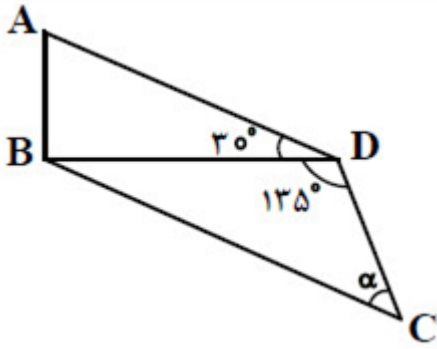
۲۱ (۳)

۱۸ (۲)

۱۵ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱ در شکل مقابل، اگر $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ و زاویه $\widehat{ABC} = 105^\circ$ باشد، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟



$\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۴)

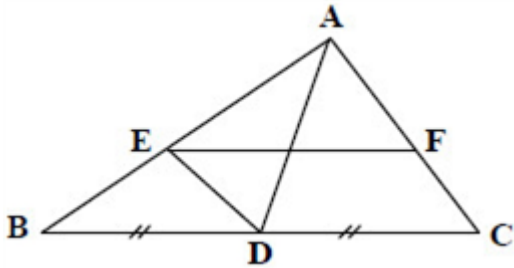
$\frac{\sqrt{2}}{3}$ (۳)

$\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (۲)

$\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۲ در مثلث ABC، $EF \parallel BC$ و $\widehat{ADE} = \widehat{BDE}$ است. اگر $AC = 7$ ، $BC = 10$ و $AD = 3$ باشد، طول نیمساز زاویه $\widehat{ADC}$ کدام است؟



$\frac{15}{8}$ (۴)

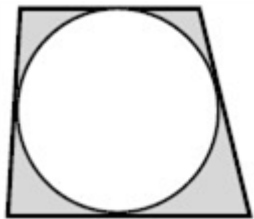
$\frac{17}{8}$ (۳)

$\frac{19}{8}$ (۲)

$\frac{21}{8}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۳ در شکل مقابل، محیط چهارضلعی محیطی $\sqrt{80\pi}$ است. اگر مساحت قسمت سایه‌خورده ۵ باشد، اندازه محیط دایره محاطی کدام است؟



$2\sqrt{5\pi}$ (۴)

$\sqrt{5\pi}$ (۳)

$2\sqrt{5\pi}$ (۲)

$\sqrt{5\pi}$ (۱)

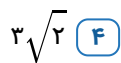
کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی



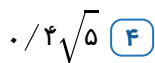
14

 $\wedge \boxed{\gamma}$

15


$$r/\omega\sqrt{\tau} \quad (2)$$

١٤

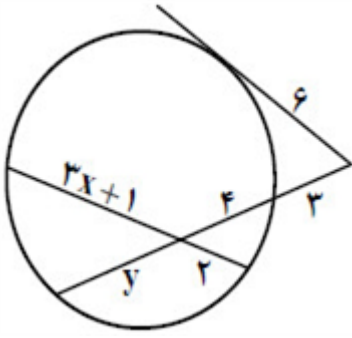

$$\cdot / \sqrt[4]{10} \quad (2)$$

۱۷

۲۰ (۳)



۱۸ در شکل مقابل، مقدار $\frac{x}{y}$ کدام است؟



۰/۶ (۴)

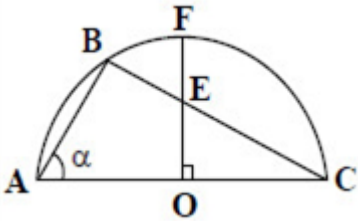
۰/۵ (۳)

۰/۴ (۲)

۰/۳ (۱)

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۱۹ در نیم‌دایره مقابل، اگر $\sin \alpha = ۰/۸$ باشد، مقدار $\frac{BE}{EF}$ کدام است؟



۱/۵ (۴)

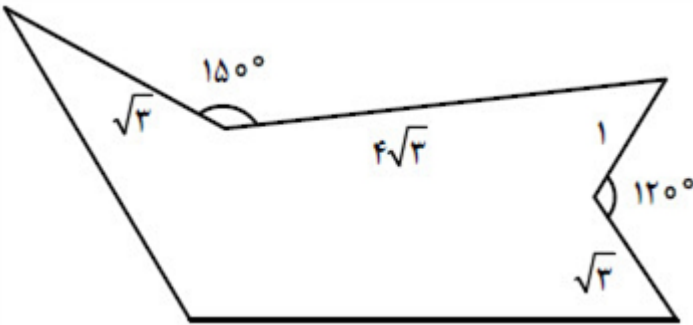
۱/۴ (۳)

۱/۳ (۲)

۱/۲ (۱)

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۲۰ میزان افزایش مساحت شکل مقابل، بدون تغییر در محیط و تعداد اضلاع، کدام است؟



۴/۵ (۴)

۷/۵ (۳)

۹ (۲)

۱۵ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۲۱ در مثلث ABC، $BC = ۱۰$ ، نقطه D وسط BC و DE و DF به‌ترتیب نیمساز زوایای $\widehat{ADC}$ و $\widehat{ADB}$ هستند. اگر $AF = ۱۲\sqrt{۲}$ و $BF = ۳\sqrt{۲}$ باشد، طول نیمساز DE کدام است؟

$۲\sqrt{۷}$ (۴)

$\sqrt{۷}$ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۲۲ مماس‌های رسم شده بر دو دایره متقاطع در نقطه تقاطع دو دایره، بر هم عمودند. اگر شعاع دایره کوچک‌تر $۱/۵$ و فاصله بین مراکز دو دایره $۲/۵$ باشد، شعاع دایره بزرگ‌تر، کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

$\sqrt{۵}$ (۲)

$\sqrt{۳}$ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۲۳ در کدام تبدیل، همواره جهت شکل حفظ نمی‌شود؟

۴ تجانس

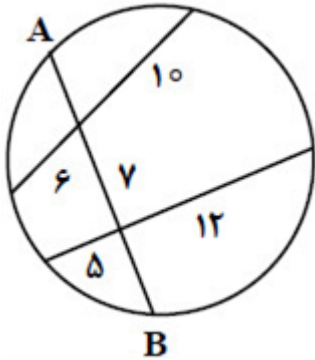
۳ انتقال

۲ دوران

۱ بازتاب

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۲۴ در شکل مقابل، طول وتر AB کدام است؟



۴ ۱۹

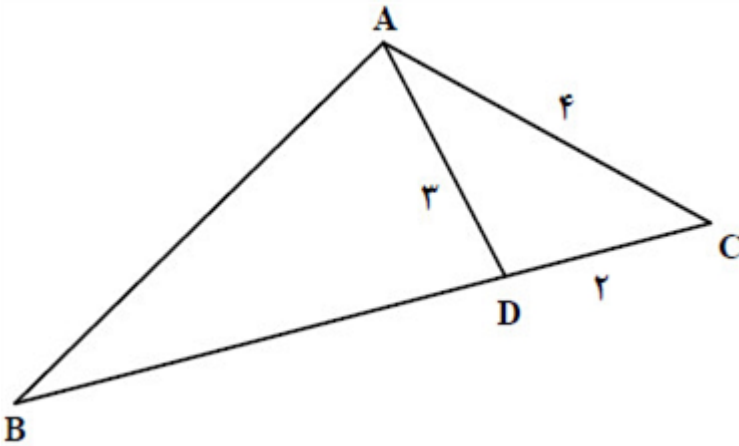
۳ ۱۸

۲ ۱۷

۱ ۱۶

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۲۵ در شکل مقابل، اگر $\widehat{BAD} = 3\widehat{DAC}$ باشد، محیط مثلث ABC کدام است؟



۴ ۲۸/۵

۳ ۲۷

۲ ۲۵/۵

۱ ۲۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۶ پاره‌خط AB به طول ۵ در یک طرف خط d قرار دارد. فاصله دوسر پاره‌خط AB از خط d به ترتیب ۱ و ۵ است. نقطه C طوری روی خط d انتخاب می‌شود که محیط مثلث ABC کمترین مقدار باشد، حداقل مجموع اندازه‌های دو ضلع AC و BC کدام است؟

۴ $4\sqrt{6}$

۳ $3\sqrt{5}$

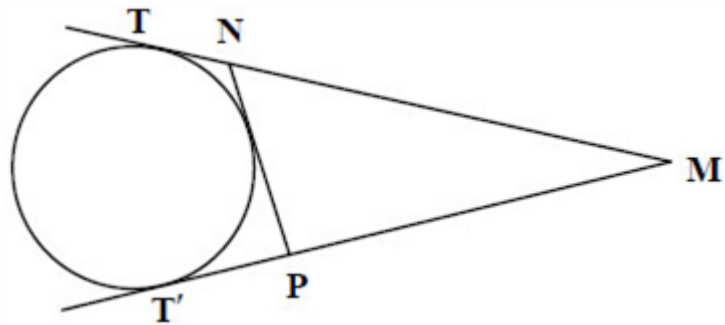
۲ $\sqrt{65}$

۱ $\sqrt{57}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۷

در شکل زیر، از نقطه M دو مماس بر دایره رسم شده است. اگر $MT = ۱۸$ ، $MN = ۱۵$ و $MP = ۱۲$ باشد، شعاع دایره



کدام است؟

۴ $\sqrt{۵}$ (۴)

۴ $\sqrt{۵}$ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۸

چهارضلعی ABCD در یک دایره محاط شده است. رأس‌های این چهارضلعی، رئوس زوایای ظلی واقع بر دایره هستند. مجموع این زاویه‌های ظلی کدام است؟

۷۲۰ (۴)

۳۶۰ (۳)

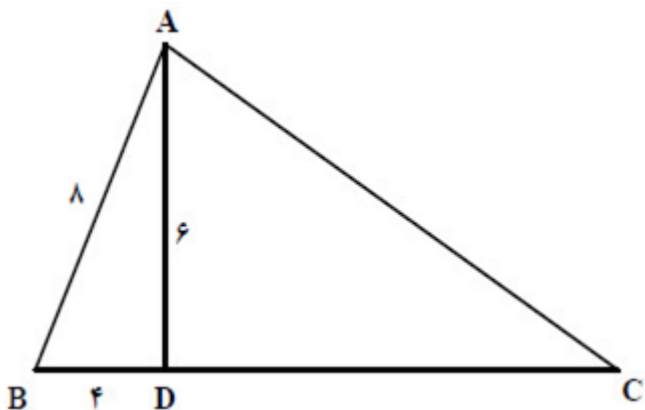
۵۴۰ (۲)

۱۸۰ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۹

در شکل مقابل، اگر $\hat{D}AC = ۳\hat{B}AD$ باشد، طول ضلع AC کدام است؟



۱۵/۴ (۴)

۱۸/۶ (۳)

۱۶/۸ (۲)

۱۹/۲ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۳۰

در بین مثلث‌هایی با مساحت ۳۰ واحد مربع که در ضلعی به اندازه ۱۵ واحد مشترک هستند، کمترین مقدار محیط کدام است؟

۳۶ (۴)

۳۴ (۳)

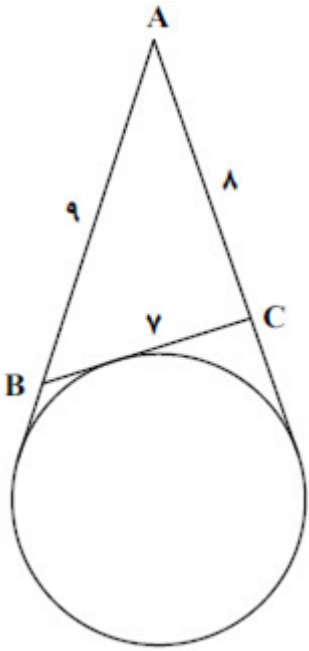
۳۲ (۲)

۳۰ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه



31



$$v / \gamma \sqrt{\gamma} \quad (1)$$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

32

ΔF_0 (1)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

33

$$\frac{5}{x} \sqrt{v} \quad (1)$$

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۳۴

$\sqrt{34} \quad 1$

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

35

5 (1)

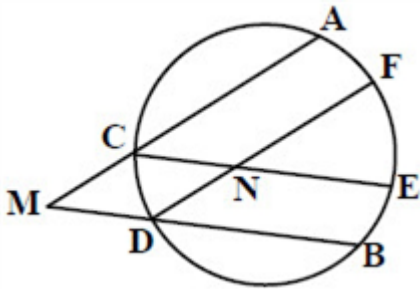
سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

36

$$\frac{19}{2} \quad (1)$$



۳۷ در شکل مقابل، $BD \parallel CE$ ، $AC \parallel DF$ ، $\widehat{AC} = ۸۵^\circ$ و $\widehat{BD} = ۷۵^\circ$ است. اگر $\widehat{CNF} = ۱۳۵^\circ$ باشد، اندازه کمان $\widehat{EF}$ چند درجه است؟



۳۵ (۴)

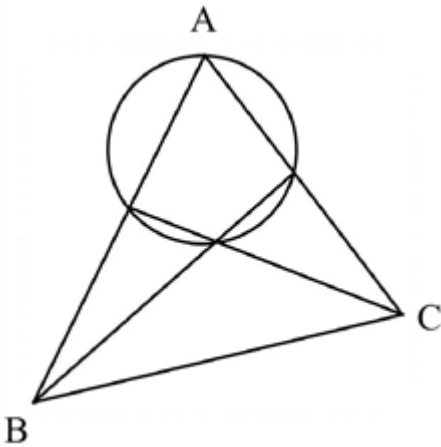
۳۵ (۳)

۴۰ (۲)

۴۵ (۱)

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۳۸ در شکل مقابل، نیمسازهای زاویه‌های B و C در مثلث ABC رسم شده‌اند. اگر چهارضلعی داخل دایره محاطی باشد، زاویه A چند درجه است؟



۴۵ (۴)

۶۰ (۳)

۷۵ (۲)

۹۰ (۱)

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۳۹ یک دایره به شعاع ۲، داخل دوزنقه متساوی‌الساقینی محاط شده است. اگر یکی از زوایای دوزنقه ۶۰ درجه باشد، مساحت این دوزنقه کدام است؟

$\frac{۳۲}{\sqrt{۳}}$ (۴)

$\frac{۲۴}{\sqrt{۳}}$ (۳)

$\frac{۱۶}{\sqrt{۳}}$ (۲)

$\frac{۱۲}{\sqrt{۳}}$ (۱)

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۴۰ اضلاع مثلثی با اعداد ۴، ۵ و ۶ متناسب است. نیمساز زاویه متوسط را رسم می‌کنیم. مساحت مثلث اصلی، چند برابر مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصل از رسم این نیمساز است؟

۳ (۴)

$\frac{۵}{۲}$ (۳)

۲ (۲)

$\frac{۳}{۲}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۱ در مربع ABCD، نقطه (۴، ۱) رأس A و عرض رأس‌های C و D به ترتیب ۱ و ۳ است. اگر بازتاب نقطه C نسبت به محور yها بر خودش منطبق شود، فاصله بازتاب نقطه D نسبت به قطر AC از مبدأ مختصات چقدر است؟

$\sqrt{۷}$ (۴)

$\sqrt{۱۷}$ (۳)

$\sqrt{۱۳}$ (۲)

$\sqrt{۵}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی



۴۲ طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ برابر شعاع دایره بزرگتر است. شعاع دایره بزرگتر، چند برابر شعاع دایره کوچکتر است؟

۱۶/۳ (۴)

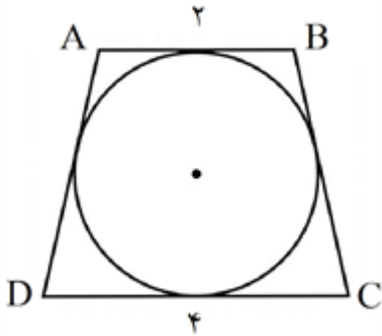
۴ (۳)

۸/۳ (۲)

۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۳ در شکل مقابل، دوزنقه متساوی الساقین ABCD، بر دایره‌ای محیط شده است. مساحت این دایره کدام است؟



۸π (۴)

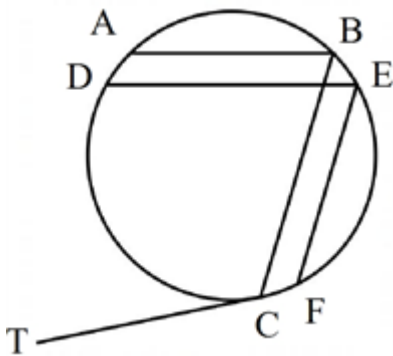
۶π (۳)

۴π (۲)

۲π (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۴ در شکل مقابل، $AB \parallel DE$ و $EF \parallel BC$ است. اگر $\widehat{AB} = 60^\circ$ ، $\widehat{CD} = 100^\circ$ و $\widehat{EF} = 80^\circ$ باشد، اندازه $\widehat{BCT}$ چند درجه است؟



۱۱۰ (۴)

۱۰۰ (۳)

۹۵ (۲)

۹۰ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۵ نیمساز داخلی زاویه A در مثلث ABC، ضلع مقابل را به پاره‌خط‌های $3/5$ و $2/5$ واحدی تقسیم کرده است. اگر اندازه زاویه C برابر 60° باشد، ضلع کوچکتر مثلث چند واحد است؟

۵/۲۵ (۴)

۴/۷۵ (۳)

۴/۲۵ (۲)

۲/۷۵ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۴۶ در مربع ABCD، نقطه (۳، ۵) رأس B و طول رأس‌های C و D به ترتیب $5/5$ و ۳ است. اگر بازتاب نقطه D نسبت به محور xها بر خودش منطبق شود، فاصله بازتاب نقطه C نسبت به قطر BD از مبدأ مختصات چقدر است؟

۲ (۴)

$\sqrt{6}$ (۳)

$\sqrt{6/5}$ (۲)

۲/۵ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱



۴۷ طول خط المركزين دو دایره مماس درونی $\frac{3}{5}$ سانتی متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها 21π سانتی متر مربع است. شعاع دایره کوچکتر، چند سانتی متر است؟

۲/۷۵ (۴)

۲/۲۵ (۳)

۱/۷۵ (۲)

۱/۲۵ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۴۸ یک ذوزنقه متساوی الساقین با طول قاعده های a و 6 واحد، بر دایره ای به مساحت 15π محیط است. مقدار a کدام است؟

۱۰ (۴)

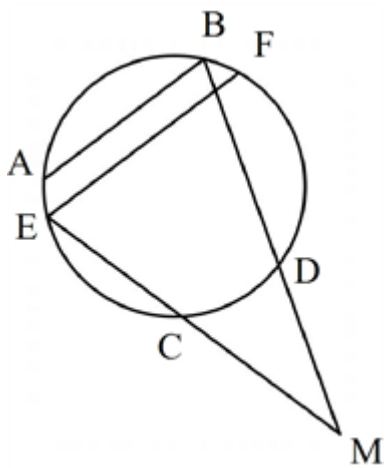
$\frac{22}{3}$ (۳)

۸ (۲)

$\frac{25}{3}$ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۴۹ در شکل مقابل، $AB \parallel EF$ و اندازه کمان های $\widehat{AE} = 15^\circ$ ، $\widehat{EC} = 80^\circ$ و $\widehat{FD} = 100^\circ$ است. اگر $\widehat{BME} = 20^\circ$ باشد، اندازه زاویه $\widehat{ABD}$ چند درجه است؟



۷۸/۷۵ (۴)

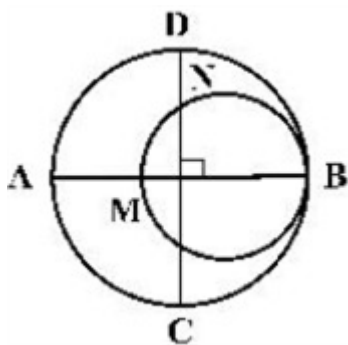
۷۵ (۳)

۷۴ (۲)

۷۱/۲۵ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۵۰ در شکل زیر، دو دایره برهم مماس و قطرهای AB و CD از دایره بزرگتر بر هم عمود هستند. اگر $AM = 16$ ، $DN = 10$ باشد، شعاع دایره کوچکتر، کدام است؟



۲۵ (۴)

۱۷ (۳)

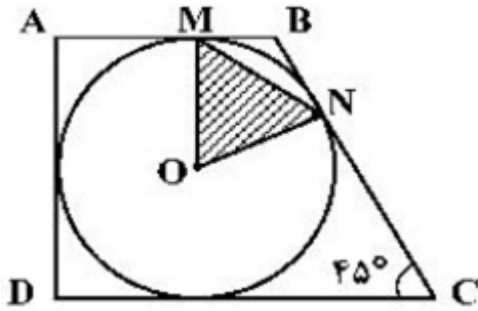
۱۶ (۲)

۱۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی



۵۱) مطابق شکل زیر، در دوزنقه‌ی ABCD دایره‌ای به شعاع ۳ محاط شده است. مساحت مثلث OMN، کدام است؟



۴ $\frac{9\sqrt{2}}{8}$

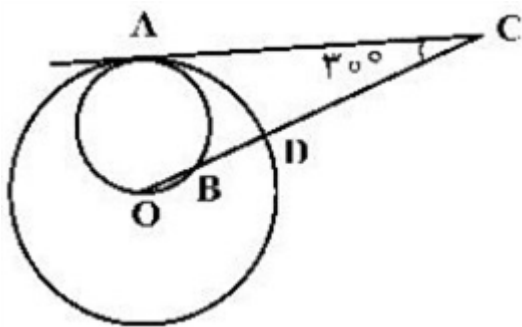
۳ $\frac{9\sqrt{2}}{4}$

۲ $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

۱ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۵۲) در شکل زیر، پاره‌خط AC و دایره‌ی کوچک، در نقطه‌ی A، بر دایره‌ی بزرگ به شعاع ۶ و مرکز O واقع بر محیط دایره‌ی کوچک مماس‌اند. طول پاره‌خط BD، کدام است؟



۴ ۲

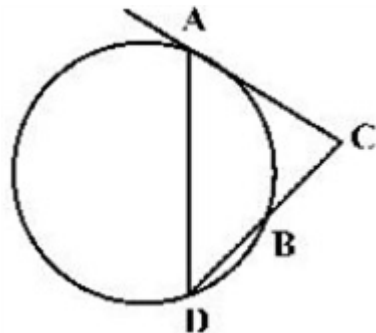
۳ $\sqrt{6}$

۲ ۳

۱ ۴

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۵۳) در شکل زیر پاره‌خط AC بر دایره مماس است. اگر $DB = BC$ آن‌گاه نسبت $\frac{AC}{BC}$ ، کدام است؟



۴ $\sqrt{2}$

۳ ۱

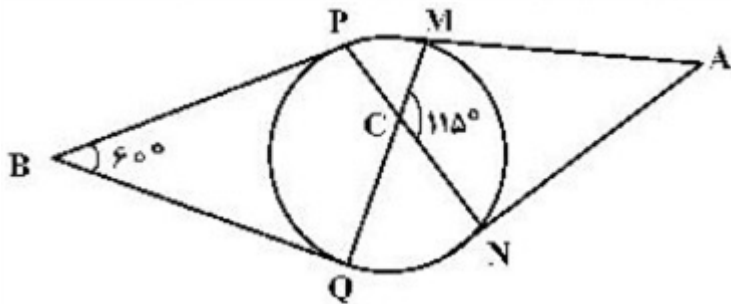
۲ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۱ $\frac{1}{2}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی



۵۴) پاره‌خط‌های AM، AN، BP و BQ مطابق شکل زیر بر دایره مماس‌اند. زاویه‌ی MAN، به درجه، کدام است؟



۷۵ (۴)

۷۰ (۳)

۶۵ (۲)

۶۰ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۵) فرض کنید طول خط‌المرکزین دو دایره با شعاع‌های $a-1$ و a^2-2 ، برابر ۶ واحد باشد. اگر دو دایره فقط یک مماس مشترک داشته باشند، میانگین مقادیر ممکن برای a ، کدام است؟

۷ (۴)

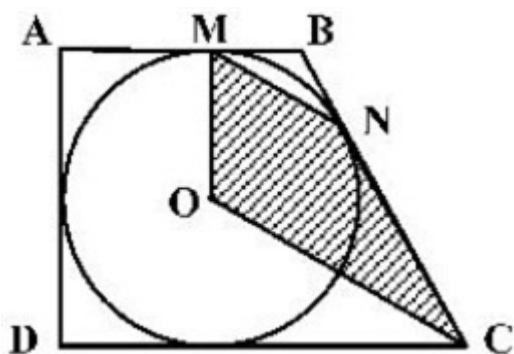
۶ (۳)

$\frac{13}{3}$ (۲)

۳ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۵۶) مطابق شکل زیر ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه ABCD بر دایره‌ای به شعاع ۳، محیط شده است. اگر زاویه‌ی $\widehat{MBN} = 120^\circ$ باشد، مساحت چهارضلعی OMNC، کدام است؟



$9\sqrt{3}$ (۴)

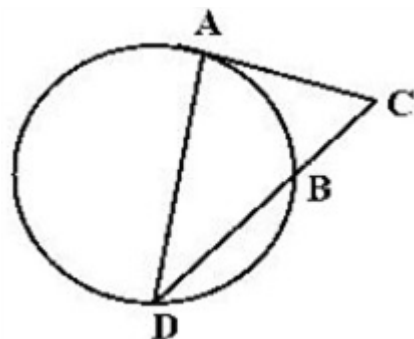
$\frac{27\sqrt{3}}{2}$ (۳)

$\frac{9\sqrt{3}}{2}$ (۲)

$\frac{27\sqrt{3}}{4}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۵۷) در شکل زیر پاره‌خط AC بر دایره مماس است. اگر $\frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت $\frac{DB}{BC}$ ، کدام است؟



۳ (۴)

۲ (۳)

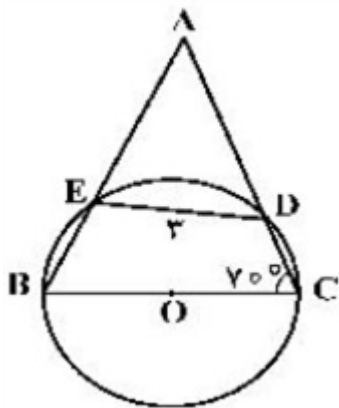
$\sqrt{3}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰



۵۸ در شکل زیر شعاع دایره ۳ واحد است. اندازهی کمان $\widehat{EDC}$ به درجه، کدام است؟



۱۲۰ (۴)

۱۰۰ (۳)

۹۰ (۲)

۸۰ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۵۹ زاویهی $\widehat{Oy}$ و نقطه‌ی M داخل زاویه با شرط $\widehat{M\hat{O}y} = \widehat{x\hat{O}M}$ باشد، مفروض است. از نقطه‌ی M عمودهای MN و MP را به ترتیب برنیم خط های Ox و Oy رسم می‌کنیم. نسبت $\frac{MN}{MP}$ ، کدام است؟

$\frac{2OP}{OM}$ (۴)

$\frac{2OP}{ON}$ (۳)

$\frac{OP}{OM}$ (۲)

$\frac{OP}{ON}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۶۰ مثلثی با طول ضلع ۱۳، ۱۴ و ۱۵ مفروض است. اندازه‌ی طول ضلع شش‌ضلعی محاط شده در این مثلث، کدام است؟

$\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (۴)

۴ (۳)

$\frac{8\sqrt{3}}{3}$ (۲)

۸ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۶۱ مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC به طول وتر ۸ واحد مفروض است. این مثلث را توسط بردار $\overrightarrow{AT}$ که در جهت بردار $\overrightarrow{AM}$ (M وسط وتر BC) قرار دارد، انتقال می‌دهیم. اگر مساحت محدود بین مثلث اولیه و جدید، $\frac{1}{16}$ مساحت اولیه باشد، اندازه بردار $\overrightarrow{AT}$ ، کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

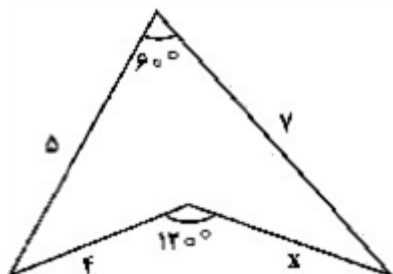
$\frac{1}{3}$ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۶۲ در شکل زیر، مقدار $(x + 2)$ ، کدام است؟



$3\sqrt{5}$ (۴)

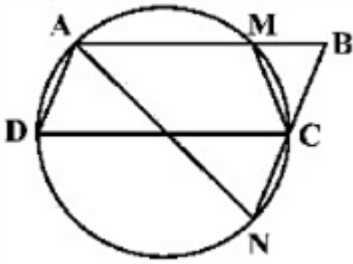
$4\sqrt{2}$ (۳)

$2\sqrt{7}$ (۲)

$3\sqrt{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶۳ در شکل زیر، چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع است. تعداد مثلث‌های متساوی الساقین، کدام است؟



۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۶۴ چهار نقطه‌ی $A(1, 3)$ ، $B(15, 9)$ ، $M(a, 0)$ و $N(a + 5, 0)$ در صفحه‌ی مختصات مفروض‌اند. کم‌ترین اندازه‌ی خط شکسته‌ی AMNB، کدام است؟

۲۱ (۴)

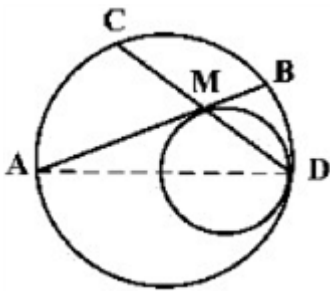
۲۰ (۳)

۱۹ (۲)

۱۸ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۶۵ در شکل زیر، دو دایره در نقطه‌ی D مماس داخل و شعاع یکی با قطر دیگری، برابر است. وتر AB از دایره‌ی بزرگ‌تر بر دایره‌ی داخل، در نقطه‌ی M، مماس است. نسبت $\frac{MC}{MB}$ ، کدام است؟



۲ (۴)

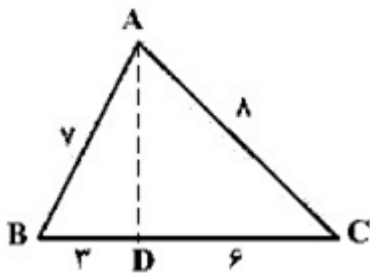
$\sqrt{3}$ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۶۶ در شکل زیر، اندازه‌ی پاره‌خط AD، کدام است؟



$2\sqrt{10}$ (۴)

$2\sqrt{7}$ (۳)

۶ (۲)

$\sqrt{37}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۶۷ یک دوزنقه‌ی متساوی الساقین با طول قاعده‌های $\frac{9}{2}$ و ۸ واحد، بر دایره‌ای محیط شده است. فاصله‌ی دورترین نقاط دایره، تا یک رأس قاعده‌ی بزرگ دوزنقه، کدام است؟

$7/5$ (۴)

۸ (۳)

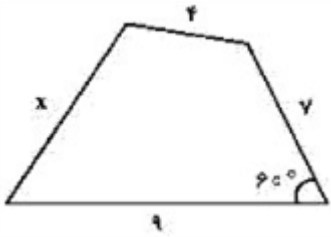
$3 + 2\sqrt{2}$ (۲)

۹ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی



۶۸ چهارضلعی زیر، قابل محاط در یک دایره است. $(x + 2)$ کدام است؟



۴ $\sqrt{59}$

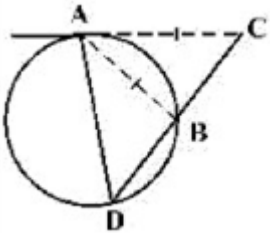
۳ $\sqrt{57}$

۲ $\sqrt{55}$

۱ $\sqrt{51}$

سراسری-ریاضی-۹۹

۶۹ در شکل زیر، اندازه‌ی قطعه مماس AC، برابر وتر AB است. الزاماً کدام برابری درست است؟



۴ $DA = DC$

۳ $BC = BD$

۲ $BD = AC$

۱ $BC = BA$

سراسری-ریاضی-۹۹

۷۰ چهار نقطه‌ی $A(1, 10)$ ، $B(9, -9)$ ، $M(a, 4)$ و $N(a, 0)$ را در صفحه‌ی مختصات، در نظر بگیرید. کمترین اندازه‌ی خط شکسته‌ی AMNB، کدام است؟

۴ ۱۸

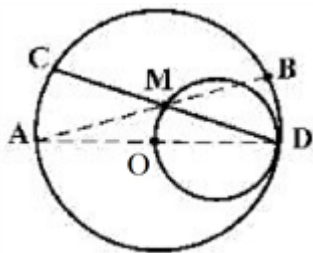
۳ ۱۹

۲ ۲۰

۱ ۲۱

سراسری-ریاضی-۹۹

۷۱ در شکل زیر، دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۴ واحد، مماس داخل و طول کمان AC برابر $\frac{4\pi}{3}$ است. حاصل $MA \times MB$ ، کدام است؟



۴ ۱۲

۳ ۶

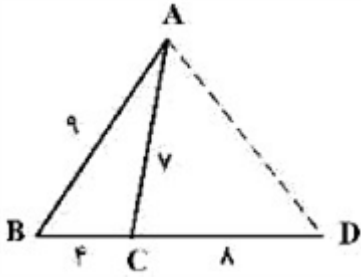
۲ ۹

۱ ۸

سراسری-ریاضی-۹۹



۷۲ در شکل روبه‌رو، اندازه‌ی پاره‌خط AD، کدام است؟



۴ $6\sqrt{3}$

۳ ۱۰

۲ $3\sqrt{10}$

۱ ۹

سراسری-ریاضی-۹۹

۷۳ پاره‌خط AB به اندازه‌ی ۸ واحد در صفحه‌ی مختصات، مفروض است. چهار دایره با مراکز A و B و شعاع‌های ۳ و ۷ واحد رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی دایره‌های کوچک با دایره‌های بزرگ، دقیقاً رأس‌های کدام چهارضلعی هستند؟

۲ متوازی‌الاضلاع

۱ لوزی

۴ ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین

۳ مستطیل

سراسری-ریاضی-۹۹

۷۴ یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین با قاعده‌هایی به اندازه‌ی ۹ و ۱۶ واحد، بر دایره‌ای محیط شده است. فاصله‌ی نزدیک‌ترین نقاط دایره، تا یک رأس قاعده‌ی کوچک ذوزنقه، کدام است؟

۴ $\frac{5}{2}$

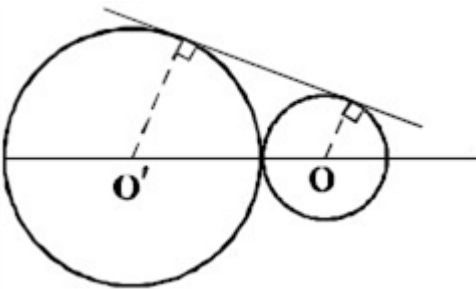
۳ ۲

۲ $\sqrt{3}$

۱ $\frac{3}{2}$

سراسری-ریاضی-۹۹

۷۵ دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ واحد مماس برهم‌اند. دایره به قطر OO' با مماس مشترک خارجی در نقطه‌ی M مشترک‌اند. فاصله‌ی M از نقطه‌ی تماس دو دایره، کدام است؟



۴ $7/5$

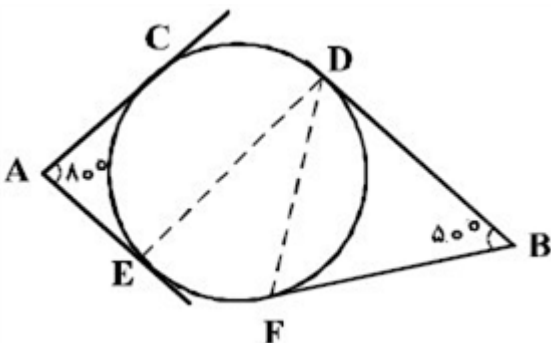
۳ ۷

۲ $6/5$

۱ ۶

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۶ در شکل زیر، اضلاع زاویه‌های A و B بر دایره مماس‌اند، اگر وتر CD برابر شعاع دایره باشد. زاویه‌ی $\widehat{EDF}$ چند درجه است؟



۴ ۴۰

۳ ۳۵

۲ ۳۰

۱ ۲۵



۷۷ در یک دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، از برخورد نیم‌سازهای داخلی آن، دقیقاً کدام چهارضلعی، حاصل می‌شود؟

- ۱ محاطی و محیطی ۲ فقط محاطی ۳ فقط محیطی ۴ نه محاطی و نه محیطی

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۷۸ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ، زاویه‌ی $A = 90^\circ$ و اندازه‌ی اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است. ارتفاع AH و نیم‌ساز AD رسم شده است. اندازه‌ی DH ، کدام است؟

- ۱ $\frac{8}{25}$ ۲ $\frac{9}{25}$ ۳ $\frac{12}{25}$ ۴ $\frac{16}{25}$

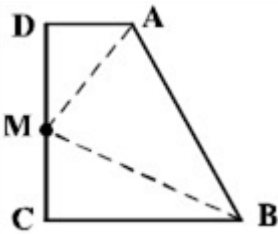
کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۷۹ در مثلث ABC داریم $AB = AC = 17$ و $BC = 16$ ، دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲۵ واحد، خطی را که از رأس A موازی BC رسم شود، در نقطه‌ی D قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی C از خط BD ، کدام است؟

- ۱ $7/2$ ۲ $8/4$ ۳ $9/6$ ۴ $10/2$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

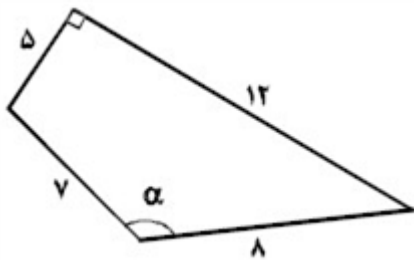
۸۰ در دوزنقه قائم‌الزاویه‌ی $ABCD$ ، اندازه‌های $AD = 2$ و $CB = CD = 6$ هستند، نقطه‌ی M روی ساق قائم CD متحرک است. کم‌ترین مقدار $MA + MB$ ، کدام است؟



- ۱ ۱۰ ۲ $10/5$ ۳ ۱۱ ۴ $11/5$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۸۱ در چهارضلعی روبه‌رو، دو ضلع عمود برهم‌اند، $\sin \alpha$ کدام است؟



- ۱ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۲ $\frac{3}{5}$ ۳ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴ $\frac{4}{5}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۸۲ در رسم بزرگ‌ترین مربع ممکن داخل مثلث ABC ، به طوری‌که یک ضلع مربع منطبق بر ضلع BC باشد. از کدام تبدیل هندسی، استفاده می‌شود؟

- ۱ انتقال ۲ تجانس ۳ بازتاب ۴ دوران

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۸۳ در مثلث ABC با اضلاع $AB = 5$ و $AC = 7$ و $BC = 8$ واحد، نیم‌ساز داخلی زاویه‌ی A ، نیم‌سازهای داخلی زاویه‌ی B را در O و O' قطع می‌کند. اندازه‌ی تصویر قائم OO' بر روی BC ، کدام است؟

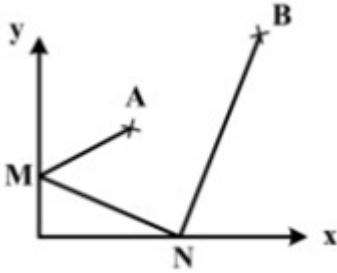
- ۱ ۱ ۲ $1/5$ ۳ ۲ ۴ $2/5$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی



۸۴) نقاط $A \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 9 \\ 11 \end{vmatrix}$ در صفحه‌ی محورهای مختصات مفروض‌اند، دو نقطه‌ی M و N همواره روی دو محور می‌لغزند.

کم‌ترین اندازه خط شکسته $AMNB$ ، کدام است؟



۲۱ (۴)

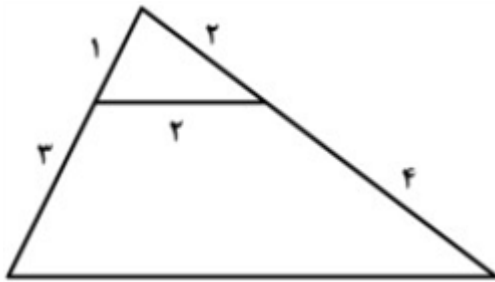
۲۰ (۳)

۱۹ (۲)

۱۸ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۸

۸۵) در شکل روبه‌رو، اندازه‌ی ضلع بزرگ‌تر چهارضلعی کدام است؟



$5\sqrt{2}$ (۴)

$4\sqrt{3}$ (۳)

$2\sqrt{11}$ (۲)

$2\sqrt{10}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۸

۸۶) نقطه‌ی A در صفحه دو خط متقاطع d و d' است. در رسم مثلث متساوی الاضلاع به رأس A ، که دو رأس دیگر آن بر روی هریک از دو خط مفروض باشد، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

دوران (۴)

تجانس (۳)

بازتاب (۲)

انتقال (۱)

سراسری-ریاضی-۹۸

۸۷) اگر مساحت شش‌ضلعی منتظم محاط در یک دایره $6\sqrt{3}$ باشد. آن‌گاه مساحت شش‌ضلعی منتظم محیط بر این دایره، چند برابر $\sqrt{3}$ است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

$7/5$ (۲)

$7/2$ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۸

۸۸) یک دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین، با کدام شرط قابل محیط بر دایره است؟

۱) دو قطر عمود برهم

۲) یکی از قاعده‌های دوزنقه، برابر یکی از ساق‌ها

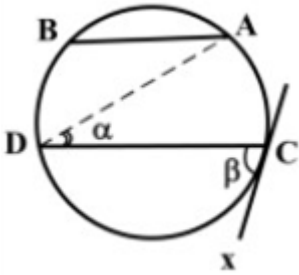
۳) خط واصل وسط دو ساق، گذرا از محل تلاقی قطرهای

۴) طول پاره‌خط واصل وسط دو ساق، برابر اندازه‌ی یکی از ساق‌ها

سراسری-ریاضی-۹۸



۸۹ در شکل زیر، وتر AB برابر شعاع دایره و $AB \parallel CD$ ، زاویه‌ی $\beta = 2\alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان $\widehat{BD}$ چند درجه است؟



۷۵ (۴)

۷۰ (۳)

۶۰ (۲)

۵۰ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۸

۹۰ در مثلث ABC نقطه‌ی M وسط BC است. نیم‌سازهای دو زاویه‌ی AMB و AMC دو ضلع مثلث را در P و Q قطع می‌کنند. نقطه‌ی O محل تلاقی AM و PQ است. OM برابر کدام است؟

OP (۴)

OA (۳)

AQ (۲)

$\frac{1}{4}BC$ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۸

۹۱ معادله‌ی تصویر خط $2y + x = 6$ ، تحت تجانس به مرکز $O'(2, 1)$ و نسبت تجانس $\frac{3}{2}$ ، کدام است؟

$3y + x = 9$ (۴)

$2y + x = 9$ (۳)

$2y + x = 7$ (۲)

$y + 2x = 2$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۲ در مثلث متساوی‌الساقین ABC، خط گذرا بر رأس A قاعده‌ی BC و دایره محیطی مثلث را در D و E قطع می‌کند. اندازه‌ی AD، AE برابر کدام است؟

BC^2 (۴)

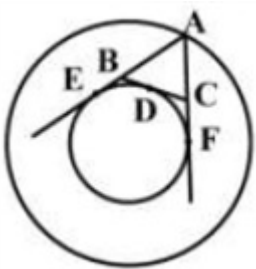
AC^2 (۳)

$CD \cdot CD$ (۲)

$BD \cdot BC$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۳ در دو دایره هم‌مرکز، از نقطه‌ی A روی دایره بزرگ دو مماس AE و AF و از نقطه‌ی D روی کمان کوچک‌تر EF مماس دیگری بر دایره‌ی داخلی رسم شده است. با تغییر مکان A و D کدام بیان در مثلث ABC درست است؟



محیط متغیر - مساحت ثابت (۲)

محیط ثابت - مساحت متغیر (۱)

محیط متغیر - مساحت متغیر (۴)

محیط ثابت - مساحت ثابت (۳)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۴ در مثلثی به طول اضلاع ۱۵ و ۱۳ و ۷ واحد، نقطه‌ی تلاقی نیم‌سازهای درونی، نیم‌ساز بزرگ‌ترین زاویه‌ی مثلث را به کدام نسبت تقسیم می‌کند؟

$\frac{5}{6}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{3}{5}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی



۹۵ در مثلث ABC ($AB = AC$)، دایره‌ای در B و C بر ساق‌ها مماس است. اگر $BC = ۶$ و ارتفاع $AH = ۴$ باشد شعاع این دایره، کدام است؟

۴/۵ (۴)

۳/۷۵ (۳)

۳/۵ (۲)

۳/۲۵ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۹۶ چهارضلعی $ABCD$ محیط بر یک دایره است. اگر AB کوچک‌ترین ضلع آن باشد، کدام نابرابری، همواره درست است؟

$\widehat{D} < \widehat{B}$ (۴)

$\widehat{D} < \widehat{C}$ (۳)

$\widehat{B} < \widehat{A}$ (۲)

$\widehat{C} > \widehat{A}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۹۷ مربع $ABCD$ به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایره‌ی گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟

۳ (۴)

$۲\sqrt{۲}$ (۳)

۲/۵ (۲)

۲/۲۵ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۹۸ نقطه‌ی A و دو دایره در یک صفحه مفروض‌اند. برای رسم مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به رأس A که دو سر قاعده بر روی هریک از این دایره‌ها باشد، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

دوران (۴)

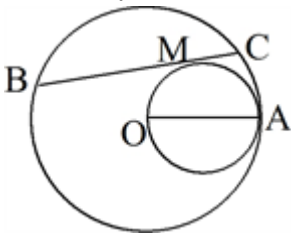
تجانس (۳)

انتقال (۲)

بازتاب (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۹۹ در دایره‌ای به شعاع OA وتر BC مماس بر دایره‌ای به قطر OA رسم شده است. مقدار $MB \times MC$ ، برابر کدام است؟



$MA \cdot MO$ (۴)

OA^2 (۳)

MA^2 (۲)

MO^2 (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۰۰ دو دایره متقاطع در نقطه‌ی A مشترک‌اند. خط گذرا بر A دو دایره‌ی مفروض را در B و C قطع می‌کند. مماس‌ها بر هر دایره در B و C در نقطه‌ی M متقاطع‌اند. در مثلث MBC با چرخش خط قاطع، کدام جزء ثابت می‌ماند؟

زاویه‌ی $\widehat{BMC}$ (۴)

مساحت (۳)

محیط (۲)

MA (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۰۱ در مثلث ABC داریم $AB = ۳AC$ و $BC = ۱۲$ ، نقاط D و D' پای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه‌ی A است. مقدار $AD^2 + AD'^2$ ، کدام است؟

۱۰۰ (۴)

۸۱ (۳)

۷۲ (۲)

۶۴ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۰۲ مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\frac{1}{۸}$ مجذور وتر آن است. کوچک‌ترین زاویه این مثلث، چند درجه است؟

۳۰ (۴)

۲۲/۵ (۳)

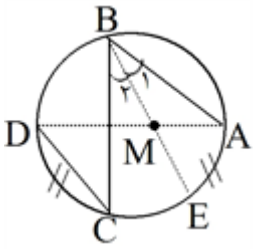
۱۷/۵ (۲)

۱۵ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی



۱۰۳ در شکل مقابل $AB = 6$, $BC = 8$, $CD = 3$ و $\widehat{AE} = \widehat{CD}$ ، اندازه AM کدام است؟



۲/۷۵ (۴)

۲/۵ (۳)

۲/۲۵ (۲)

۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۰۴ دو دایره به شعاع‌های $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ و به طول خط مرکزین $d = 1$ چه وضعیتی دارند؟

(۴) مماس خارج

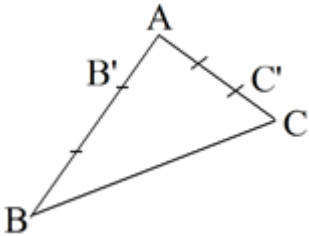
(۳) متخارج

(۲) متداخل

(۱) متقاطع

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۱۰۵ در شکل $BB' = 2AB'$ و $AC' = 2CC'$. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث $AB'C'$ است؟



(۴) $\frac{9}{2}$

(۳) $\frac{9}{4}$

(۲) ۶

(۱) ۹

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-تجربی

۱۰۶ در دو دایره به شعاع‌های R_1 و R_2 و طول خط مرکزین d ، روابط $2R_1 + 2R_2 = 4d$ و $\frac{11}{6}d = 2R_1 + R_2$ برقرار است،

چند خط وجود دارد که بر هر دو دایره مماس است؟

(۴) ۲

(۳) ۴

(۲) ۱

(۱) صفر

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۱۰۷ در دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳، طول خط مرکزین $\sqrt{5}$ است، چند خط می‌توان رسم کرد که به هر دو دایره مماس باشد؟

(۴) ۴

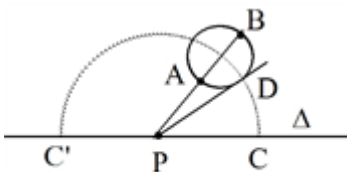
(۳) ۲

(۲) ۱

(۱) صفر

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۱۰۸ نقطه‌ی P مرکز نیم‌دایره به قطر CC' است. شعاع PD مماس بر دایره‌ی مفروض رسم شده است. دایره‌ای که بر دو نقطه‌ی A و B می‌گذرد و مماس بر خط Δ است، در کدام نقطه بر خط Δ مماس می‌شود؟



(۴) نشدنی

(۲) بین دو نقطه‌ی C و C' خارج پاره‌خط $C'C$

(۱) C یا C'

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی



۱۰۹ در مستطیلی به ابعاد ۳ و ۴ واحد، نیمسازهای داخلی دو زاویه‌ی متقابل، قطر دیگر مستطیل را در M و N قطع می‌کند، اندازه‌ی MN چه قدر است؟

$\frac{5}{3}$ (۴)

$\frac{5}{6}$ (۳)

$\frac{5}{7}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۱۰ دایره‌ی محاطی داخلی یک مثلث به طول اضلاع ۱۳ و ۹ و ۸، در نقطه‌ی تماس، کوچک‌ترین ضلع را به ۲ قطعه تقسیم می‌کند. نسبت آن دو قطعه کدام است؟



$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{3}{7}$ (۳)

$\frac{2}{5}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۱۱ در مثلثی به اضلاع ۱۲ و ۸ و ۷، نیمساز داخلی زاویه‌ی بزرگتر، ضلع مقابل را در D قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی D از وسط ضلع بزرگتر چه قدر است؟

$\frac{1}{6}$ (۴)

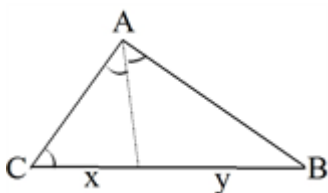
$\frac{1}{5}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۱۲ در مثلث ABC داریم: $AB = 9$, $AC = 7$ و $\widehat{A} = 2\widehat{C}$ ، اندازه‌ی BC کدام است؟



۱۴ (۴)

۱۳ (۳)

$\frac{12}{5}$ (۲)

۱۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۱۳ در یک مستطیل به طول ۱۳ و عرض ۶ واحد، دایره‌ای به قطر طول مستطیل، ضلع مقابل آن را در دو نقطه‌ی M و N قطع می‌کند، فاصله‌ی این دو نقطه چند واحد است؟

$2\sqrt{2}$ (۴)

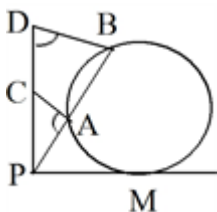
۵ (۳)

$2\sqrt{6}$ (۲)

۴ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۱۴ در شکل مقابل $\widehat{PAC} = \widehat{PDB}$ ، $PC = 9$ و $CD = 7$ ، اندازه‌ی مماس PM چه قدر است؟



۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

$6\sqrt{2}$ (۲)

۸ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی



۱۱۵ اضلاع مثلثی با اعداد ۲ و ۳ و ۴ متناسب است. نیمساز زاویه‌ی داخلی متوسط آن را رسم می‌کنیم. مساحت کوچک‌ترین مثلث حاصل، چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟

۴ $\frac{2}{5}$

۳ $\frac{1}{3}$

۲ $\frac{1}{4}$

۱ $\frac{2}{9}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱۶ زاویه‌ی بین خط مرکزین و مماس خارج دو دایره به شعاع‌های $\frac{7}{5}$ و ۳۰ سانتی‌متر، ۳۰ درجه است. طول خط مرکزین دو دایره چند سانتی‌متر است؟

۴ ۵۰

۳ $\frac{47}{5}$

۲ ۴۵

۱ $\frac{42}{5}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱۷ در دایره‌ای به قطر ۱۲ واحد فاصله‌ی مرکز دایره از وتر AB برابر ۲ واحد است، نقطه‌ی C در امتداد AB به فاصله‌ی $CB = 2\sqrt{2}$ انتخاب شده است. طول قطعه‌ی مماسی که از C بر دایره رسم شود، کدام است؟

۴ $5\sqrt{2}$

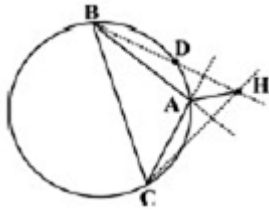
۳ ۷

۲ $3\sqrt{5}$

۱ $2\sqrt{20}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱۸ در شکل روبه‌رو نقطه‌ی H محل تلاقی ارتفاعات مثلث ABC است، زاویه‌ی $\widehat{AHD}$ ، با کدام زاویه برابر است؟



۴ $\widehat{AHC}$

۳ $\widehat{ADH}$

۲ $\widehat{ABC}$

۱ $\widehat{DAE}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱۹ مساحت مثلث ABC برابر ۱۶ واحد مربع است. اگر $b = 8$ و $c = 5$ باشد، اندازه‌ی ضلع متوسط a کدام است؟

۴ $5\sqrt{2}$

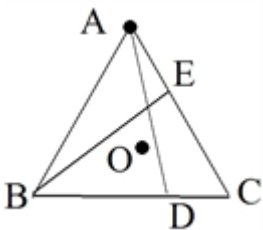
۳ $3\sqrt{5}$

۲ $\sqrt{41}$

۱ $\sqrt{39}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۲۰ نقطه‌ی O مرکز ثقل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و $BD = CE$ ، کدام بیان نادرست است؟



۴ $\widehat{AOC} = 120^\circ$

۳ $\widehat{EOD} = 120^\circ$

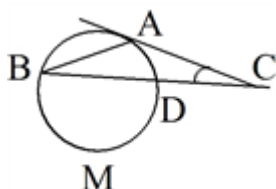
۲ $OD \perp BE$

۱ $OE = OD$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی



۱۲۱ در شکل مقابل مماس AC بر دایره‌ی با وتر AB از دایره برابند اگر کمان $\widehat{DMB}$ برابر ۲۲۲° درجه باشد زاویه‌ی C چند درجه است؟



۲۴ (۴)

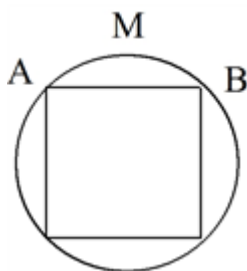
۲۳ (۳)

۲۲ (۲)

۲۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۲۲ در شکل مقابل ضلع مربع برابر ۲ واحد است. فاصله‌ی وسط کمان AB از نزدیک‌ترین رأس مربع چه قدر است؟



$\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ (۴)

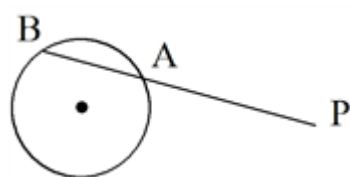
$\sqrt{2}$ (۳)

$\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$ (۲)

$\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۲۳ فاصله‌ی نقطه‌ی P تا دورترین نقاط یک دایره سه برابر شعاع دایره است. از این نقطه قاطع PAB نسبت به دایره رسم شده است. اگر کمان AB برابر ۶۰° درجه باشد، اندازه‌ی PA چند برابر شعاع دایره است؟



$(\sqrt{13} - 2)$ (۴)

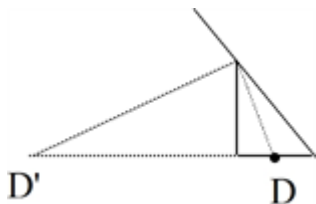
$(\sqrt{11} - 2)$ (۳)

$\frac{1}{2}(\sqrt{13} - 1)$ (۲)

$\frac{1}{2}(\sqrt{11} - 1)$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۲۴ در مثلثی به اضلاع ۸، ۶ و ۵ واحد، نیمسازهای کوچک‌ترین زاویه‌ی آن ضلع مقابل را در D و D' قطع می‌کنند. اندازه‌ی DD' چه قدر است؟



$\frac{124}{7}$ (۴)

$\frac{120}{7}$ (۳)

$\frac{102}{7}$ (۲)

$\frac{195}{14}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۲۵ دو خط متقاطع d و d' و پاره‌خط AB در صفحه آن‌ها مفروض است. برای رسم پاره‌خطی موازی و مساوی AB که دو سر آن بر روی این دو خط باشد، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

تجانس (۴)

دوران (۳)

انتقال (۲)

بازتاب (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی



۱۲۶ در مثلث ABC، داریم $\widehat{B} = 50^\circ$ و $\widehat{C} = 60^\circ$ نیمساز داخلی زاویه A و عمود منصف ضلع BC در نقطه M متقاطع‌اند. زاویه $\widehat{MBC}$ چند درجه است؟

- ۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲۷ دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۲ برهم مماس خارج‌اند. طول مماس مشترک خارجی آن‌ها چقدر است؟

- ۱) ۳ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\frac{7}{2}$

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۱۲۸ اگر AD، BE و CF سه میانه از مثلث ABC باشد، آن‌گاه مقدار $(AD^2 + BE^2 + CF^2) + (BC^2 + CA^2 + AB^2)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{4}{5}$

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۲۹ در مثلث ABC، AD نیمساز داخلی زاویه $\widehat{A}$ است. اگر $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ و $CD = AB$ باشد، آنگاه زاویه A کدام است؟

- ۱) 18° ۲) 36° ۳) 54° ۴) 72°

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۳۰ در مثلث ABC، اگر $a = 2$ ، $b = \sqrt{6}$ و $c = \sqrt{3} - 1$ باشد، زاویه $\widehat{B}$ کدام است؟

- ۱) 30° ۲) 60° ۳) 120° ۴) 45°

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۳۱ در مثلث دلخواه ABC، مقدار $2ac \sin\left(\frac{\widehat{A} - \widehat{B} + \widehat{C}}{2}\right)$ برابر کدام است؟

- ۱) $a^2 + c^2$ ۲) $a^2 + c^2 - b^2$ ۳) $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$ ۴) $\frac{a^2 + c^2}{2}$

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۳۲ در مثلث ABC، اگر $\widehat{B} = \frac{\pi}{3}$ و $\widehat{C} = \frac{\pi}{4}$ و D روی ضلع BC واقع باشد، به طوری که $\frac{\sin(\widehat{BAD})}{\sin(\widehat{CAD})} = \frac{BD}{DC} = \frac{1}{3}$ آنگاه مقدار $\frac{\sin(\widehat{BAD})}{\sin(\widehat{CAD})}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۳۳ در مثلث ABC، اگر $(a + b + c)(a - b + c) = 3ac$ باشد، آنگاه $\widehat{B}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{11}{6}$

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۳۴ در مثلث ABC، مقدار $a(b \cos \widehat{C} - c \cos \widehat{B})$ برابر کدام است؟

- ۱) $a^2 - b^2$ ۲) $b^2 - c^2$ ۳) $c^2 - a^2$ ۴) $a^2 - c^2$

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳



۱۳۵ در مثلث ABC، اگر $\hat{A} = 45^\circ$ ، $\hat{B} = 75^\circ$ باشد، آنگاه $a + c\sqrt{2}$ کدام است؟

$\frac{3}{2}b$ (۴)

$\frac{1}{2}b$ (۳)

$2b$ (۲)

b (۱)

سوالات گردآوری شده-سری (۲) سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

۱۳۶ اگر در مثلث ABC رابطه $bc = 2b^2 \cos \hat{A} + 2c^2 \cos \hat{A} - 4bc \cos^2 \hat{A}$ برقرار باشد، آنگاه نوع مثلث کدام است؟

(۲) همواره متساوی الاضلاع

(۱) قائم الزاویه

(۴) مختلف الاضلاع و قائم الزاویه

(۳) همواره متساوی الساقین

سوالات گردآوری شده-سری (۲) سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

۱۳۷ در مثلث ABC مقدار $(a-b)^2 \cos^2 \frac{\hat{C}}{2} + (a+b)^2 \sin^2 \frac{\hat{C}}{2}$ برابر کدام است؟

c^2 (۴)

abc (۳)

$abc(a+b+c)$ (۲)

$a^2 + b^2 + c^2$ (۱)

سوالات گردآوری شده-سری (۲) سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

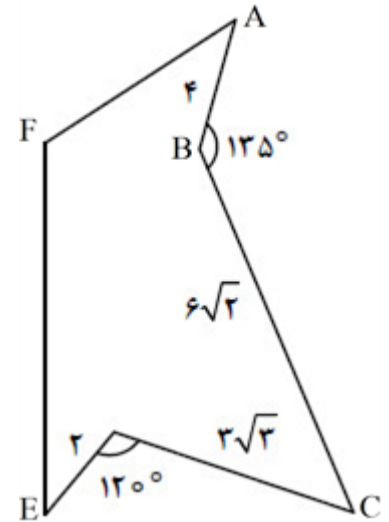


گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر مسئله هم‌پایرامونی میزان افزایش مساحت برابر $2S_{ABC} + 2S_{DEC}$ است.

$$2S_{ABC} = 2 \left(\frac{1}{2} AB \times BC \sin 135^\circ \right) = 4 \times 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 24$$

$$2S_{DEC} = 2 \left(\frac{1}{2} DE \times DC \sin 120^\circ \right) = 2 \times 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9$$

بنابراین میزان افزایش مساحت برابر $24 + 9 = 33$ است.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر مسئله کتاب درسی هندسه یازدهم فصل ۳ پاره‌خط PQ موازی BC است. پس:

$$\triangle ABC : PQ \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AP}{AC} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{PQ}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{PQ}{BC} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیه نیمساز می‌نویسیم:

$$\triangle AMC : MP \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow MC = 3AM$$

$$\triangle AMC : MP \text{ نیمساز} \Rightarrow MP^2 = AM \times MC - AP \times PC$$

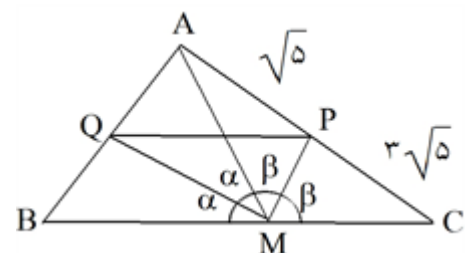
$$\Rightarrow \sqrt{33}^2 = AM \times 3AM - (\sqrt{5})(3\sqrt{5}) \Rightarrow 33 = 3AM^2 - 15 \Rightarrow 11 = AM^2 - 5$$

$$\Rightarrow AM^2 = 16 \Rightarrow AM = 4 \Rightarrow MC = 12 \Rightarrow BC = 24 \xrightarrow{(1)} \frac{PQ}{24} = \frac{1}{4} \Rightarrow PQ = 6$$

در ضمن MP و MQ نیمساز زاویه‌های AMC و AMB هستند پس: $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ پس: $\alpha + \beta = 90^\circ$.

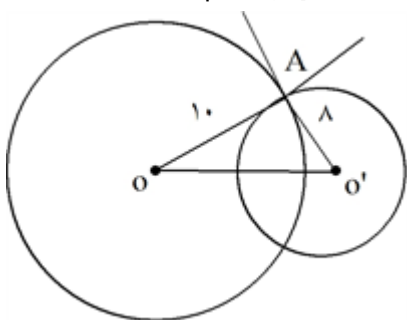
در نتیجه مثلث MPQ قائم‌الزاویه است. بنابراین:

$$PQ^2 = MP^2 + MQ^2 \Rightarrow 6^2 = \sqrt{33}^2 + MQ^2 \Rightarrow MQ^2 = 36 - 33 = 3 \Rightarrow MQ = \sqrt{3}$$



۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مماس‌های رسم شده در نقطه تلاقی دو دایره به مراکز O و O' یعنی A بر هم عمودند. پس این مماس‌ها از مراکز دو دایره عبور می‌کنند. در نتیجه در مثلث AOA' که قائم‌الزاویه است. می‌نویسیم:



$$AOA' : OO' = OA' + O'A = 8 + 15 = 23 \Rightarrow OO' = 17$$

(توجه کنید خط مماس بر دایره در نقطه تماس بر شعاع دایره عمود است به همین علت هر کدام از این مماس‌ها از مرکز دایره دیگر عبور می‌کند.)

۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در صورتی که بازتاب A نسبت به خط d نقطه A' باشد و از A' به B وصل کنیم تا خط d را در نقطه C قطع کند آنگاه بنابر مسئله هرون محیط مثلث ABC مینیمم است. پس $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ و $\widehat{C}_2 = \widehat{C}_3$ پس $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_3$ بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویه BCH و $A'CH$ متشابه می‌شوند.

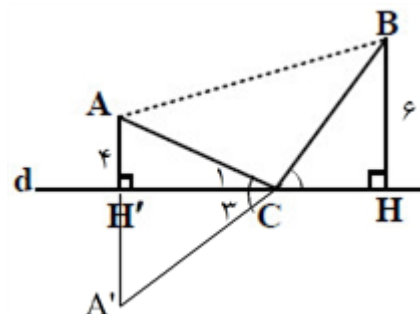
$$\triangle BCH \sim \triangle A'CH \Rightarrow \frac{CH}{CH'} = \frac{BH}{AH'} \Rightarrow \frac{CH}{CH'} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{CH}{HH'} = \frac{3}{5} \quad (1)$$

از طرف دیگر:

$$S_{ABHH'} = 50\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2}HH'(BH + AH') = 50\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2}HH'(10) = 50\sqrt{3} \Rightarrow HH' = 10\sqrt{3} \quad (2)$$

$$(2), (1) \Rightarrow \frac{CH}{10\sqrt{3}} = \frac{3}{5} \Rightarrow CH = 6\sqrt{3}$$



۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از فرض $\widehat{ADB} = \widehat{BAD}$ نتیجه می‌گیریم مثلث ADB متساوی‌الساقین است پس $AB = BD$.

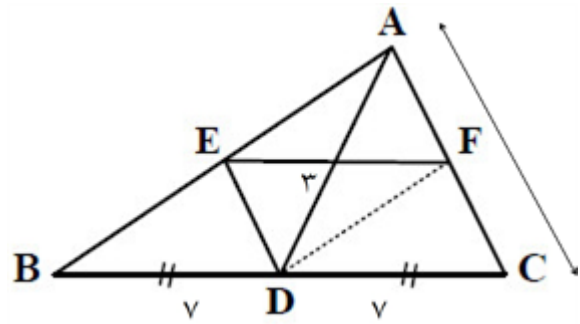
اکنون با استفاده از قضیه سینوس‌ها می‌نویسیم.

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC : \frac{BC}{\sin x} = \frac{AB}{\sin 45^\circ} \\ \triangle BDC : \frac{BC}{\sin y} = \frac{BD}{\sin 120^\circ} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تقسیم می‌کنیم}} \frac{\frac{BC}{\sin y}}{\frac{BC}{\sin x}} = \frac{\frac{BD}{\sin 120^\circ}}{\frac{AB}{\sin 45^\circ}} \xrightarrow{AB=BD} \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 120^\circ} \quad (1)$$

از طرف دیگر $\sin y = \cos x$ پس $x + y = 90$ داریم:

$$(1) \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \tan x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه نیمساز می‌نویسیم:



$$\triangle ABD : DE \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DB} = \frac{3}{5} \quad (1)$$

اکنون از قضیه تالس استفاده می‌کنیم.

$$\triangle ABC : EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB} \xrightarrow{\text{از (1)}} \frac{AF}{FC} = \frac{3}{5} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AF}{AC} = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{AF}{8} = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow AF = \frac{12}{5} \Rightarrow FC = 8 - \frac{12}{5} = \frac{28}{5}$$

$$\triangle ADC : DF \text{ نیمساز} \Rightarrow DF^2 = AD \times DC - AF \times FC \Rightarrow DF^2 = 3 \times 5 - \left(\frac{12}{5}\right) \left(\frac{28}{5}\right)$$

بنابراین:

$$= 15 - 21 \times \frac{16}{25} = 15 \left(1 - \frac{16}{25}\right) = 15 \times \frac{9}{25} \Rightarrow DF = \frac{3}{5} \sqrt{21} = 0.6 \sqrt{21}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. محیط مثلث $\sqrt{48}\pi$ یعنی $4\sqrt{3}\pi$ است. اگر شعاع دایره محاطی باشد

$$r = \frac{S}{P}$$

داریم:

از طرف دیگر مساحت مثلث برابر ۳ به اضافه مساحت دایره است. بنابراین:

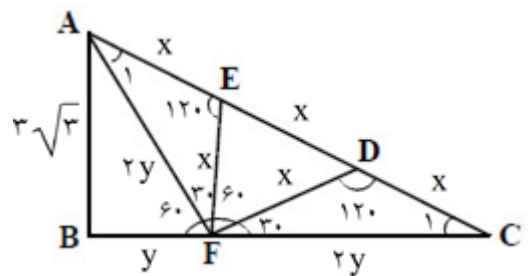
$$r = \frac{3 + \pi r^2}{2\sqrt{3}\pi} \Rightarrow 2\sqrt{3}\pi r = 3 + \pi r^2 \Rightarrow \pi r^2 - 2\sqrt{3}\pi r + 3 = 0 \Rightarrow (\sqrt{\pi}r - \sqrt{3})^2 = 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}$$

$$\text{مساحت مثلث} = 3 + \pi r^2 = 3 + \pi \left(\frac{3}{\pi}\right) = 6$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در نظر می‌گیریم $AE = ED = DC = x$ چون مثلث EFD متساوی‌الاضلاع است پس:

$\widehat{C}_1 = \widehat{A}_1 = 30^\circ$ هستند پس $\widehat{AEF} = \widehat{DFC} = 120^\circ$ در نتیجه هر دو مثلث AEF و DFC متساوی‌الساقین با زاویه رأس 120° هستند پس $AF = FC$



از طرف دیگر با استفاده از فرض $\frac{AF}{BC} = \frac{2}{3}$ در نظر می‌گیریم $AF = 2y$ و $BC = 3y$ پس $FC = 2y$ پس $BF = y$. اکنون با

استفاده از قضیه کسینوس‌ها می‌نویسیم: (با توجه به شکل مشخص است که: $\widehat{AFB} = 60^\circ$)

$$\triangle ABF : AB^2 = AF^2 + BF^2 - 2AF \times BF \cos 60^\circ \Rightarrow (3\sqrt{3})^2 = (2y)^2 + y^2 - 2(2y)(y) \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 27 = 4y^2 + y^2 - 2y^2 \Rightarrow 27 = 3y^2 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = 3$$

$$FC = 2y = 6$$

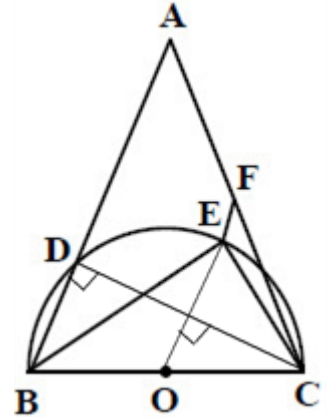
بنابراین:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از C به D وصل می‌کنیم. زاویه D محاطی روبه‌رو به قطر است پس $\widehat{D} = 90^\circ$. از طرف دیگر از مرکز O به نقطه E وسط کمان DC وصل می‌کنیم در این صورت OE بر وتر DC عمود خواهد شد. بنابراین دو خط OE و AB هر دو بر DC عمودند. بنابراین $OE \parallel AB$.

در ضمن نقاط O و F وسط دو ضلع مثلث ABC هستند. پس بنابر عکس قضیه تالس $OF \parallel AB$. در نتیجه نقاط O، E و F روی یک خط موازی با AB قرار دارد، داریم. پس:

$$R = OE = \frac{4}{5} \Rightarrow OF = OE + EF = \frac{4}{5} + 2 = \frac{6}{5}$$

$$\triangle ABC : OF \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CF}{AC} = \frac{OF}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6/5}{AB} \Rightarrow AB = 12$$



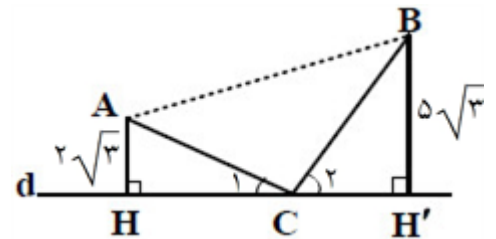
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر مسئله هرون دو زاویه $\widehat{C}_1$ و $\widehat{C}_2$ مساویند پس مثلث‌های قائم‌الزاویه $\triangle ACH$ و $\triangle BCH'$ متشابهند. اکنون بنابر فرض سؤال می‌نویسیم.

$$S_{ACH} = \frac{1}{2} \sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2} (2\sqrt{3}) CH = \frac{1}{2} \sqrt{3} \Rightarrow CH = 1$$

از طرف دیگر:

$$\triangle ACH \sim \triangle BCH' \Rightarrow \frac{CH}{CH'} = \frac{AH}{BH'} \Rightarrow \frac{1}{CH'} = \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} \Rightarrow CH' = 5$$

$$HH' = CH + CH' = 1 + 5 = 6 \quad \text{پس:}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در چهارضلعی ABCD مجموع زوایای داخلی برابر 360° است پس:

$$\widehat{A} + \widehat{ABC} + \widehat{C} + \widehat{ADC} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{A} + 105^\circ + \alpha + 165^\circ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{A} + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \sin \widehat{A} = \cos \alpha \quad (1)$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیه سینوس‌ها می‌نویسیم:

$$\triangle ABD : \frac{AD}{\sin 30^\circ} = \frac{BD}{\sin \widehat{A}} \xrightarrow{(1)} \frac{AD}{\frac{1}{2}} = \frac{BD}{\cos \alpha} \quad (2)$$

$$\triangle BDC : \frac{BC}{\sin 135^\circ} = \frac{BD}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{BD}{\sin \alpha} \quad (3)$$

اکنون از تقسیم روابط (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\sqrt{2} AD}{BC} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \xrightarrow{\frac{AD}{BC} = \frac{2}{\sqrt{2}}} \frac{2\sqrt{2}}{3} = \tan \alpha$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه نیمساز می‌نویسیم.

$$\triangle ABD : DE \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BD} = \frac{3}{5}$$

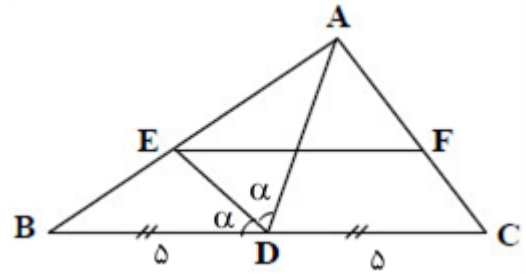
$$\triangle ABC : EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{FC} = \frac{3}{5}$$

پس $\frac{AF}{FC} = \frac{AD}{DC}$ در نتیجه در مثلث ADC پاره خط DF نیمساز زاویه ADC است.

$$\frac{AF}{FC} = \frac{3}{5} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AF}{AC} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{AF}{v} = \frac{3}{8} \Rightarrow AF = \frac{3v}{8} \Rightarrow FC = v - \frac{3v}{8} = \frac{5v}{8}$$

$$\triangle ADC : DF \text{ نیمساز} \Rightarrow DF^2 = AD \times DC - AF \times FC = 3 \times 5 - \frac{3v}{8} \times \frac{5v}{8} = 15 \left(1 - \frac{15}{64}\right)$$

$$\Rightarrow 15 \times \frac{49}{64} \Rightarrow DF = \frac{15}{8}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم ۲ شعاع دایره محاطی باشد.

$$2P = \sqrt{80\pi} \Rightarrow 2P = 4\sqrt{5\pi} \Rightarrow P = 2\sqrt{5\pi}$$

در ضمن مساحت قسمت سایه زده مساوی مساحت چهارضلعی منهای مساحت دایره است. پس:

$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow r = \frac{5 - \pi r^2}{2\sqrt{5\pi}} \Rightarrow 2\sqrt{5\pi}r = 5 - \pi r^2 \Rightarrow \pi r^2 + 2\sqrt{5\pi}r - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{\pi}r - \sqrt{5})^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}$$

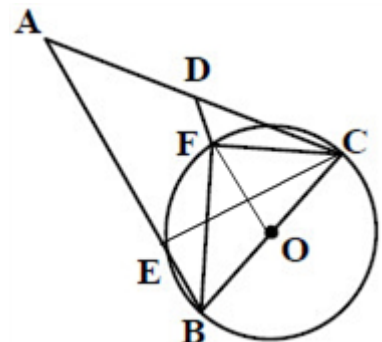
$$\text{محیط دایره} = 2\pi r = 2\pi \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}\right) = 2\sqrt{5\pi} \quad \text{بنابراین:}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از O به F وصل می‌کنیم چون F وسط کمان EC قرار دارد پس OF بر وتر CE عمود می‌شود. از طرف دیگر زاویه $\widehat{E} = 90^\circ$ است پس $\widehat{E}$ محاطی روبه‌رو به قطر BC است پس $\widehat{E} = 90^\circ$. بنابراین OF و AB هر دو بر CE عمودند پس $OF \parallel AB$.

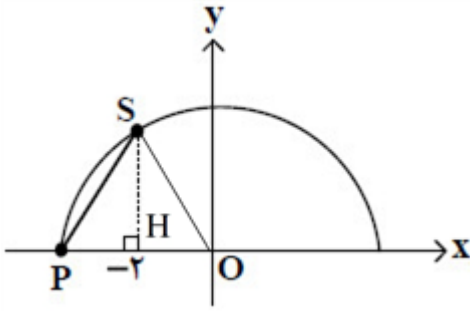
در ضمن در مثلث ABC نقاط O و D وسط اضلاع BC و AC هستند پس بنابر عکس قضیه تالس $OD \parallel AB$. بنابراین نقاط O و F و D روی یک خط موازی AB هستند. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} OF = R = \frac{v}{2} \\ DF = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} OD = \frac{v}{2} + 1 = \frac{9}{2}$$

$$\triangle ABC : OD \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OD}{AB} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \frac{\frac{9}{2}}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 9$$



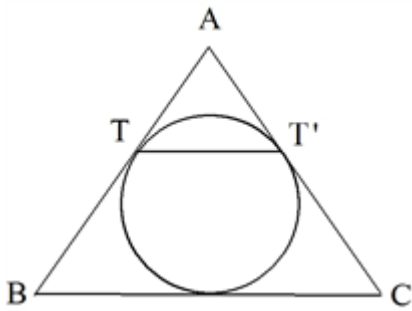
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از مرکز O به نقطه S وصل می‌کنیم در این صورت $PS = OS = OP = R$ یعنی مثلث OPS متساوی الاضلاع است. پس ارتفاع SH میانه هم هست. در نتیجه $R = OP = ۴$ بنابراین:



$$SH = \frac{\sqrt{3}}{2} OP = \frac{\sqrt{3}}{2} (۴) = ۲\sqrt{3}$$

پس عرض نقطه S برابر $۲\sqrt{3}$ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا به کمک قضیه کسینوس‌های $\cos \hat{A}$ را به دست می‌آوریم:



$$\begin{aligned} \triangle ABC : BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \hat{A} \\ \Rightarrow ۷^2 &= ۴^2 + ۵^2 - 2(۴)(۵) \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$AT = AT' = P - a = \frac{۴ + ۵ + ۷}{2} - ۷ = ۱$$

از طرف دیگر داریم:

بنابراین:

$$\begin{aligned} \triangle ATT' : TT'^2 &= AT^2 + AT'^2 - 2AT \times AT' \cos \hat{A} \Rightarrow TT'^2 = 1 + 1 - 2(1)(1) \left(-\frac{1}{5}\right) \\ &= 2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5} \Rightarrow TT' = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \Rightarrow TT' = \frac{2\sqrt{15}}{5} = \frac{4\sqrt{15}}{10} = \frac{2}{5}\sqrt{15} \end{aligned}$$



17

$$OA^{\Delta}H : \cos \widehat{O} = \frac{OH}{OA} = \frac{\frac{14}{5}}{10} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$$

در نتیجه:

اکنون با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها می‌نویسیم.

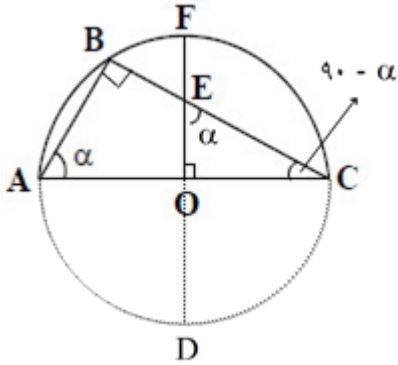
بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای AA' برابر ۲۸ است.

11

بنابراین:



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل نیم‌دایره را کامل می‌کنیم. در این صورت زاویه $\widehat{B} = 90^\circ$.
در ضمن OF را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه D قطع کند. با استفاده از رابطه طولی در دایره می‌نویسیم.



$$BE \times EC = EF \times ED \Rightarrow \frac{BE}{EF} = \frac{ED}{EC} \Rightarrow \frac{BE}{EF} = \frac{OE+OD}{EC}$$

$$\xrightarrow{OD=OC} \frac{BE}{EF} = \frac{OE+OC}{EC} \Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{OE}{EC} + \frac{OC}{EC} \quad (1)$$

$$\triangle OEC : \frac{OE}{EC} = \sin(90 - \alpha) = \cos \alpha$$

اکنون با توجه به شکل داریم.

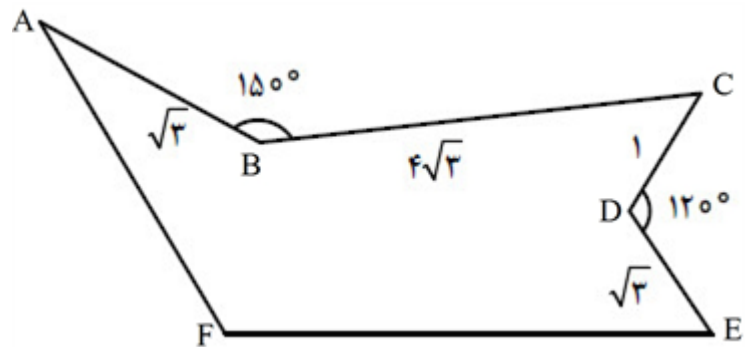
$$\triangle OEC : \frac{OC}{EC} = \sin \alpha$$

پس:

$$(1) \Rightarrow \frac{BE}{EC} = \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} + \sin \alpha \xrightarrow{\sin \alpha = \frac{r}{R} = \frac{1}{5}}$$

$$\frac{BE}{EC} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = \frac{12}{15} = 4/3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر مسئله هم پیرامونی میزان افزایش مساحت برابر $2S_{DEC} + 2S_{ABC}$ است.



بنابراین میزان افزایش مساحت برابر $16 + \frac{2}{5} = 7/5$ است.

$$2S_{ABC} = 2 \left(\frac{1}{2} AB \times BC \sin 150^\circ \right)$$

$$= \sqrt{2} \times 4\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 8$$

$$2S_{DEC} = 2 \left(\frac{1}{2} DC \times DE \sin 120^\circ \right)$$

$$= 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنابر مسئله کتاب درسی، EF موازی BC است. پس:

$$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AB} \Rightarrow \frac{EF}{10} = \frac{12\sqrt{2}}{15\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow EF = 8$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیه نیمساز در مثلث ABD می‌نویسیم:

$$\text{DF نیمساز DF: } \frac{AF}{BF} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{12\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{AD}{5} \Rightarrow AD = 20$$

$$\text{DF نیمساز DF} \Rightarrow DF^2 = AD \times BD - AF \times BF \Rightarrow DF^2 = 20 \times 5 - 12\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 100 - 72$$

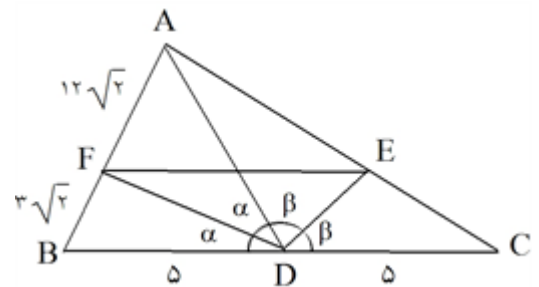
$$\Rightarrow DF^2 = 28 \Rightarrow DF = \sqrt{28}$$

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

در ضمن DE و DF نیمساز زاویه‌های $\triangle ADC$ و $\triangle ADB$ هستند پس:

در نتیجه: $\alpha + \beta = 90^\circ$ پس مثلث DEF قائم‌الزاویه است.

$$\triangle DEF: DE^2 = EF^2 - DF^2 = 8^2 - 28 = 64 - 28 = 36 \Rightarrow DE = 6$$

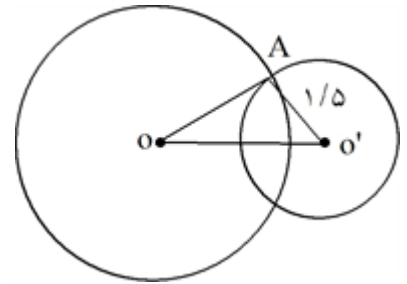


گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مماس‌های رسم شده در نقطه تلاقی دو دایره به مرکز O و O' یعنی A بر هم عمودند پس

این مماس‌ها از مراکز دو دایره عبور می‌کنند. در نتیجه در مثلث OAO' که قائم‌الزاویه است می‌نویسیم:

$$\triangle OAO': OA^2 = OO'^2 - O'A^2$$

$$\Rightarrow OA = \sqrt{25 - 1} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بازتاب جهت شکل را حفظ نمی‌کند.

تذکر: سؤال موجود در دفترچه سازمان سنجش غلط بود و صورت سؤال به شکل صحیح ویرایش شد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به داده‌های روی شکل و استفاده از قضیهٔ روابط طولی در دایره می‌نویسیم:

$$\left. \begin{aligned} 6 \times 10 &= y(v+x) \Rightarrow 60 = vy + xy \\ 5 \times 12 &= x(v+y) \Rightarrow 60 = vx + xy \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = y$$

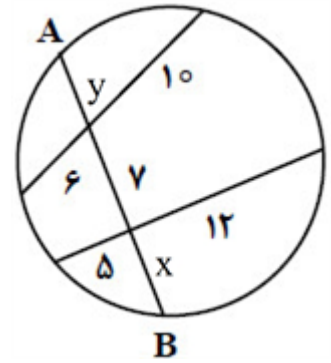
بنابراین:

$$6 \times 10 = y(v+x) \xrightarrow{y=x} 60 = x(v+x) \Rightarrow x^2 + vx - 60 = 0$$

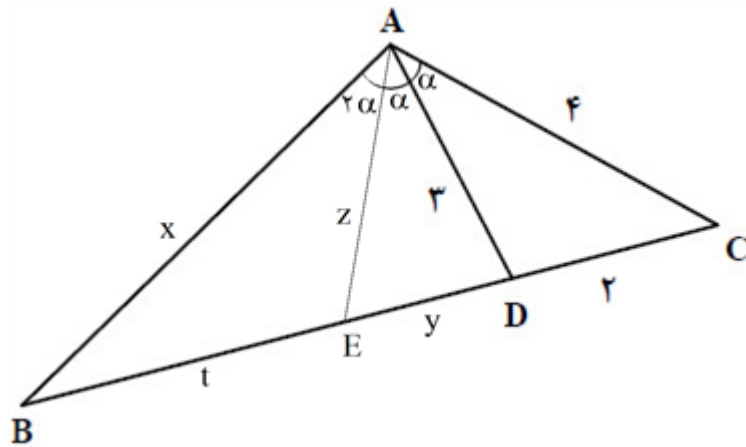
$$\Rightarrow (x+12)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$AB = x + y + v = 5 + 5 + v = 1v$$

پس:



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\triangle AEC : \frac{AC}{AE} = \frac{CD}{DE} \Rightarrow \frac{4}{z} = \frac{2}{y} \Rightarrow z = 2y$$

$$AD^2 = AC \cdot AE - CD \cdot DE \Rightarrow y = \frac{2}{2}$$

$$3^2 = 4 \times z - 2y \Rightarrow 9 = 6y$$

$$z = 3 \text{ و } EC = 3/5$$

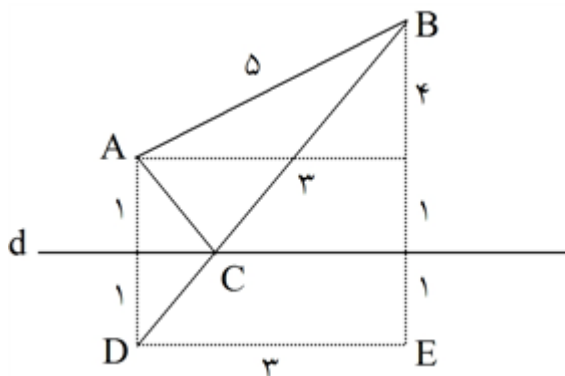
$$\triangle ABC : \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{EC} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{1}{3/5} \Rightarrow t = \frac{5}{3}x$$

$$AE^2 = AB \times AC - BE \cdot EC$$

$$3^2 = 4x - 3/5 \xrightarrow{t=\frac{5}{3}x} 9 = \frac{15}{16}x \Rightarrow x = 9/6$$

$$\text{محیط} = 9/6 + 4 + 3 + 3/5 + 8/2 = 25/5$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

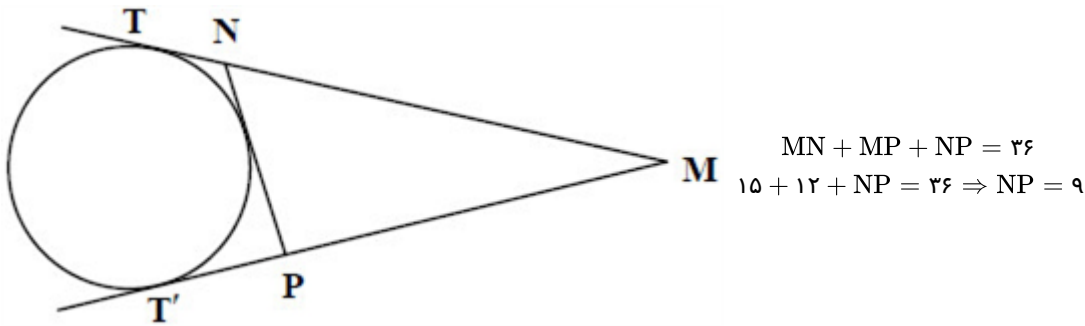


$$\text{Min}(AC + BC) = BD$$

$$BD^2 = BE^2 + DE^2 \Rightarrow BD^2 = 6^2 + 3^2$$

$$\Rightarrow B = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $MT = MT' = P$ پس $P = ۱۸$ در نتیجه محیط مثلث MNP برابر ۳۶ است پس:

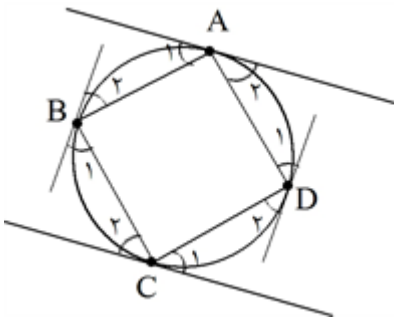


از طرف دیگر اگر r_a شعاع دایره محاطی خارجی نظیر ضلع NP باشد داریم:

$$r_a = \frac{S}{P-a} \xrightarrow{a=NP=9} r_a = \frac{\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}}{P-a} = \frac{\sqrt{18(18-15)(18-12)(18-9)}}{18-9}$$

$$= \frac{\sqrt{18 \times 3 \times 6 \times 9}}{9} = \frac{18 \times 3}{9} = 6$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل داریم:



زاویه ظلی: $\hat{A}_1 = \frac{\widehat{AB}}{r}, \hat{B}_1 = \frac{\widehat{AB}}{r}, \hat{C}_1 = \frac{\widehat{CD}}{r}, \hat{D}_1 = \frac{\widehat{AD}}{r}$

زاویه ظلی: $\hat{A}_r = \frac{\widehat{AD}}{r}, \hat{B}_r = \frac{\widehat{BC}}{r}, \hat{C}_r = \frac{\widehat{BC}}{r}, \hat{D}_r = \frac{\widehat{CD}}{r}$

بنابراین:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_r + \hat{B}_1 + \hat{B}_r + \hat{C}_1 + \hat{C}_r + \hat{D}_1 + \hat{D}_r$$

$$= \frac{\widehat{AB}}{r} + \frac{\widehat{AD}}{r} + \frac{\widehat{AB}}{r} + \frac{\widehat{BC}}{r} + \frac{\widehat{CD}}{r} + \frac{\widehat{BC}}{r} + \frac{\widehat{AD}}{r} + \frac{\widehat{CD}}{r} = \widehat{AB} + \widehat{AD} + \widehat{BC} + \widehat{CD} = ۳۶۰^\circ$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نیمساز زاویه $\hat{A}$ در مثلث ABC یعنی AE را رسم می‌کنیم. در این صورت AD نیمساز مثلث ABE است. با استفاده از قضیه نیمساز می‌نویسیم:

$$\triangle ABE: \text{نیمساز AD} \Rightarrow \frac{BD}{DE} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{r}{x} = \frac{\lambda}{y}$$

$$\Rightarrow y = rx \quad (1)$$

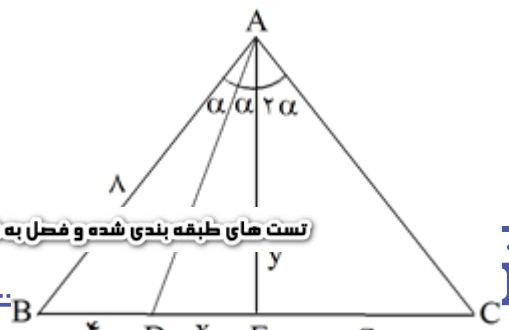
$$\triangle ABE: \text{نیمساز AD} \Rightarrow AD^r = AB \times AE - BD \times DE$$

$$\Rightarrow ۳۶ = \lambda y - rx \xrightarrow{\text{از (1)}} ۳۶ = 16x - rx \Rightarrow x = ۳ \xrightarrow{\text{از (1)}} y = 6$$

$$\triangle ABC: \text{نیمساز AE} \Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{r+x}{z} = \frac{\lambda}{AC} \xrightarrow{x=3} \frac{v}{z} = \frac{\lambda}{AC} \Rightarrow z = \frac{v}{\lambda} AC$$

$$\triangle ABC: \text{نیمساز AE} \Rightarrow AE^r = AB \times AC - BE \times EC \Rightarrow y^r = \lambda AC - (r+x)(z) \xrightarrow{\text{از (2)}}_{y=6}$$

$$۳۶ = \lambda AC - v \times \frac{v}{\lambda} AC \Rightarrow ۳۶ = \left(\lambda - \frac{r^2}{\lambda} \right) AC \Rightarrow AC = \frac{۳۶}{\frac{16}{\lambda}} \Rightarrow AC = \frac{\lambda \times ۳۶}{16} = \frac{96}{5} = ۱۹ \frac{۲}{5}$$



۳۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مثلث‌های با مساحت ۳۰ و ضلع مشترک ۱۵ واحد دارای ارتفاع برابر ۴ هستند. $h = \frac{2 \times 30}{15}$

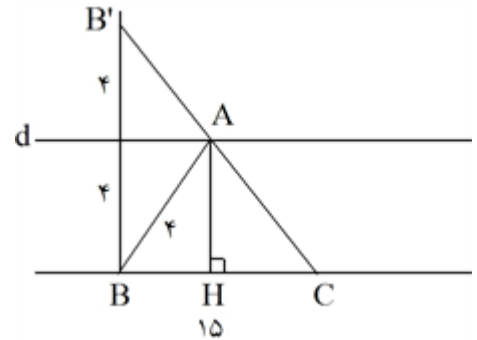
اگر مثلث موردنظر باشد و $BC = 15$ ، آنگاه رأس A روی خط d موازی BC به فاصله ۴ قرار دارد. برای پیدا کردن رأس A روی خط d به طوری که محیط ABC مینیمم باشد از مسئله هرون استفاده کرده بازتاب B را نسبت به d نقطه B' نامیده از B' به C وصل می‌کنیم تا خط d را در A قطع کند در این صورت $AB + AC$ مینیمم است. در این صورت

چون $AH \parallel BB'$ طبق قضیه تالس $\frac{CH}{BC} = \frac{AH}{BB'} = \frac{1}{2}$ پس AH میانه است بنابراین مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

$$\triangle AHC : AC^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow AC^2 = 4^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 = 16 + \frac{225}{4} = \frac{289}{4} \Rightarrow AC = \frac{17}{2}$$

بنابراین:

$$\triangle ABC \text{ محیط مینیمم} = AB + AC + BC = \frac{17}{2} + \frac{17}{2} + 15 = 17 + 15 = 32$$



۳۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شعاع دایره محاطی خارجی نظیر ضلع BC از رابطه زیر تعیین می‌شود.

$$r_a = \frac{S}{P - a}$$

$$P = \frac{9 + 8 + 7}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{12(12-9)(12-8)(12-7)} = \sqrt{12 \times 3 \times 4 \times 5}$$

$$= \sqrt{12^2 \times 5} = 12\sqrt{5}$$

$$r_a = \frac{S}{P - a} = \frac{12\sqrt{5}}{12 - 9} = \frac{12\sqrt{5}}{3} = 4\sqrt{5}$$

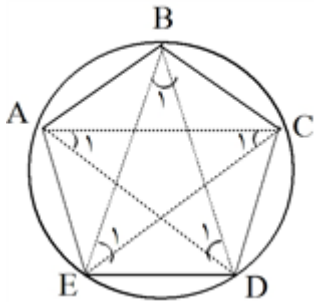
بنابراین:



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راه حل اول: این سؤال را در حالت خاص که پنج ضلعی منتظم است حل می‌کنیم. پنج ضلعی منتظم محاط در دایره، دایره را به پنج قسمت مساوی $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ تقسیم می‌کند. زاویه محاطی $\widehat{D}_1$ روبه‌رو به وتر AB است پس:

$$\widehat{D}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

به همین ترتیب زاویه‌های محاطی روبه‌رو به اضلاع این پنج ضلعی منتظم برابر 36° است بنابراین مجموع این زاویه‌ها $5 \times 36^\circ = 180^\circ$ است.

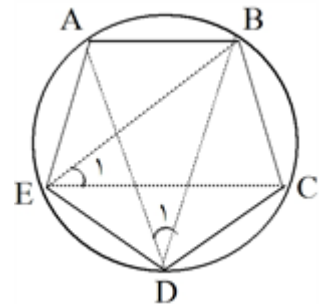


راه حل دوم: فرض کنیم ABCDE پنج ضلعی محاط در دایره باشد داریم:

$$\widehat{A}_1 = \frac{\widehat{CD}}{2}, \widehat{B}_1 = \frac{\widehat{ED}}{2}, \widehat{C}_1 = \frac{\widehat{AE}}{2}, \widehat{D}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2}, \widehat{E}_1 = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

در نتیجه:

$$\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 + \widehat{D}_1 + \widehat{E}_1 = \frac{\widehat{CD} + \widehat{ED} + \widehat{AE} + \widehat{AB} + \widehat{BC}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

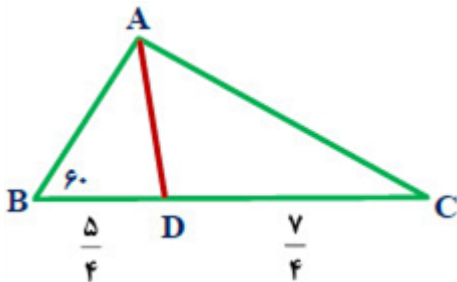


گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{قضیه نیمساز: } \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{5}{5} \Rightarrow AC = \frac{5}{5} AB$$

$$\text{قضیه کسینوس‌ها: } AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos B$$

$$\Rightarrow \frac{49}{25} AB^2 = AB^2 + 3^2 - 2AB \times 3 \times \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{24}{25} AB^2 + 3AB - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} AB = -5 \text{ غ ق} \\ AB = \frac{15}{4} \Rightarrow AC = \frac{15}{4} \end{cases}$$

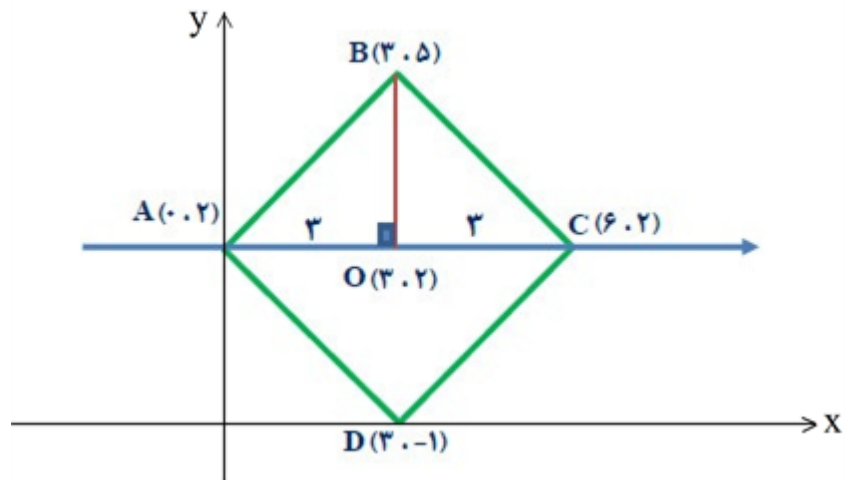


$$AD^2 = AC \times AB - DC \times BD$$

$$AD^2 = \frac{21}{4} \times \frac{15}{4} - \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{25 \times 5}{16} \Rightarrow AD = \frac{5}{4} \sqrt{5}$$

۳۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بازتاب نقطه A نسبت به محور yها بر خودش منطبق شده است، پس A روی محور yها است. چون قطرهای مربع عمودمنصف یکدیگر و با هم مساویند. پس مختصات سایر رأس‌های مربع به صورت شکل زیر است.



$$\text{فاصله B تا مبدأ مختصات} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

۳۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

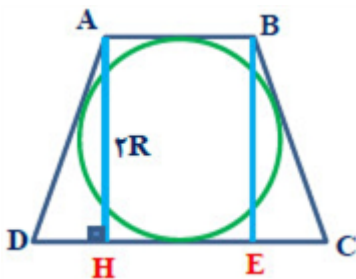
$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{(10)^2 - (R + R')^2} \Rightarrow (R + R')^2 = 100 - (2\sqrt{14})^2 \Rightarrow R + R' = 5$$

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{(10)^2 - (R - R')^2} \Rightarrow (R - R')^2 = 100 - (2\sqrt{5})^2 \Rightarrow R - R' = 1$$

$$\xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} 2R = 6 \Rightarrow R = 3$$

۳۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم دوزنقه بر دایره‌ای به شعاع R محاط باشد، پس ارتفاع دوزنقه برابر ۲R است. با رسم ارتفاع‌های AH و BE داریم:

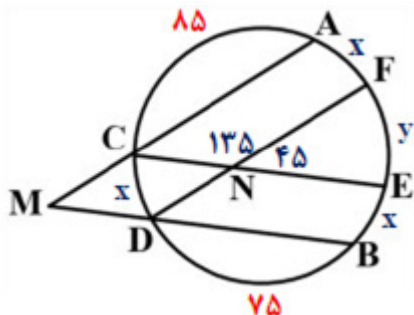


$$DH = CE = \frac{DC - AB}{2} = \frac{16}{2} \Rightarrow DH = 8$$

$$AD^2 = AH^2 + DH^2 \Rightarrow AD^2 = (4\sqrt{5})^2 + 8^2 = 144 \Rightarrow AD = 12$$

۳۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی مساویند، پس $\widehat{AF} = \widehat{CD}$ و $\widehat{CD} = \widehat{BE}$ اکنون با توجه به شکل می‌نویسیم:



$$\left. \begin{aligned} \widehat{FNE} = 45^\circ = \frac{x+y}{2} &\Rightarrow x+y = 90^\circ \\ 135^\circ + 75^\circ + 2x + y = 360^\circ &\Rightarrow 2x + y = 160^\circ \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{کم می کنیم}} 2x = 110^\circ \Rightarrow \begin{cases} x = 55 \\ y = 35 \end{cases}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث BDC داریم:

$$\widehat{D}_r + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 180^\circ$$

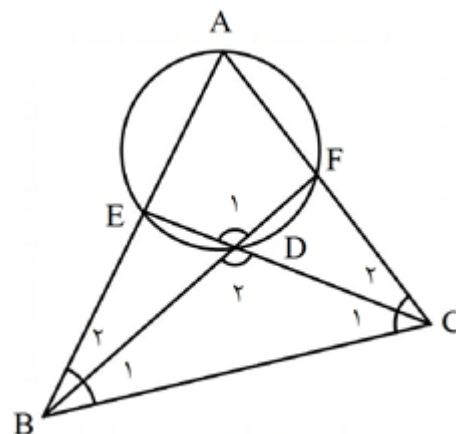
BD و CD نیمساز زوایای B و C هستند، پس داریم:

$$\widehat{D}_r + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = 180^\circ \quad (1)$$

از طرفی چهارضلعی AEDF محاطی است، بنابراین:

$$\widehat{A} + \widehat{D}_1 = 180^\circ \xrightarrow{\widehat{D}_1 = \widehat{D}_r} \widehat{A} + \widehat{D}_r = 180^\circ \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow \widehat{A} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} \Rightarrow 2\widehat{A} = 180^\circ - \widehat{A} \Rightarrow 3\widehat{A} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 60^\circ$$



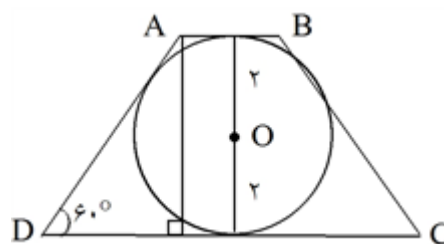
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل طول ارتفاع دوزنقه برابر طول قطر دایره یعنی برابر ۴ است. از طرفی در مثلث ADH داریم:

$$\sin 60^\circ = \frac{AH}{AD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{AD} \Rightarrow AD = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

چهارضلعی ABCD، یک چهارضلعی محیطی است، پس داریم:

$$AB + CD = AD + BC = 2AD = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AH(AB + CD) = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{32}{\sqrt{3}}$$



۴۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث ABC فرض کنیم $AB = ۴x$ و $AC = ۵x$ و $BC = ۶x$. در این صورت زاویه B متوسط است. فرض کنیم BD نیمساز زاویه B باشد. در این صورت دو مثلث ABD و ABC دارای ارتفاع مشترک از رأس B هستند پس نسبت مساحت‌های آنها برابر نسبت قاعده‌های نظیرشان است. پس:

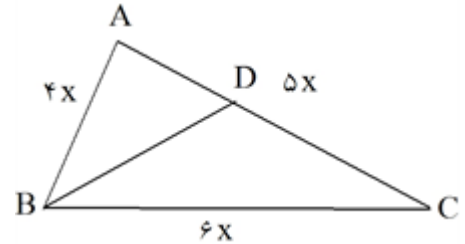
$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AC} \quad (۱)$$

از طرف دیگر بنابر قضیه نیمساز داخلی می‌نویسیم:

$$BD \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AD}{AD+DC} = \frac{AB}{AB+BC} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AB+BC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{۴x}{۴x+۶x} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{۴x}{۱۰x} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{۲}{۵} \quad (۲)$$

بنابراین: $\Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{۵}{۲}$



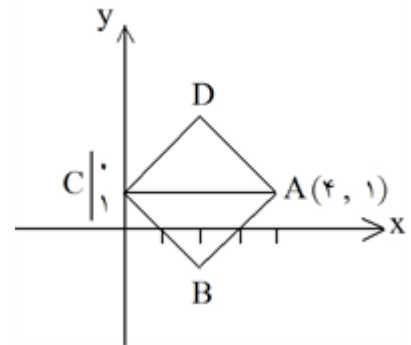
۴۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون بازتاب نقطه C نسبت به محور yها بر خودش منطبق است پس نقطه C روی محور yها قرار دارد پس مختصات C به صورت $(۰, ۱)$ است. در ضمن عرض نقطه D برابر ۳ است. فرض کنیم $D(x, ۳)$ چون قطرهای مربع عمودمنصف یکدیگرند پس رأس $B(x, y)$ بازتاب D نسبت به قطر AC است و چون قطرهای مربع عمودمنصف یکدیگرند. پس:

$$A + C = B + D \Rightarrow (۴, ۱) + (۰, ۱) = (x, ۳) + (x, y)$$

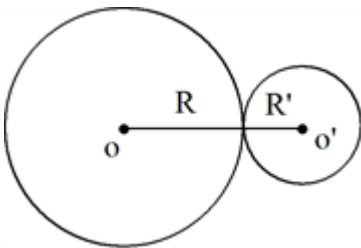
$$A + C = B + D \Rightarrow (۴, ۱) + (۰, ۱) = (x, ۳) + (x, y) \Rightarrow \begin{cases} ۴ = ۲x \Rightarrow x = ۲ \\ ۲ = ۳ + y \Rightarrow y = -۱ \end{cases} \Rightarrow B(۲, -۱)$$

$$OB = \sqrt{۴+۱} = \sqrt{۵} \quad \text{بنابراین:}$$



۴۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. طول خط المرکزین دو دایره مماس خارج مساوی $R + R'$ است. پس طول مماس مشترک خارجی این دو دایره $۲\sqrt{RR'}$ است. بنابر فرض سؤال داریم.



$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \frac{\sqrt{r}}{r} R \Rightarrow ۲\sqrt{RR'} = \frac{\sqrt{r}}{r} R$$

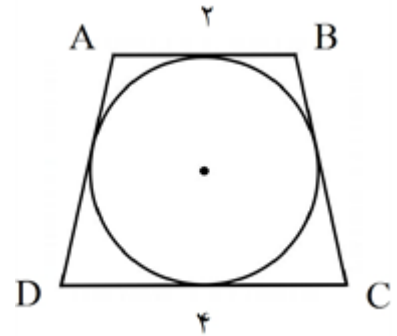
$$\Rightarrow ۴RR' = \frac{r}{r} R^2 \Rightarrow ۴R' = \frac{r}{r} R \Rightarrow R = \frac{۱}{۴} R'$$

بنابراین شعاع دایره بزرگتر $\frac{۱۶}{۳}$ برابر شعاع دایره کوچکتر است.

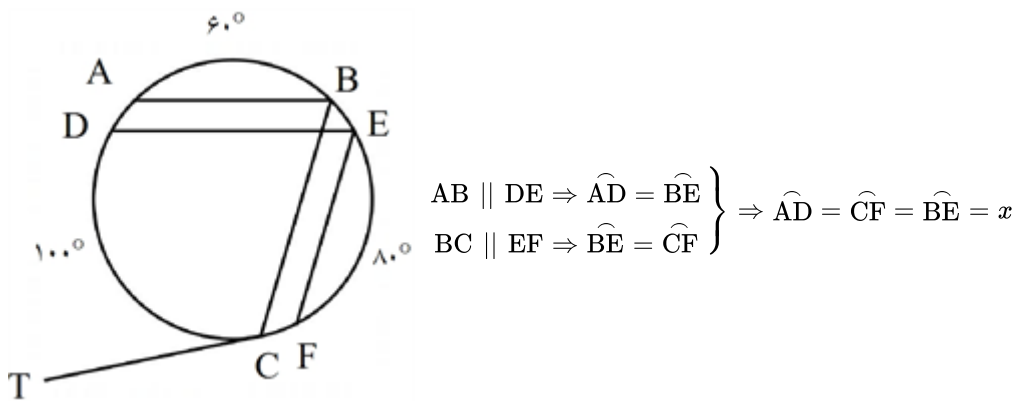
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در دوزنقه متساوی الساقین محیطی قطر دایره محاطی واسطه هندسی بین دو قاعده دوزنقه است. به عبارتی اگر شعاع دایره محاطی دوزنقه متساوی الساقین محیطی ABCD باشد آن گاه $AB \times DC = 4R^2$ پس:

$$4R^2 = AB \times DC \Rightarrow 4R^2 = 2 \times 2 \Rightarrow R^2 = 2$$

بنابراین: مساحت دایره $= \pi R^2 = 2\pi$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می دانیم اندازه کمان های بین دو وتر موازی مساویند.



در ضمن:

$$\widehat{AB} + \widehat{BE} + \widehat{EF} + \widehat{CF} + \widehat{CD} + \widehat{AD} = 360^\circ \Rightarrow 60^\circ + x + 80^\circ + x + 100^\circ + x = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 3x = 120^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$$

از طرف دیگر زاویه BCT زاویه ظلی است بنابراین:

$$\widehat{BCT} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{DC} + \widehat{AB}}{2} = \frac{40^\circ + 100^\circ + 60^\circ}{2} = 100^\circ$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از قضیه‌ی نیمساز زاویه داخلی استفاده کرده می‌نویسیم.

$$\text{نیمساز } AD = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{3/5}{2/5} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{35}{25} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{7}{5} = \frac{AB}{AC}$$

با توجه به تناسب بدست آمده فرض می‌کنیم $AB = 7x$ و $AC = 5x$ اکنون از قضیه‌ی کسینوسها داریم:

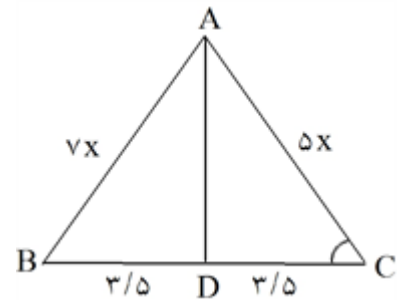
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \cos 60^\circ \xrightarrow{BC=6} 49x^2 = 25x^2 + 36 - 2(5x)(6)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 49x^2 = 25x^2 + 36 - 30x \Rightarrow 24x^2 + 30x - 36 = 0 \xrightarrow{\div 6} 4x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 96}}{8} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{-5 \pm 11}{8} \Rightarrow x = \frac{-5 + 11}{8} \Rightarrow x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

بنابراین ضلع کوچکتر این مثلث یعنی AC برابر $3/4$ و $BD = 2/5$ و $DC = 3/5$ اگر توجه کنید $5x = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 3/4$ برابر AC است. (توجه کنید اگر $AB > AC$)

آنگاه مسئله جواب نخواهد داشت. پس بهتر بود از ابتدا مطرح می‌شد $(AB > AC)$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بازتاب نقطه‌ی D نسبت به محور x ها بر خودش منطبق است پس نقطه‌ی D روی محور x ها قرار دارد پس: $D = (3, 0)$.

مسئله بازتاب نقطه‌ی C نسبت به قطر BD نقطه‌ی A است زیرا قطرهای مربع عمود منصف یکدیگرند. فرض کنیم $A = (x, y)$ و $C = (5/5, y)$ در این صورت چون قطرهای مربع منصف یکدیگرند بنابراین:

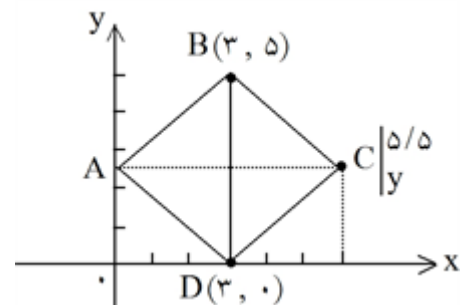
$$A + C = B + D \Rightarrow (x, y) + (5/5, y) = (3, 5) + (3, 0) = (x + 5/5, 2y) = (6/5)$$

$$\begin{cases} x + 5/5 = 6 \Rightarrow x = 1/5 \\ 2y = 5 \Rightarrow y = 5/2 \end{cases} \Rightarrow A(1/5, 5/2)$$

پس:

بنابراین:

$$OA = \sqrt{(1/5)^2 + (5/2)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \sqrt{6/5}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنیم R شعاع دایره بزرگتر و R' شعاع دایره‌ی کوچکتر باشد. چون دو دایره مماس درونی‌اند پس $OO' = R - R'$ یعنی:

$$R - R' = ۳/۵$$

از طرف دیگر:

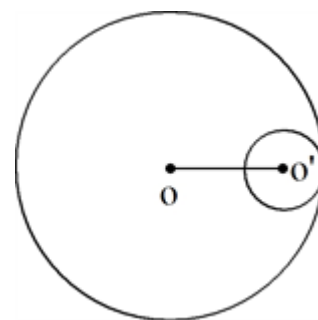
$$\text{مساحت بین دو دایره} = ۲۱\pi \Rightarrow \pi R^2 - \pi R'^2 = ۲۱\pi \Rightarrow R^2 - R'^2 = ۲۱$$

$$\Rightarrow (R - R')(R + R') = ۲۱ \xrightarrow{R - R' = ۳/۵} ۳/۵(R + R') = ۲۱$$

$$\Rightarrow R + R' = \frac{۲۱}{۳/۵} = \frac{۲۱}{\frac{۳}{۵}} = ۶$$

بنابراین:

$$\begin{cases} R - R' = ۳/۵ \xrightarrow{\text{کم می کنیم}} ۲R' = ۶ - ۳/۵ \Rightarrow ۲R' = ۲/۵ \Rightarrow R' = \frac{۲/۵}{۲} = ۱/۲۵ \\ R + R' = ۶ \end{cases}$$



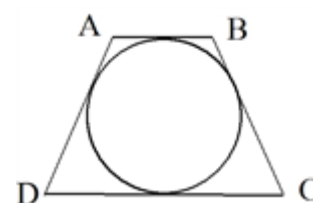
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین بر دایره به شعاع R محیط باشد آنگاه قطر دایره‌ی محاطی واسطه هندسی بین دو قاعده است. پس:

$$۴R^2 = AB \times DC \quad (۱)$$

از طرف دیگر:

$$\text{مساحت دایره} = ۱۵\pi \Rightarrow \pi R^2 = ۱۵\pi \Rightarrow R^2 = ۱۵ \quad (۲)$$

$$(۲), (۱) \text{ از } \Rightarrow ۴ \times ۱۵ = a \times ۶ \Rightarrow a = ۱۰$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم کمانهای محصور بین دو وتر موازی مساویند پس:

$$AB \parallel EF \Rightarrow \widehat{BF} = \widehat{AE} \xrightarrow{\widehat{AE}=15^\circ} \widehat{BF} = 15^\circ$$

با فرض $\widehat{AB} = x$ و $\widehat{CD} = y$ می‌نویسیم.

$$\widehat{AB} + \widehat{BF} + \widehat{FD} + \widehat{CD} + \widehat{EC} + \widehat{AE} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow x + 15^\circ + 100^\circ + y + 80^\circ + 15^\circ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow x + y = 150^\circ \quad (1)$$

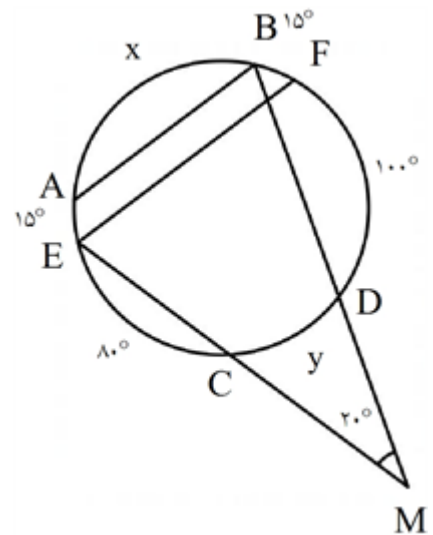
از طرف دیگر:

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{EAB} - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow 20^\circ = \frac{15^\circ + x - y}{2} \Rightarrow x - y = 25^\circ \quad (2)$$

$$2, 1 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 150^\circ \\ x - y = 25^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} 2y = 125^\circ \Rightarrow y = 62.5^\circ$$

بنابراین:

$$\widehat{ABD} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{ABD} = \frac{62.5^\circ + 80^\circ + 15^\circ}{2} = \frac{157.5^\circ}{2} = 78.75^\circ$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم R شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر باشد. چون AB محور تقارن این شکل است پس

$$DN = N'C = 10$$

در ضمن قطر AB عمود منصف NN' است پس $ON = ON'$

حال با استفاده از قضیه‌ی رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم.

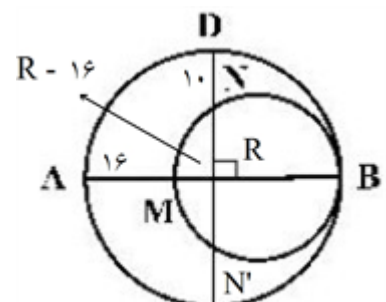
$$ON \times ON' = OB \times OM \xrightarrow{ON=ON'=R-10}$$

$$(R - 10)^2 = R(R - 16) \Rightarrow R^2 + 100 - 20R = R^2 - 16R$$

$$\Rightarrow 4R = 100 \Rightarrow R = 25$$

در شکل MB قطر دایره‌ی کوچک‌تر است از طرف دیگر MB مساوی $2R - 16$ است. پس:

$$MB = 2R - 16 \Rightarrow \text{شعاع دایره کوچک} = 50 - 16 = 34 \Rightarrow \text{شعاع دایره کوچک} = 17$$



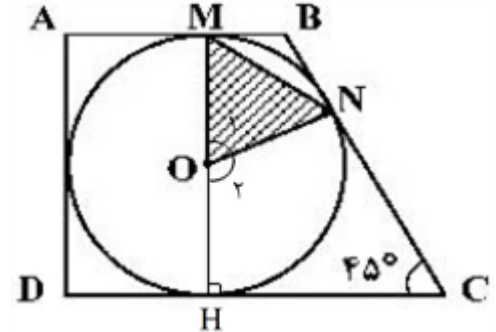
۵۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شعاع OM را امتداد می‌دهیم در این صورت شعاع OH بر DC عمود است. چون $\widehat{N} = \widehat{H} = 90^\circ$ پس چهارضلعی ONCH محاطی است در نتیجه:

$$\widehat{O}_r = 180^\circ - 45^\circ \xrightarrow{\widehat{O}_1 + \widehat{O}_r = 180^\circ} \widehat{O}_1 = 45^\circ$$

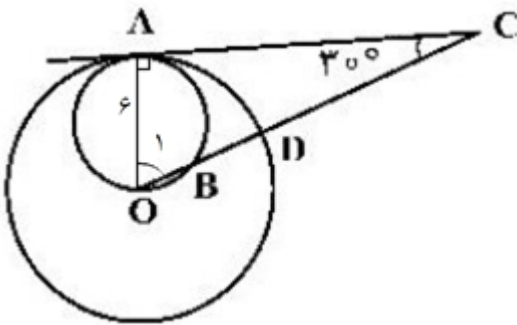
بنابراین:

$$S_{OMN} = \frac{1}{2} OM \times ON \sin 45^\circ = \frac{1}{2} (r)(r) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$



۵۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از مرکز O به نقطه‌ی A وصل می‌کنیم در این صورت $\widehat{A} = 90^\circ$ است.



$$\triangle OAC : \widehat{C} = 30^\circ \Rightarrow OA = \frac{1}{2} OC \xrightarrow{OA=6} OC = 12$$

$$\triangle OAC : \widehat{A} = 60^\circ \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} OC = \frac{\sqrt{3}}{2} (12) = 6\sqrt{3}$$

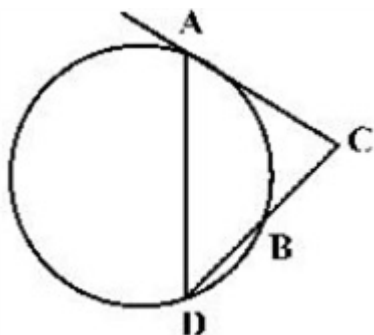
حال با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره‌ی کوچک‌تر می‌نویسیم:

$$CA^2 = CB \times CO \Rightarrow (6\sqrt{3})^2 = CB \times 12 \Rightarrow 108 = 12CB \Rightarrow CB = 9$$

$$BD = BC - CD = 9 - 6 = 3 \quad \text{از طرف دیگر } CD = CO - OD = 12 - 6 = 6 \text{ بنابراین:}$$

۵۳

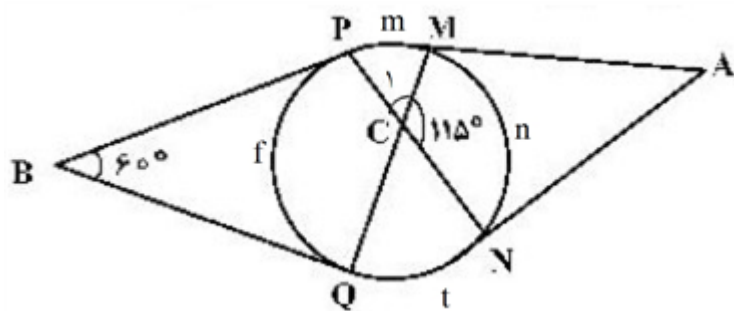
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم:



$$CA^2 = CB \times CD \Rightarrow CA^2 = CB (CB + BD) \xrightarrow{DB=BC}$$

$$CA^2 = CB (CB + CB) \Rightarrow CA^2 = 2CB^2 \Rightarrow CA = \sqrt{2} CB \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \sqrt{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم اندازه‌ی کمان‌های $\widehat{PM}$ و $\widehat{MN}$ و $\widehat{NQ}$ و $\widehat{PQ}$ به ترتیب برابر m و n و t و f باشند داریم:



$$60^\circ = \frac{m+n+t-f}{2} \Rightarrow m+n+t-f = 120 \quad (1)$$

$$\widehat{C} = 115^\circ \Rightarrow \widehat{C}_1 = 180 - 115 = 65^\circ$$

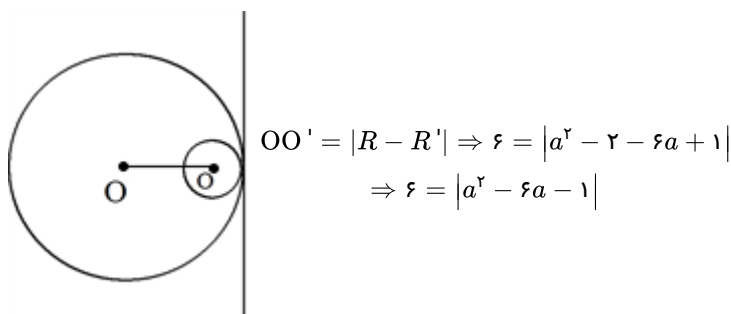
$$\Rightarrow \frac{m+t}{2} = 65 \Rightarrow m+t = 130 \quad (2)$$

$$2, 1 \Rightarrow n - f = -10$$

$$\widehat{A} = \frac{m+f+t-n}{2} = \frac{(m+t) + (f-n)}{2} = \frac{130^\circ + 10^\circ}{2} = 70^\circ$$

بنابراین:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در صورتی دو دایره فقط یک مماس مشترک دارند که مماس داخلی باشند. پس باید $OO' = |R - R'|$ باشد.



$$a^2 - 6a - 1 = 6 \Rightarrow a^2 - 6a - 7 = 0 \Rightarrow S_1 = 6$$

حالت اول:

$$a^2 - 6a - 1 = -6 \Rightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \Rightarrow S_2 = 6$$

حالت دوم:

$$\frac{S_1 + S_2}{2} = 6$$

پس میانگین مقادیر ممکن برای a برابر است با:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از O به N وصل می‌کنیم در این صورت ON برابر شعاع دایره است. در ضمن در چهارضلعی

OMB_N دو زاویه‌ی $\widehat{M}$ و $\widehat{N}$ قائمه هستند پس این چهارضلعی محاطی است. بنابراین $\widehat{O}_1 + \widehat{B} = 180^\circ$ پس $\widehat{O}_1 = 60^\circ$

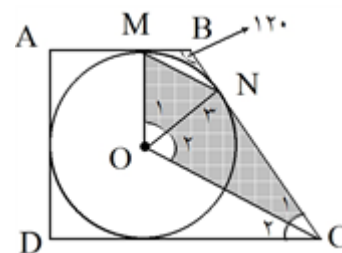
پس مثلث OMN متساوی‌الاضلاع است. از طرف دیگر دو زاویه‌ی B و C در این دوزنقه مکملند و OC نیمساز زاویه‌ی $\widehat{C}$

است پس $\widehat{C}_1 = 30^\circ$ پس $\widehat{O}_2 = 60^\circ$ داریم.

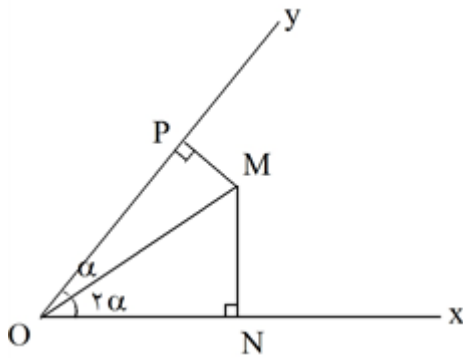
$$\triangle ONC : \widehat{C}_1 = 30^\circ \Rightarrow ON = \frac{1}{2}OC \xrightarrow{ON=R} OC = 6$$

بنابراین:

$$S_{OMNC} = S_{OMN} + S_{ONC} = \frac{\sqrt{3}}{4}(3)^2 + \frac{1}{2}ON + OC \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}(6) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شعاع دایره‌های محیطی دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OMN و OMP مساوی $R = \frac{OM}{\gamma}$ است. پس با استفاده از قضیه‌ی سینوس‌ها داریم.



$$\left. \begin{aligned} \triangle OMN : \frac{MN}{\sin \gamma\alpha} &= \gamma R \\ \triangle OMP : \frac{MP}{\sin \alpha} &= \gamma R \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{MN}{\sin \gamma\alpha} = \frac{MP}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{\sin \gamma\alpha}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{\gamma \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{MN}{MP} = \gamma \cos \alpha \quad (1)$$

$$\cos \alpha = \frac{OP}{OM} \quad (2)$$

از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه OMP می‌نویسیم:

$$(2) \text{ و } (1) \Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{\gamma OP}{OM}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

مطابق شکل شش‌ضلعی MNPQRS که درون مثلث ABC محاط شده است، بر دایره‌ی محاطی داخلی این مثلث، محیط است. بنابراین کافی است شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC را محاسبه کرده و سپس طول هر ضلع شش‌ضلعی منتظم محیطی این دایره را به دست آوریم.

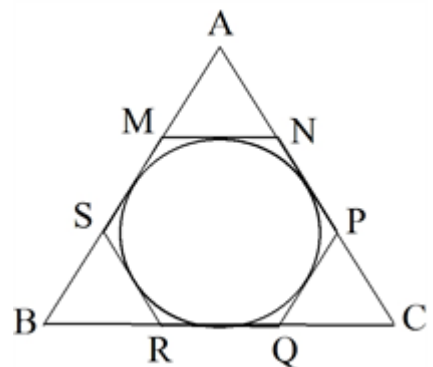
$$p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = 42$$

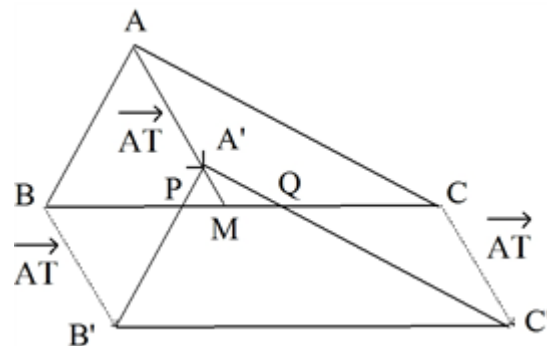
$$r = \frac{S}{p} = \frac{42}{21} = 2$$

$$MN = \gamma r \tan \frac{120^\circ}{6} = 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

توجه کنید شش‌ضلعی منتظم در مثلث ABC محاط شده است پس مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باید باشد که خلاف فرض سؤال است و اگر منتظم در نظر گرفته نشود هر ضلع آن هر اندازه‌ای می‌تواند داشته باشد.



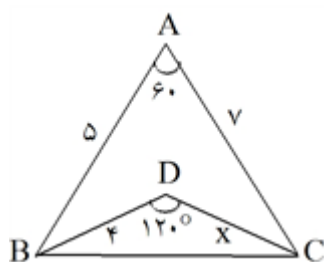
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنید مثلث $A'B'C'$ تصویر مثلث ABC تحت انتقال با بردار $\vec{AA'} = \vec{AT}$ باشد. بنابر فرض سوال مساحت مثلث $A'PQ$ مساوی $\frac{1}{16}$ مساحت مثلث ABC است داریم.



$$A'PQ \sim ABC \Rightarrow \frac{S_{A'PQ}}{S_{ABC}} = \left(\frac{A'M}{AM}\right)^2 \xrightarrow{\frac{S_{A'PQ}}{S_{ABC}} = \frac{1}{16}} \frac{A'M}{AM} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{تفصیل از صورت}} \frac{AA'}{AM} = \frac{3}{4} \xrightarrow{AM = \frac{BC}{2} = \frac{4}{2} = 2} \frac{AA'}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow AA' = 3$$

پس اندازه بردار $\vec{AT}$ برابر ۳ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از B به C وصل کرده با استفاده از قضیه ی کسینوس ها می نویسیم.



$$\triangle ABC : BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos 60^\circ \\ \Rightarrow BC^2 = 25 + 49 - 2(5)(7)\left(\frac{1}{2}\right) = 39$$

$$\triangle BDC : BC^2 = BD^2 + DC^2 - 2BD \times DC \cos 120^\circ \\ \Rightarrow 39 = 16 + x^2 - 2(4)(x)\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 39 = 16 + x^2 + 4x$$

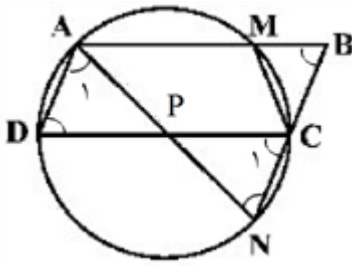
$$\Rightarrow x^2 + 4x - 23 = 0$$

این معادله را با فرمول b' حل می کنیم.

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 23}}{1} = -2 \pm \sqrt{27}$$

مسئله $x = -2 - \sqrt{27}$ قابل قبول نیست پس $x = -2 + \sqrt{27}$ بنابراین $x + 2 = \sqrt{27}$

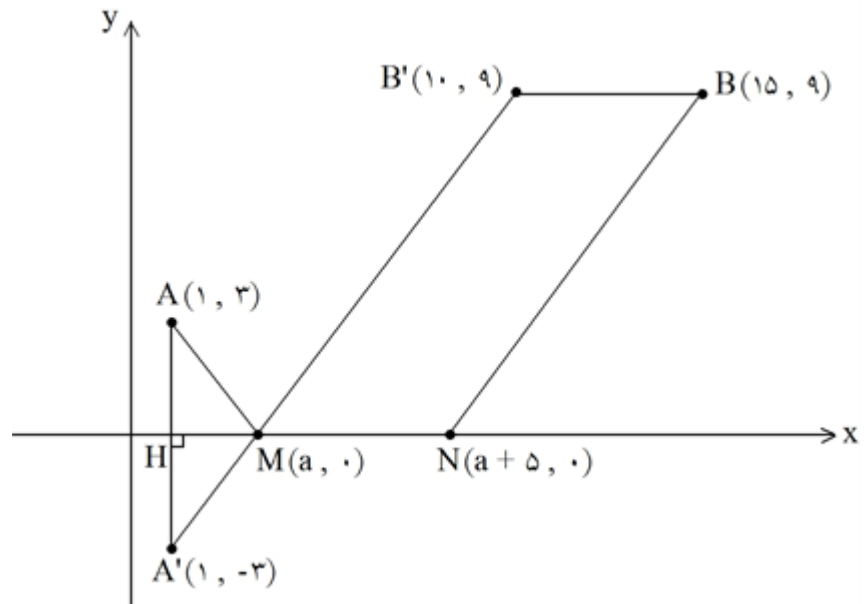
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو زاویه‌ی محاطی N و D روبه‌رو به یک کمان هستند پس مساویند.



مثلث ABN متساوی‌الساقین است $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{N} \xrightarrow{\widehat{D}=\widehat{B}} \widehat{D} = \widehat{N}$

از طرف دیگر دو وتر AM و DC موازیند پس دو کمان $\widehat{AD}$ و $\widehat{MC}$ که بین آنها هستند مساویند پس $AD = MC$. در ضمن $AD = BC$ پس $BC = MC$ یعنی مثلث BMC متساوی‌الساقین است. در ضمن چون $AD \parallel BN$ و AN مورب، پس $\widehat{A}_1 = \widehat{N}$ و $\widehat{N} = \widehat{D}$ پس $\widehat{A}_1 = \widehat{D}$ یعنی مثلث APD متساوی‌الساقین است و چون $AD \parallel BN$ و DC مورب، پس $\widehat{D} = \widehat{C}_1$ و $\widehat{D} = \widehat{N}$ پس $\widehat{C}_1 = \widehat{N}$ یعنی مثلث PNC نیز متساوی‌الساقین است. بنابراین چهار مثلث ABN و BMC و APD و PNC متساوی‌الساقین هستند.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

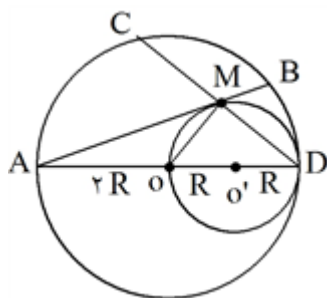


با توجه به شکل و موقعیت نقاط A, B, M, N این سؤال همان مسئله جاده‌ی ساحلی است که می‌خواهیم از A به B برویم به طوری که $MN = 5$ قسمتی از مسیر در ساحل رودخانه باشد. برای تعیین مسیر مینیمم ابتدا B را به اندازه‌ی ۵ واحد در راستای محور x ها به طرف A منتقل می‌کنیم تا به B' برسیم و بازتاب A را نسبت به محور x ها نقطه‌ی A' می‌نامیم. از A' به B' وصل می‌کنیم تا محور x ها در M قطع شود آن‌گاه مسیر $AMNB$ مسیر مینیمم است و طول آن برابر $A'B' + BB'$ است.

$$\begin{aligned} A'(1, -3) \Rightarrow A'B' &= \sqrt{(10-1)^2 + (9+3)^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15 \\ B'(10, 9) \end{aligned}$$

$$\text{مسیر مینیمم} = A'B' + BB' = 15 + 5 = 20$$

از مرکز O به نقطه‌ی M وصل می‌کنیم در این صورت زاویه‌ی M محاطی روبه‌رو به قطر OD است پس $\widehat{M} = 90^\circ$.
بنابراین OM بر وتر CD عمود است پس OM وتر CD نصف می‌کند یعنی $CM = MD$.
حال با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم.



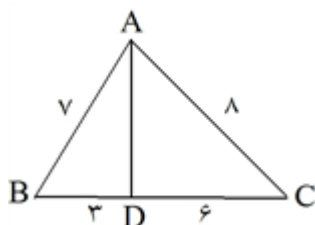
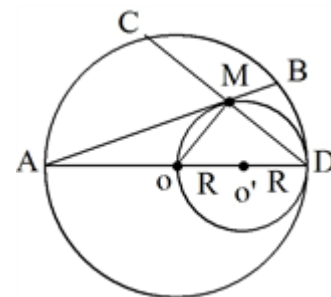
$$MA \times MB = MC \times MD \Rightarrow MA \times MB = MD^2 \quad (1)$$

در ضمن با وصل کردن نقطه‌ی B به D نتیجه می‌گیریم زاویه‌ی محاطی B که روبه‌رو به قطر دایره‌ی بزرگتر است قائمه است و شعاع O'M بر وتر AB عمود است پس:

$$O'M \parallel BD \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{O'A}{O'D} \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{2R}{R} = 2 \Rightarrow MA = 2MB \quad (2)$$

$$2, 1 \Rightarrow 2MB \times MB = MD^2 \Rightarrow \sqrt{2}MB = MD$$

$$\frac{MC}{MB} = \frac{MD}{MB} = \frac{\sqrt{2}MB}{MB} = \sqrt{2} \quad \text{بنابراین:}$$

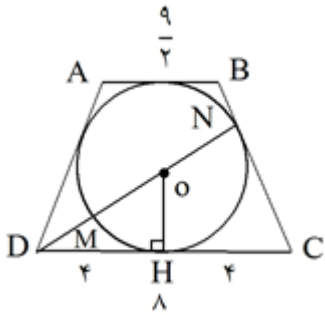


$$AB^2 \times DC + AC^2 \times BD = AD^2 \times BC + BD \times DC \times BC$$

$$\Rightarrow 29 \times 6 + 64 \times 3 = AD^2 \times 9 + 3 \times 6 \times 9 \xrightarrow{\div 3} 49 \times 2 + 64$$

$$= AD^2 \times 3 + 6 \times 9 \Rightarrow 162 = 3AD^2 + 54 \Rightarrow AD^2 = 36 \Rightarrow AD = 6$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین محیطی حاصل ضرب دو قاعده مساوی مربع قطر دایره‌ی محاطی است. اگر R شعاع دایره محاطی باشد آن‌گاه داریم:



$$AB \times DC = 2R^2 \Rightarrow \frac{9}{2} \times 8 = 2R^2$$

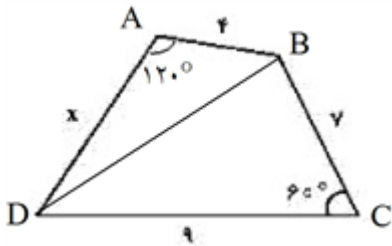
$$\Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = 3$$

حال از مرکز O به رأس D وصل می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های M و N قطع کند. در این صورت طول پاره‌خط DM نزدیک‌ترین و طول پاره‌خط DN دورترین فاصله‌ی نقاط دایره تا رأس D هستند. مسلماً $DN = DO + R$. برای به دست آوردن DO در مثلث قائم‌الزاویه ODH می‌نویسیم:

$$OD^2 = OH^2 + DH^2 = 3^2 + 2^2 = 13 \Rightarrow OD = \sqrt{13}$$

$$D \text{ تا دایره } = OD + R = \sqrt{13} + 3 = 8 \quad \text{بنابراین:}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چهارضلعی $ABCD$ محاطی است پس زاویه‌های مقابل آن مکمل‌اند پس $\hat{A} = 120^\circ$. با رسم قطر BD و استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها می‌نویسیم:



$$\triangle BDC : BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2BC \times DC \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow BD^2 = 49 + 16 - 2(7)(4)\left(\frac{1}{2}\right) = 67 \Rightarrow BD = \sqrt{67}$$

$$\triangle ABD : BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow 67 = 49 + x^2 - 2(7)(x)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

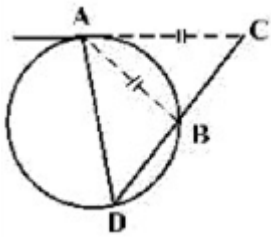
$$67 = 49 + x^2 + 7x \Rightarrow x^2 + 7x - 18 = 0$$

جواب‌های این معادله را از دستور b' به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{2} \Rightarrow x = -7 + \sqrt{119}$$

بنابراین $x + 7$ مساوی $\sqrt{119}$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر رابطه‌ی طولی تساوی $CA^r = CB \times CD$ برقرار است و بنابر قضیه‌ی استوارت در مثلث ADC می‌نویسیم:



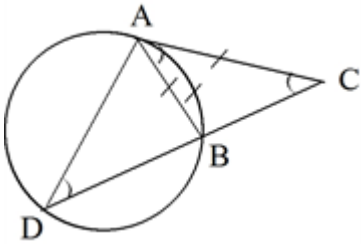
$$AC^r \times BD + AD^r \times BC = AB^r \times DC + BD \times BC \times DC$$

$$\frac{AC^r = CB \times CD}{AB=AC} \rightarrow CB \times \cancel{CD} \times BD + AD^r \times BC$$

$$= CB \times CD \times DC + BD \times \cancel{BC} \times DC \Rightarrow AD^r \times BC$$

$$= CB \times CD \times CD \Rightarrow AD^r = CD^r \Rightarrow AD = CD$$

راه حل دوم: دو زاویه‌ی ظلی A_1 و زاویه‌ی محاطی D برابرند زیرا:

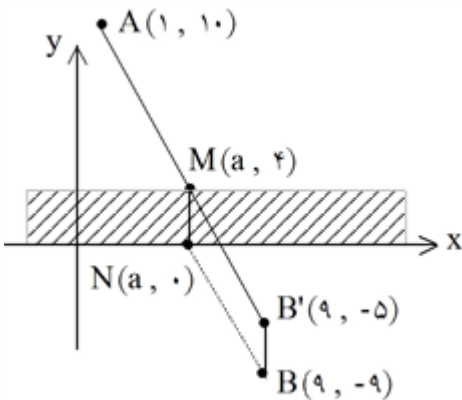


$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A_1} = \widehat{AB}^r \text{ ظلی} \\ \widehat{D} = \widehat{AB}^r \text{ محاطی} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \widehat{A_1} = \widehat{D} \\ \widehat{C} = \widehat{C} \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{(ز)} \triangle ABC \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC} \xrightarrow{AB=AC} AD = DC$$

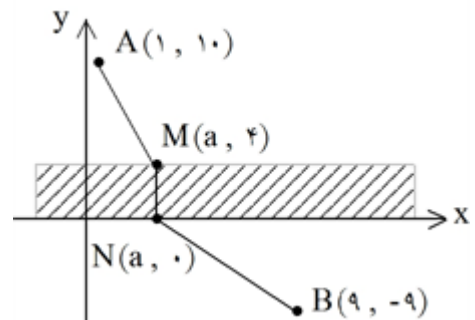
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل پاره‌خط MN موازی محور yها است. پس طول مینیمم خط شکسته AMNB همان مسئله رودخانه است که می‌خواهیم پلی در مسیر آن حداث کنیم (شکل را ببینید)

در این صورت باید نقطه‌ی B را در راستای محور yها به اندازه‌ی ۴ واحد (طول MN) انتقال دهیم تا به B' برسیم و از B' به A وصل کرده تا M به دست آید. سپس عمود MN مسیر مینیمم AMNB را ایجاد می‌کند. طول این مسیر برابر $AB' + MN$ یعنی $AB' + 4$ است.

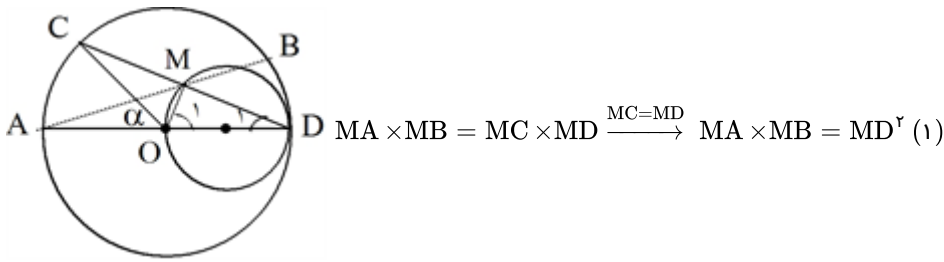


$$AB' = \sqrt{(9-1)^2 + (10+5)^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$$

پس طول مسیر مینیمم مساوی $17 + 4 = 21$ است.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. توجه کنید که شعاع دایره بزرگتر قطر دایره کوچکتر است پس اگر OM را رسم کنیم آنگاه زاویه M قائمه است. پس عمود OM وتر CD را نصف می‌کند یعنی $CM = MD$. حال بنابر رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم:



در ضمن طول کمان AC از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

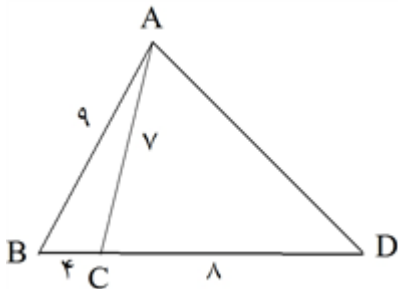
$$\text{طول کمان AC} = \frac{\alpha}{360} (2\pi R) \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{\alpha}{360} 2\pi \times 4 \Rightarrow \alpha = 60 \Rightarrow \widehat{AC} = 60^\circ$$

بنابراین $\widehat{D_1} = 30^\circ$ پس $\widehat{O_1} = 60^\circ$.

$$\triangle OMD : \widehat{O_1} = 60^\circ \Rightarrow MD = \frac{\sqrt{3}}{2} OD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

$$1 \Rightarrow MA \times MB = MD^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12 \quad \text{در نتیجه:}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه‌ی استوارت می‌نویسیم:

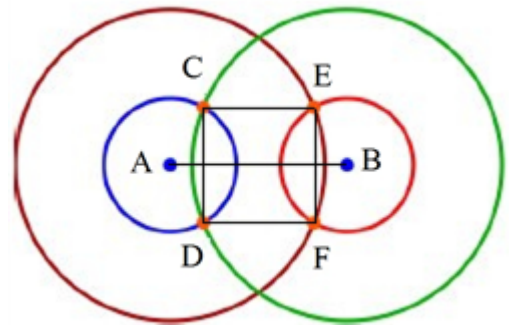


$$AB^2 \times CD + AD^2 \times BC = AC^2 \times BD + BC \times CD \times BD$$

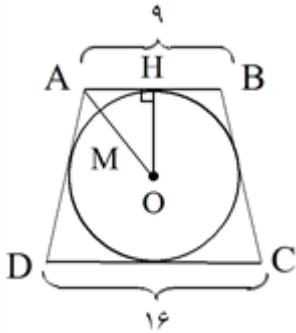
$$\Rightarrow 81 \times 8 + 289 \times 4 = 49 \times 12 + 4 \times 8 \times 12 \Rightarrow$$

$$648 + 1156 = 588 + 480 \Rightarrow AD^2 = 81 \Rightarrow AD = 9$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل رسم شده، وتر مشترک‌های EF و CD بر خط‌المركزین AB عمود هستند و $CD = EF$ بنابراین چهارضلعی CEFD مستطیل است.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از مرکز O مرکز دایره‌ی محاطی به رأس A وصل می‌کنیم تا دایره را در M قطع کند آن‌گاه طول پاره‌خط AM نزدیک‌ترین نقاط دایره تا رأس قاعده‌ی کوچک دوزنقه است.
اگر شعاع دایره محاطی باشد آن‌گاه $4R^2 = AB \times DC$ پس $4R^2 = 9 \times 16$ در نتیجه $R^2 = 36$ پس $R = 6$.
حال در مثلث قائم‌الزاویه OAH می‌توان نوشت:



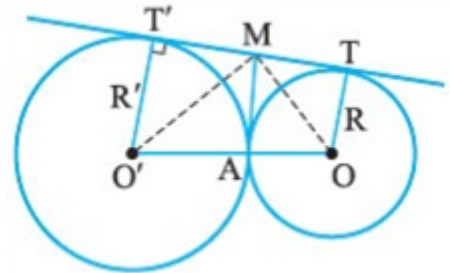
$$\left. \begin{aligned} AH &= \frac{AB}{2} = \frac{9}{2} \\ OH &= R = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow OA^2 = OH^2 + AH^2$$

$$\Rightarrow OA^2 = 36 + \frac{81}{4} = \frac{225}{4} \Rightarrow OA = \frac{15}{2}$$

$$AM = OA - OM = \frac{15}{2} - 6 = \frac{3}{2} \quad \text{بنابراین:}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

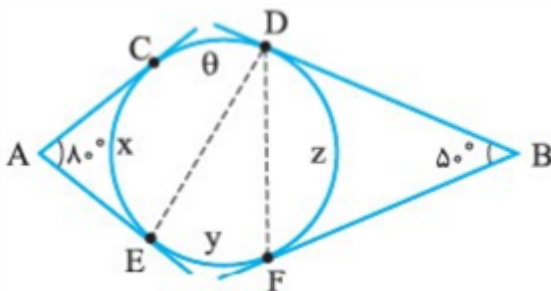
$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} = \sqrt{13^2 - (9 - 4)^2} = 12$$



اگر مماس مشترک داخلی دو دایره، مماس مشترک خارجی را در M قطع کند، آن‌گاه $O'M$ نیمساز $\widehat{MTA}$ و OM نیز نیمساز $\widehat{TMA}$ است، پس $\angle O'MO = 90^\circ$ است. اگر دایره‌ای به قطر OO' رسم شود از M همان نقطه مطلوب است. از

$$MA = MT' = MT = \frac{TT'}{2} = 6 \quad \text{طرفی:}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر کمان $\widehat{CD}$ برابر θ باشد، آن‌گاه:



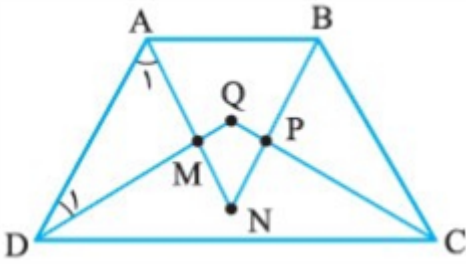
$$\widehat{A} = \frac{(\theta + z + y) - x}{2} \Rightarrow 80^\circ = \frac{60^\circ + z + y - x}{2} \Rightarrow z + y - x = 100^\circ \quad (1)$$

$$\widehat{B} = \frac{(\theta + x + y) - z}{2} \Rightarrow 50^\circ = \frac{60^\circ + x + y - z}{2} \Rightarrow x + y - z = 40^\circ \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2y = 140^\circ \Rightarrow y = 70^\circ$$

$$\widehat{EDF} = \frac{y}{2} = 35^\circ \quad \text{محاطی}$$

زاویه EDF محاطی است و برابر با نصف کمان مقابلش است. پس:



$$\begin{aligned}\widehat{A} + \widehat{D} &= 180^\circ \\ \Rightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{D}_1 &= 90^\circ \\ \Rightarrow \widehat{M} &= 90^\circ\end{aligned}$$

به صورت مشابه $\widehat{P} = 90^\circ$ و چون مجموع دو زاویه مقابل در چهارضلعی MNPQ برابر 180° است، پس این چهارضلعی محاطی است.

از طرفی مثلث‌های ABN و DQC متساوی‌الساقین و دو مثلث AMD و BPC هم‌زهشت هستند، پس:

$$MQ = QP \text{ و } MN = NP$$

در نتیجه $MQ + NP = QP + MN$ ، یعنی در چهارضلعی MNPQ مجموع دو ضلع مقابل، برابر با مجموع دو ضلع دیگر است، پس این چهارضلعی محیطی است. در نتیجه چهارضلعی هم محاطی و هم محیطی است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

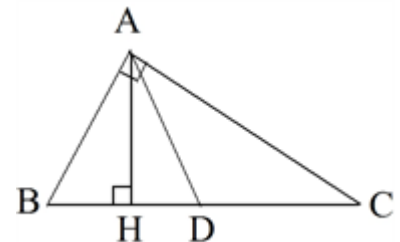
$$\triangle ABC : BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 9 = BH \times 5 \Rightarrow BH = \frac{9}{5}$$

از طرفی طبق قضیه نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث ABC داریم:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{BD}{BD + DC} = \frac{3}{4 + 3} \Rightarrow \frac{BD}{5} = \frac{3}{7} \Rightarrow BD = \frac{15}{7}$$

$$DH = BD - BH = \frac{15}{7} - \frac{9}{5} = \frac{75 - 63}{35} = \frac{12}{35}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث ABC متساوی الساقین است، بنابراین ارتفاع AH، میانه نظیر ضلع BC نیز هست و داریم:

$$\triangle AHB : AH^2 = AB^2 - BH^2 = 17^2 - 8^2 = 225 \Rightarrow AH = 15$$

اگر پای ارتفاع وارد از نقطه C بر پاره خط BD را K بنامیم، آنگاه داریم:

$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle BCD} &= \frac{1}{2} CK \times BD \\ S_{\triangle BCD} &= \frac{1}{2} DH' \times BC \end{aligned} \right\} \Rightarrow CK \times BD = DH' \times BC$$

$$\Rightarrow CK \times 25 = 15 \times 16 \Rightarrow CK = \frac{24}{5} = 9/6$$

دقت کنید که AH و DH' فاصله دو خط موازی AD و BC هستند و برابر یکدیگرند.

روش دوم:

دو مثلث ABC و BCD در قاعده BC مشترک و ارتفاع برابر دارند، پس مساحت آنها برابر است. طبق قضیه هرون داریم:

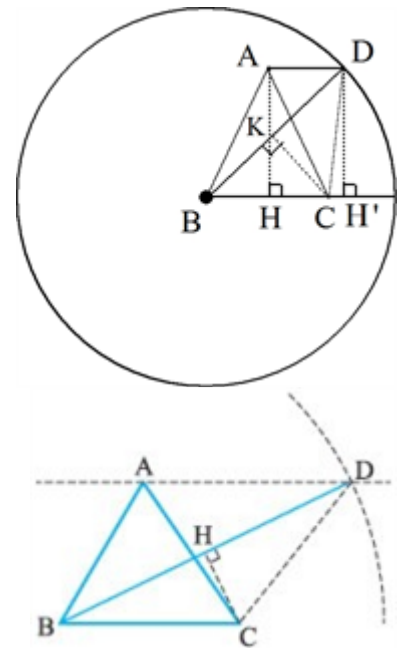
$$P = \frac{17 + 17 + 16}{2} = 25$$

$$S_{ABC} = \sqrt{25(25-17)(25-17)(25-16)}$$

$$= \sqrt{25 \times 8 \times 8 \times 9} = 5 \times 8 \times 3 = 120.$$

پس $S_{BCD} = 120$ ، اگر CH بر BD عمود باشد، داریم:

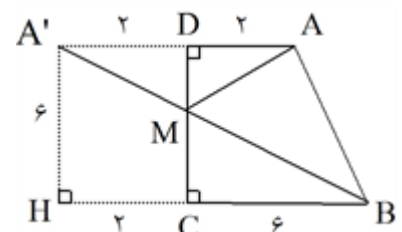
$$S_{BCD} = \frac{1}{2} BD \times CH \Rightarrow 120 = \frac{1}{2} \times 25 \times CH \Rightarrow CH = \frac{24}{5} = 9/6$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بازتاب نقطه A را نسبت به DC نقطه A' می‌نامیم، از A' به B وصل می‌کنیم تا DC را در

نقطه M قطع کند. در این صورت AMB کوتاه‌ترین مسیر است یعنی مقدار MA + MB کم‌ترین است و چون بازتاب ایزومتر است MA + MB برابر A'B است. مطابق شکل در مثلث قائم‌الزاویه A'HB می‌توان طول A'B را به دست آورد.

$$\triangle A'HB : A'B^2 = A'H^2 + BH^2 = 6^2 + 6^2 = 100 \Rightarrow A'B = 10.$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. قطر AC را رسم می‌کنیم در مثلث قائم‌الزاویه ADC می‌نویسیم:

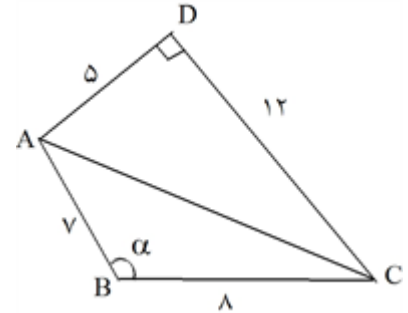
$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow AC = 13$$

حال با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث ABC می‌توان نوشت.

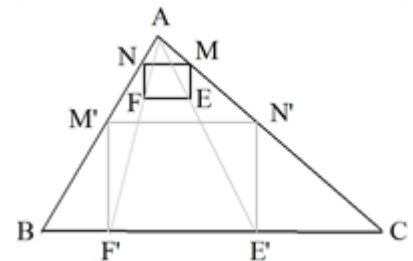
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 13^2 = 7^2 + 8^2 - 2(7)(8) \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\text{بنابراین } \alpha = 120^\circ \text{ در نتیجه } \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مربع دلخواه MNEF به طوری که MN موازی با BC باشد را مطابق شکل ترسیم می‌کنیم. از E و F وصل کرده امتداد می‌دهیم تا ضلع BC را در E' و F' قطع کند. در نقاط E' و F' عمودهایی بر BC رسم کرده تا اضلاع AC و AB را در نقاط N' و M' قطع کند در این صورت M'N'E'F' مجانس مربع MNEF به مرکز A است پس M'N'E'F' مربع مطلوب است.



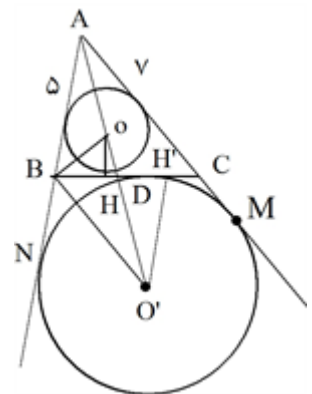
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت به طوری که O مرکز دایره محاطی داخلی و O' مرکز دایره‌ی محاطی خارجی نظیر ضلع BC است. طول HH' که تصویر قائم OO' روی ضلع BC است را باید به دست آوریم. می‌دانیم که P نصف محیط مثلث ABC برابر ۱۰ است. پس:

$$BH = P - AC = 10 - 7 = 3$$

$$AM = P = 10 \Rightarrow CM = P - AC = 3$$

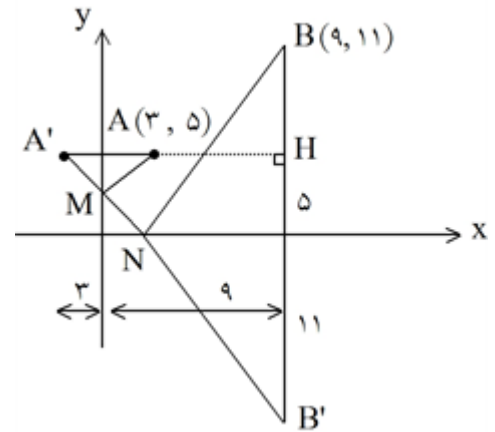
در ضمن $CM = CH'$ پس $CH' = 3$ بنابراین:

$$HH' = BC - BH - CH' \Rightarrow HH' = 8 - 3 - 3 = 2$$

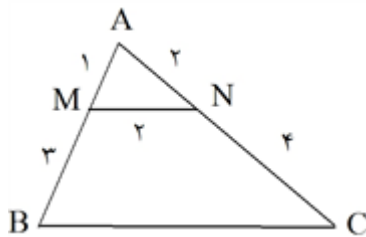


گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بازتاب نقطه‌ی A را نسبت به محور y ها نقطه‌ی A' می‌نامیم و بازتاب نقطه‌ی B را نسبت به محور x ها نقطه‌ی B' می‌نامیم از A' به B' وصل می‌کنیم تا محورهای مختصات را در M و N قطع کند در این صورت مسیر AMNB مینیمم است. چون بازتاب تبدیل ایزومتري است پس $AM = A'M$ و در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $A'HB'$ طول پاره‌خط $A'H$ برابر $12 = 9 + 3$ و طول پاره‌خط $B'H$ برابر $16 = 11 + 5$ است. بنابراین:

$$A'B' = \sqrt{A'H^2 + B'H^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} \\ = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20.$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث AMN زاویه‌ی A را به دست می‌آوریم:



$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2 AM \cdot AN \cos A$$

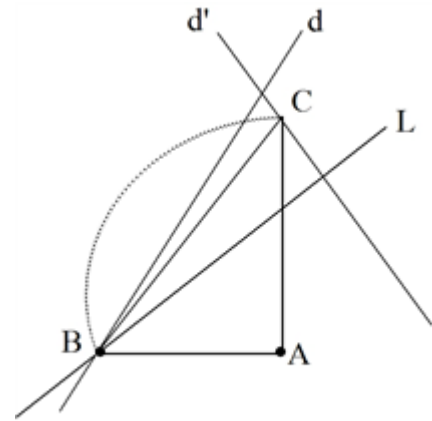
$$2^2 = 1^2 + 2^2 - 2(1)(2) \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{1}{4}$$

حال از قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث ABC استفاده می‌کنیم.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 AB \cdot AC \cos A \Rightarrow BC^2 = 1^2 + 2^2 - 2(1)(2) \left(\frac{1}{4}\right) = 4.$$

$$\Rightarrow BC = 2\sqrt{1}.$$

خط d' را به مرکز A با زاویه ۶۰° دوران می‌دهیم تا خط d را در B قطع کند سپس نقطه‌ی B را به مرکز A با زاویه ۶۰° دوران می‌دهیم تا به نقطه‌ی C روی خط d' برسیم. در این صورت مثلث ABC مثلث موردنظر است.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دو ضلعی منتظم محاط و محیط بر دایره به شعاع R متشابه‌اند و نسبت تشابه آنها

مساوی $\cos^2 \frac{180^\circ}{n}$ است پس:

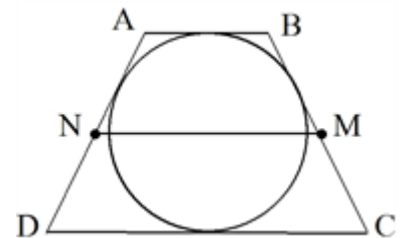
$$\frac{\text{مساحت شش ضلعی منتظم محاطی}}{\text{مساحت شش ضلعی منتظم محیطی}} = \cos^2 \frac{180^\circ}{6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{6\sqrt{3}}{S} = \frac{3}{4} \Rightarrow S = 8\sqrt{3}$$

پس مساحت شش ضلعی منتظم محیطی ۸ برابر $\sqrt{3}$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین $ABCD$ محیطی است پس $AB + DC = AD + BC$

چون $AD = BC$ در نتیجه $AB + DC = 2BC$. در ضمن اگر نقاط M و N وسط‌های دو ساق دوزنقه باشد آن‌گاه بنابر

قضیه‌ی میان خط در دوزنقه $MN = \frac{AB + DC}{2}$. پس نتیجه می‌گیریم $MN = BC$.



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر از مرکز دایره به نقاط A و B وصل کنیم آن‌گاه مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است پس

اندازه‌ی کمان AB برابر ۶۰° است. از طرف دیگر می‌دانیم کمان‌های بین دو وتر موازی مساویند پس $\widehat{AC} = \widehat{BD}$. در ضمن

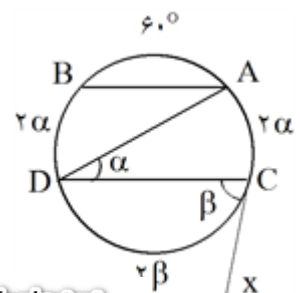
زاویه‌ی $\widehat{DCx}$ ظلی است پس $\widehat{DC} = 2\beta$ در نتیجه:

$$\widehat{AC} + \widehat{BD} + \widehat{DC} + \widehat{AB} = 360^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\alpha + 2\beta + 60^\circ = 360^\circ$$

$$\xrightarrow{\beta=2\alpha} 4\alpha = 300^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{300^\circ}{4}$$

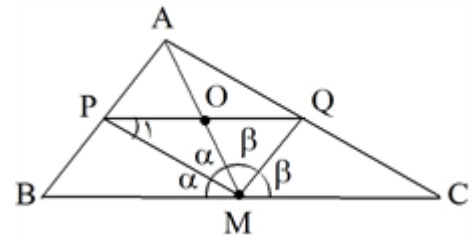
$$\widehat{BD} = 2\alpha = 2 \left(\frac{300^\circ}{4} \right) = \frac{300^\circ}{2} = 150^\circ$$

پس:



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت:

۹۰



بنابر قضیه‌ی نیم‌ساز می‌نویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AMB : \text{نیمساز } MP \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{AM}{BM} \\ \triangle AMC : \text{نیمساز } MQ \Rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{AM}{MC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{QC} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} PQ \parallel BC$$

در نتیجه:

$$PQ \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه خطوط موازی و مورب}} \hat{P}_1 = \alpha \Rightarrow OM = OP$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تبدیل یافته‌ی نقطه‌ی دلخواه (x, y) تحت تجانسی به مرکز $(2, 1)$ و ضریب $\frac{2}{3}$ به راحتی

۹۱

چنین است:

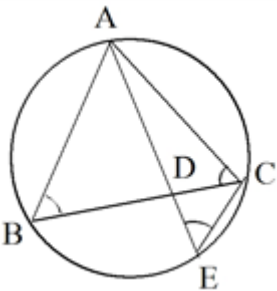
$$\begin{cases} x' - 2 = \frac{2}{3}(x - 2) & x' = \frac{2}{3}x - 1 \\ y' - 1 = \frac{2}{3}(y - 1) & y' = \frac{2}{3}y - \frac{1}{3} \end{cases}$$

از این دو معادله، x و y را محاسبه کرده در معادله خط جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{2}(x' + 1) \xrightarrow{2y+x=6} \frac{3}{2}\left(y' + \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2}(x' + 1) = 6 \\ y &= \frac{3}{2}\left(y' + \frac{1}{3}\right) \\ \Rightarrow \frac{3}{2}y' + \frac{3}{2}x' + \frac{3}{2} &= 6 \Rightarrow 3y' + 3x' + 3 = 12 \Rightarrow 3y' + 3x' = 9 \Rightarrow y' + x' = 3 \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۹۲



$$\begin{aligned} \hat{E} = \hat{B} &= \text{رو به روی یک کمان} = \frac{\widehat{AC}}{2} \\ \Rightarrow \hat{E} = \hat{B} = \hat{C} &\Rightarrow \triangle ADC \sim \triangle AEC \\ \begin{cases} \widehat{DAC} = \widehat{EAC} \\ \hat{E} = \hat{C} \end{cases} \\ \Rightarrow \frac{AD}{AC} &= \frac{AC}{AE} \end{aligned}$$

$$AD \times AE = AC^2 \xrightarrow{AC=AB} AD \times AE = AB^2$$

93

(۱) محیط $\triangle ABC$:

$$AF = AE$$

چون نقطه‌ی A روی یک دایره بیرونی در حرکت است مقدار AE همواره ثابت است. این مقدار ثابت بنا به قضیه‌ی

فیتاغورت برابر با $\sqrt{R^2 - r^2}$ است. (قوت نقطه A نسبت به دایره کوچکتر)

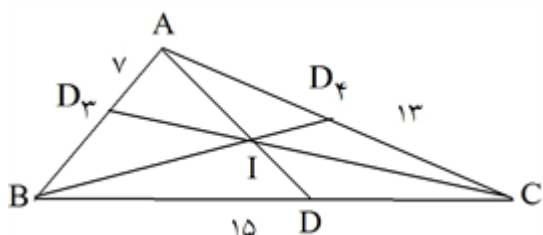
این یعنی محیط $\triangle ABC$ ثابت است.

اگر D را ثابت نگه داریم و A را به طرف امتداد BC حرکت دهیم، مساحت $\triangle ABC$ به صفر نزدیک می‌شود. می‌توانیم حتی

A را ثابت نگه داریم و D را به طرف F حرکت دهیم و مساحت $\triangle ABC$ به صفر میل کند.

این یعنی مساحت نه نسبت به A ثابت و نه D ثابت، عددی یکتا نیست. هر طور بگیری مساحت متغیر است.

94



$$\frac{BD}{DC} = \frac{v}{13} \Rightarrow DC = \frac{13}{2} \times 10 = \frac{39}{1}$$

$$\frac{DI}{IA} = \frac{DC}{AC} = \frac{\frac{39}{4}}{13} = \frac{3}{4}$$

نکته: این نسبت در مثلثی به اضلاع a, b, c که c ضلع بزرگتر باشد برابر است با: $\frac{c}{a+b}$. در این مسئله $\frac{15}{7+13} = \frac{3}{4}$.

95

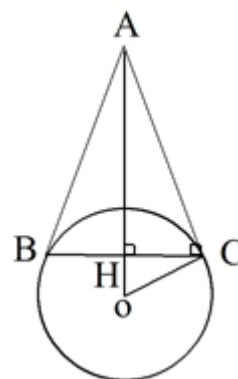
متساوی الساقین ارتفاع میانه است بنابراین $CH = 3$ در مثلث قائم الزاویه AHC نتیجه می‌گیریم.

$$AC^r = AH^r + HC^r = \mathfrak{r}^r + \mathfrak{r}^r = \mathfrak{r}\mathfrak{o} \Rightarrow AC = \mathfrak{o}$$

بنابر روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه AOC داریم:

$$\text{CH}^r = \text{AH} \times \text{OH} \Rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{r} \cdot H \Rightarrow \text{OH} = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{r}}$$

$$\overset{\Delta}{OHC} : OC^r = CH^r + OH^r = 9 + \frac{11}{18} = \frac{225}{18} \Rightarrow OC = \frac{15}{2} = 7.5$$



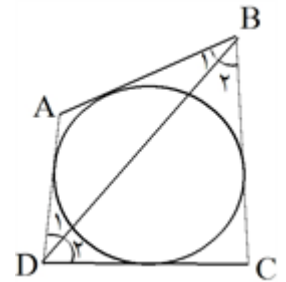
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چهار ضلعی ABCD محیطی است پس $AB + DC = AD + BC$ بنابراین
 $DC - BC = AD - AB$ چون AB کوچکترین ضلع است پس $AD - AB$ مثبت است بنابراین $DC - BC$ مثبت می‌باشد
 پس $DC > BC$.
 اگر قطر BD را رسم کنیم خواهیم داشت:

$$\triangle ABD : AB < AD \Rightarrow \widehat{D}_1 < \widehat{B}_1 \quad (1)$$

$$\triangle BCD : BC < DC \Rightarrow \widehat{D}_2 < \widehat{B}_2 \quad (2)$$

از جمع روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

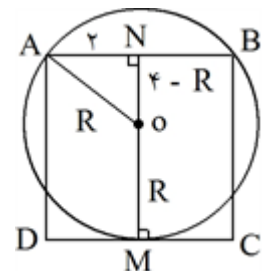
$$\widehat{D} < \widehat{B}$$



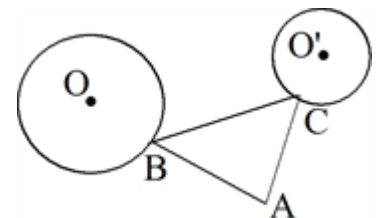
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرض کنیم دایره‌ی گذرا از دو رأس A و B در نقطه‌ی M بر ضلع DC مماس باشد. در این صورت اگر O مرکز دایره باشد آن‌گاه OM بر DC و امتداد آن بر AB عمود خواهد بود در مثلث قائم‌الزاویه OAN فیثاغورس را می‌نویسیم.

$$OA^2 = AN^2 + ON^2 \Rightarrow R^2 = 2^2 + (4 - R)^2 \Rightarrow R^2 = 4 + 16 - 8R + R^2$$

$$\Rightarrow R = \frac{20}{8} = 2.5$$

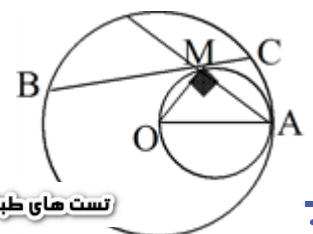


گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین مثلث مطلوب باشد آن‌گاه نقاط B و C دوران یک‌دیگر به مرکز A و زاویه‌ی ۹۰ درجه هستند بنابراین دوران برای این رسم قابل استفاده است.



گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. اگر از نقطه‌ی M به نقاط O و A وصل کنیم در این صورت زاویه‌ی M قائمه خواهد بود زیرا محاطی روبه‌رو به قطر می‌باشد چون OM عمود بر وتر AD است پس $MA = MD$ داریم:

$$MB \times MC = MA \times MD \xrightarrow{MA=MD} MB \times MC = MA^2$$



از نقاط B و C به نقطه‌ی تلاقی دوم دو دایره یعنی N وصل می‌کنیم.

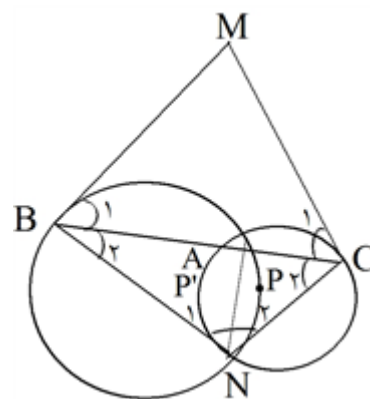
$$\widehat{N}_1 + \widehat{N}_r = \frac{\widehat{AB}}{r} + \frac{\widehat{AC}}{r} = \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 180^\circ - \widehat{M} \quad (1)$$

از طرفی در مثلث BNC داریم:

$$\widehat{N}_1 + \widehat{N}_r = 180^\circ - (\widehat{B}_r + \widehat{C}_r)$$

$$= 180^\circ - \left(\frac{\widehat{APN}}{r} + \frac{\widehat{AP'N}}{r} \right) = 180^\circ - \text{مقدار ثابت} \quad (2)$$

$$\Rightarrow 180^\circ - \widehat{M} = 180^\circ - \text{مقدار ثابت} \Rightarrow \widehat{M} = \text{مقدار ثابت} \quad (1) \text{ و } (2)$$



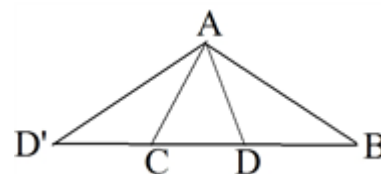
گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. نیمساز زاویه داخلی و خارجی یک رأس مثلث بر هم عمودند پس مثلث ADD' قائم‌الزاویه است.

$$AD \Rightarrow \frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}} \frac{DC}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow DC = 4$$

$$AD' \Rightarrow \frac{D'C}{D'B} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{تفضیل}} \frac{D'C}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow D'C = 4$$

$$\Rightarrow DD' = DC + D'C = 8$$

$$\triangle ADD' : AD^2 + AD'^2 = DD'^2 = 8^2 = 64$$



گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. ارتفاع وارد بر وتر را h و طول وتر را a در نظر می‌گیریم داریم:

$$S = \frac{1}{2} a^2 \Rightarrow \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} a^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} a$$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{2}a$ و وتر باشد زوایای حاده‌ی آن‌ها 45° یا 45° می‌باشند.



گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. دو مثلث MBA و DBC متشابه‌اند. چون: ۱۰۳

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A} &= \widehat{C} = \frac{\widehat{BD}}{r} \\ \widehat{B}_1 &= \frac{\widehat{AE}}{r} \\ \widehat{B}_r &= \frac{\widehat{CD}}{r} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\widehat{AE}=\widehat{CD}} \widehat{B}_1 = \widehat{B}_r \Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle DBC \Rightarrow \frac{AM}{CD} = \frac{AB}{BC}$$

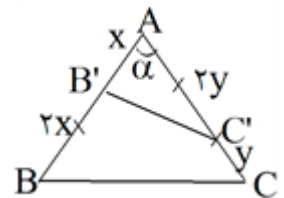
$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{6}{8} \Rightarrow x = 2/25$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. دو دایره‌ی $C(O, R)$, $C'(O', R')$ در حالتی که $|R - R'| < OO' < R + R'$ باشد با هم متقاطع هستند. با توجه به این که رابطه‌ی $\sqrt{5} + \sqrt{2} < 1 < \sqrt{5} - \sqrt{2}$ برقرار است، بنابراین دو دایره‌ی داده شده متقاطع هستند.

تذکر: $\sqrt{5} - \sqrt{2} = 0/8$ بنابراین $\sqrt{5} = 2/2$, $\sqrt{2} = 1/4$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب طول دو ضلع مجاور در سینوس زاویه‌ی بین آن‌ها، بنابراین داریم: ۱۰۵

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{\frac{1}{2}(3x)(2y) \sin \alpha}{\frac{1}{2}x(2y) \sin \alpha} = \frac{9}{2}$$



گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. از آن‌جا که $R_1 + R_r = \frac{13}{12}d$ و $|R_1 - R_r| = \frac{5}{12}d$ ، بنابراین: ۱۰۶

$$\left. \begin{aligned} R_1 + 2R_r &= \frac{11}{6}d \\ 2R_1 + 2R_r &= 4d \end{aligned} \right\} \rightarrow R_1 = \frac{d}{3}, R_r = \frac{2}{3}d$$

و در نتیجه دو دایره متقاطع‌اند و دو خط مماس (خارجی) برای آن‌ها وجود دارد.

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. ۱۰۷

فقط دو مماس مشترک (خارجی) وجود دارد $\rightarrow$ دو دایره متقاطع‌اند $\rightarrow 3 - 2 < \sqrt{5} < 3 + 2$

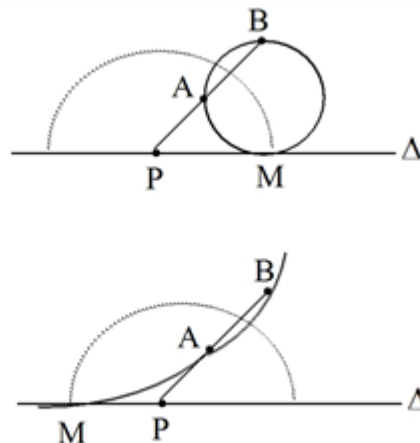


۱۰۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در شکل، صورت مساله از نقطه P پاره خط قاطع PAB و مماس PD بر دایره ای کوچک رسم

شده است بنابراین: $PD^2 = PA \cdot PB$ (۱)

حال دایره ای را در نظر می گیریم که از نقاط ثابت A و B بگذرد و بر خط Δ در نقطه M مماس باشد. مطابق شکل های داده شده، با این شرایط باز هم پاره خط PAB قاطع این دو دایره است، بنابراین $PM^2 = PA \cdot PB$ و در نتیجه با توجه به رابطه ی (۱) داریم $PD = PM$. از آنجا که PD شعاع نیم دایره ی خط چین بود پس PM نیز برابر با شعاع همان دایره خواهد بود، یعنی M یکی از نقاط C یا C' است.



۱۰۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. DN نیمساز زاویه ی D در مثلث ADC است و در نتیجه ضلع AC را به نسبت اضلاع

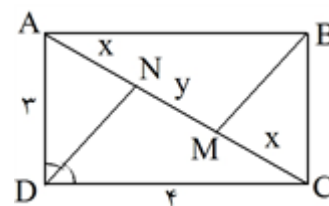
زاویه ی D تقسیم می کند، یعنی داریم:

$$\frac{AN}{NC} = \frac{DA}{DC} \rightarrow \frac{x}{y+x} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{x}{y+x+x} = \frac{3}{4+3}$$

$$\xrightarrow{y+2x=AC=5} \frac{x}{5} = \frac{3}{7} \rightarrow x = \frac{15}{7}$$

$$MN = y = AC - 2x = 5 - 2\left(\frac{15}{7}\right) \rightarrow MN = \frac{5}{7}$$

(توجه کنید که $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$)



۱۱۰

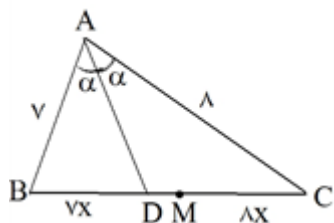
گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} x+y=8 \\ x+z=9 \\ y+z=13 \end{array} \right\} \xrightarrow{\oplus} 2(x+y+z)=30 \rightarrow x+y+z=15$$

بنابراین: $x=2$ و $y=6$ و $z=7$ می باشد، در نتیجه: $\frac{x}{y} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

۱۱۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. توجه کنید که زاویه‌ی بزرگ‌تر، مقابل به ضلع بزرگ‌تر است. حال با توجه به این‌که نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع کناری خود تقسیم می‌کند، پس $BD = vx$ و $DC = \lambda x$ می‌باشد و در نتیجه:



$$vx + \lambda x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} BD = \frac{28}{5} \\ DC = \frac{32}{5} \end{cases}$$

$$MD = BM - BD = 6 - \frac{28}{5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

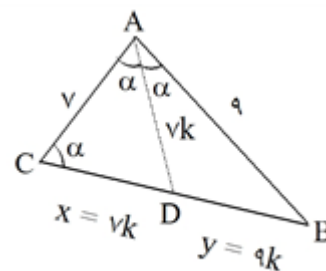
و از طرفی $BM = MC = 6$ می‌باشد، پس:

۱۱۲

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. اگر نیمساز زاویه‌ی A را رسم کنیم و قطعات ایجاد شده بر ضلع BC به ترتیب x و y باشند، آن‌گاه چون نیمساز، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع تقسیم می‌کند، خواهیم داشت $x = vk$ و $y = 9k$. از طرفی چون مثلث ADC متساوی‌الساقین است، پس $AD = CD$ خواهد شد. همچنین می‌دانیم اگر AD نیمساز زاویه‌ی A در مثلث ABC باشد، آن‌گاه:

$$AD^2 = AC \cdot AB - CD \cdot DB \rightarrow (vk)^2 = v \times 9 - (vk)(9k) \rightarrow 49k^2 + 63k^2 = 63$$

$$\rightarrow 112k^2 = 63 \rightarrow k^2 = \frac{9}{16} \rightarrow k = \frac{3}{4} \rightarrow BC = x + y = 16k = 16\left(\frac{3}{4}\right) = 12$$



۱۱۳

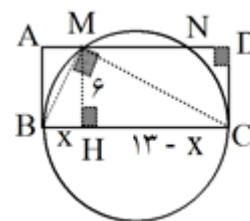
گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مثلث MBC در راس M قائمه است چون BC قطر دایره است و زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر 90° است، حال در مثلث قائم‌الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، واسطه‌ی هندسی بین دو قطعه‌ی ایجاد شده بر وتر است، بنابراین:

$$6^2 = x(13 - x) \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 9 \end{cases}$$

بنابراین قطعه‌ی کوچک‌تر یعنی $BH = 4$ می‌باشد و در نتیجه $AM = 4$ و به همین ترتیب $ND = 4$ و در

$$MN = 13 - (4 + 4) = 5$$

نتیجه:



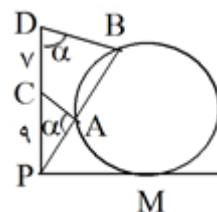
۱۱۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو مثلث PAC و PDB با دو زاویه‌ی برابر متشابه‌اند، بنابراین:

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \rightarrow \frac{PA}{9+7} = \frac{9}{PB} \rightarrow PA \cdot PB = 9 \times 16$$

از طرفی PM مماس بر دایره و PAB قاطع است، بنابراین:

$$PA \cdot PB = PM^2 \rightarrow PM^2 = 9 \times 16 \rightarrow PM = 3 \times 4 = 12$$

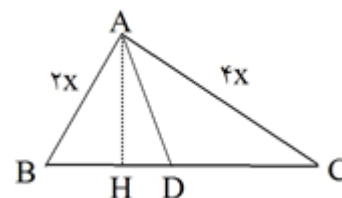


۱۱۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق شکل نیمساز داخلی یک زاویه، ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع زاویه تقسیم می‌کند،

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2x}{4x} = \frac{1}{2} \Rightarrow DC = 2BD$$

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AH \times BD}{\frac{1}{2}AH \times BC} = \frac{BD}{BD + DC} = \frac{BD}{BD + 2BD} = \frac{1}{3}$$

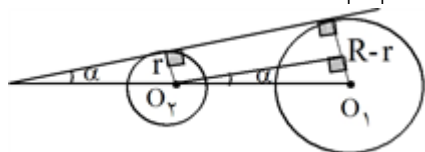


۱۱۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر شعاع دایره‌ها را r و R و زاویه‌ی بین مماس مشترک و خط‌المرکزین را α فرض کنیم،

$$\sin \alpha = \frac{R-r}{O_1 O_2} \xrightarrow{\alpha=30^\circ} \frac{1}{2} = \frac{30-7/5}{O_1 O_2} \rightarrow O_1 O_2 = 45$$

مطابق شکل خواهیم داشت:

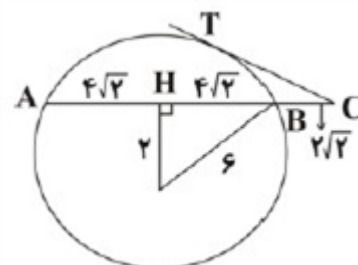


۱۱۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. شعاع دایره برابر ۶ واحد است، بنابراین $BH = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$ طبق قضیه‌ی مماس و

قاطع داریم:

$$CT = \sqrt{CB \cdot CA} = \sqrt{4\sqrt{2} \times 10\sqrt{2}} = 2\sqrt{20}$$



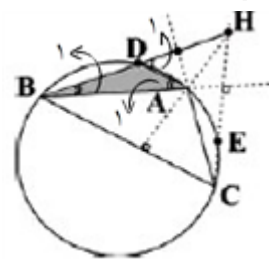
۱۱۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اضلاع زاویه ی AHD بر اضلاع زاویه ی ACB عمود است، بنابراین این دو زاویه برابرند.

$$\widehat{AHD} = \widehat{ACB} = \frac{\widehat{AD}}{2} + \frac{\widehat{BD}}{2} = \widehat{B}_1 + \widehat{A}_1 = \widehat{D}_1 = \widehat{ADH}$$

دقت کنید که D_1 در مثلث $\triangle ADB$ زاویه ی خارجی است. بنابراین برابر با مجموع دو زاویه ی داخلی غیرمجاور با خودش

می باشد.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۱۹

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A \rightarrow 16 = \frac{1}{2} \times 8 \times 5 \times \sin A \rightarrow \sin A = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos A = \frac{3}{5}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \rightarrow a^2 = 64 + 25 - 2(8)(5)\left(\frac{3}{5}\right) = 41 \rightarrow a = \sqrt{41}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو مثلث $\triangle OAE$ و $\triangle OCD$ مساویند پس $OE = OD$ و از طرفی $\angle AOC = 120^\circ$ پس $\angle EOD = 120^\circ$ بنابراین گزینه های ۱ و ۳ و ۴ درست هستند و در نتیجه گزینه ۲ غلط می باشد.

۱۲۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۱۲۱

$$\left. \begin{array}{l} AB = AC \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \Rightarrow \widehat{A} = 2\widehat{B} \text{ زاویه خارجی} \\ \widehat{A} = \frac{\widehat{AB}}{2} \text{ زاویه محاطی و } \widehat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\widehat{AB}}{2} = \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{AB} = 2\widehat{AD} \quad (1)$$

از طرفی $\widehat{DMB} = 222^\circ$ پس $\widehat{BAD} = 360^\circ - 222^\circ = 138^\circ$ پس $\widehat{AB} + \widehat{AD} = 138^\circ$ از (۱) داریم:

$$2\widehat{AD} + \widehat{AD} = 138^\circ \Rightarrow \widehat{AD} = 46^\circ \Rightarrow \widehat{B} = \frac{\widehat{AD}}{2} = 23^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 23^\circ$$

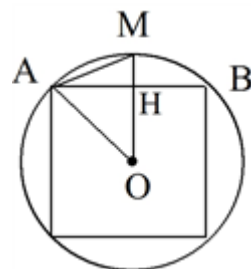
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۲۲

از O به A و M وصل می کنیم. مثلث $\triangle OAH$ قائم الزاویه متساوی الساقین است. از طرفی قطر مربع با قطر دایره برابر است

$$MH = OM - OH = \sqrt{2} - 1 \text{ پس } OM = \sqrt{2} \text{ در نتیجه } R = \sqrt{2} \text{ و } 2R = a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\triangle AHM : AM^2 = MH^2 + AH^2 \Rightarrow AM^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 + 1 = 4 - 2\sqrt{2} \Rightarrow AM = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$



$\triangle OAB : OA = OB = R, \widehat{AOB} = 60^\circ \Rightarrow$ متساوی الاضلاع $\Rightarrow AB = R$

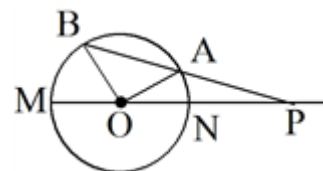
$$PM = 2R \Rightarrow PN = 2R - 2R = R$$

$$PA \times PB = PN \times PM$$

$$PA = x \Rightarrow x(x + R) = 2R^2 \Rightarrow x^2 + Rx - 2R^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4 \cdot 2R^2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{13} - 1}{2}$$

منفی غیر قابل قبول

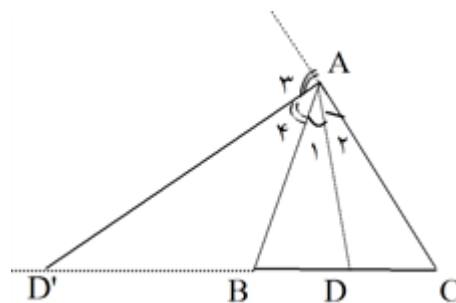


گزینه ۳ پاسخ صحیح است. (AB = 6, AC = 8, BC = 5) ۱۲۴

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{5 - DB} = \frac{6}{8} \Rightarrow DB = \frac{15}{7}$$

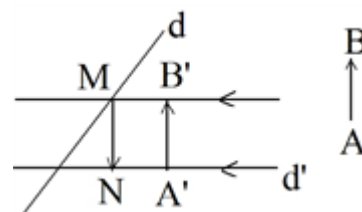
$$\widehat{A_2} = \widehat{A_3} \Rightarrow \frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{D'B}{5 - D'B} = \frac{6}{8} \Rightarrow D'B = 15$$

$$DD' = D'B + BD = 15 + \frac{15}{7} = \frac{120}{7}$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل یک نقطه از خط d' مثل A' را با بردار AB انتقال می‌دهیم تا به نقطه‌ی B' برسیم و از آن‌جا خطی موازی d' رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌ی M قطع کند. حال نقطه‌ی M را با بردار BA انتقال می‌دهیم تا نقطه‌ی N واقع بر خط d' حاصل می‌شود. اکنون پاره خط MN همان پاره خطی است که دو سر آن روی دو خط متقاطع d و d' واقع است و موازی و مساوی AB نیز می‌باشد (زیرا چهارضلعی $MB'A'N$ متوازی الاضلاع است). توجه کنید که دوران ممکن است شیب خط و تجانس ممکن است طول پاره خطها را تغییر دهد و به همین دلیل گزینه‌های ۳ و ۴ از ابتدا به راحتی حذف می‌شوند. ۱۲۵

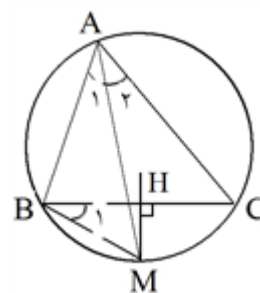
برسیم و از آن‌جا خطی موازی d' رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌ی M قطع کند. حال نقطه‌ی M را با بردار BA انتقال می‌دهیم تا نقطه‌ی N واقع بر خط d' حاصل می‌شود. اکنون پاره خط MN همان پاره خطی است که دو سر آن روی دو خط متقاطع d و d' واقع است و موازی و مساوی AB نیز می‌باشد (زیرا چهارضلعی $MB'A'N$ متوازی الاضلاع است). توجه کنید که دوران ممکن است شیب خط و تجانس ممکن است طول پاره خطها را تغییر دهد و به همین دلیل گزینه‌های ۳ و ۴ از ابتدا به راحتی حذف می‌شوند.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دایره‌ی محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. نقطه‌ی M روی این دایره قرار دارد.

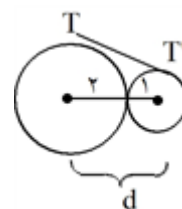
$$A_1 = \frac{180 - (B+C)}{2} = 35$$

محاطی روبروی یک کمان $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1 = 35$

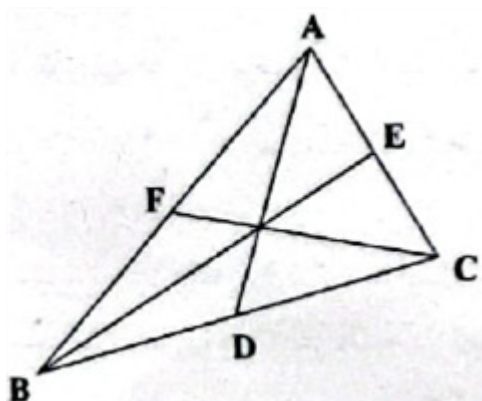


گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{r^2 - (r - 1)^2} = \sqrt{1} = r\sqrt{r}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اضلاع مثلث a، b و c است. بنابر قضیه میانه‌ها می‌نویسیم:



$$AD^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

$$BE^2 = \frac{1}{4}(2c^2 + 2a^2 - b^2)$$

$$CF^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

$$\Rightarrow AD^2 + BE^2 + CF^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2c^2 + 2a^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

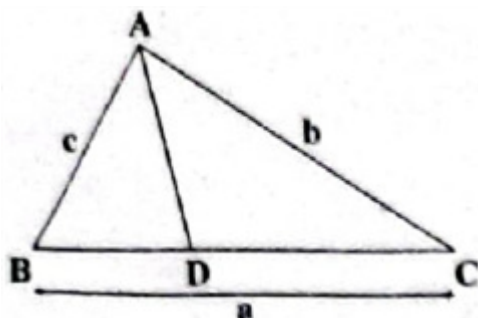
$$= \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2) = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2)$$

$$\Rightarrow (AD^2 + BE^2 + CF^2) \div (2a^2 + 2b^2 + 2c^2) = \frac{1}{4}$$

راه دوم: می‌دانیم همواره رابطه $\frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$ بین طول میانه‌ها و اضلاع مثلث ABC برقرار است

$$\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{4}$$

پس:



$$\begin{aligned}\widehat{B} = r\widehat{C} &\Rightarrow \sin \widehat{B} = \sin r\widehat{C} \Rightarrow \sin \widehat{B} = r \sin \widehat{C} \cos \widehat{C} \\ &\Rightarrow \frac{b}{rR} = \frac{rc}{rR} \times \cos \widehat{C} \Rightarrow b = rc \times \frac{a^r + b^r - c^r}{r ab} \\ &\Rightarrow rab^r = rc(a^r + b^r - c^r) \Rightarrow ab^r = ca^r + cb^r - c^r\end{aligned}$$

$$\Rightarrow b^r(a - c) = c(a^r - c^r) \Rightarrow b^r = c(a + c) \quad (1)$$

$$CD = AB \Rightarrow CD = c \Rightarrow BD = a - c$$

$$\text{بنا به قضیه نیمسازها} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{a - c}{c} \Rightarrow c^r = ab - bc \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow b^r = ca + c^r \Rightarrow b^r - ac = c^r \quad (3)$$

$$(3), (2) \Rightarrow b^r - ac = ab - bc \Rightarrow b^r + bc = ab + ac \Rightarrow b(b + c) = a(b + c) \Rightarrow a = b$$

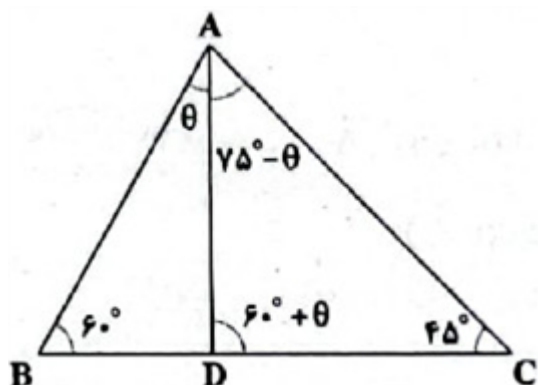
$$\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = r\widehat{C} \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow r\widehat{C} + r\widehat{C} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 36^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 72^\circ$$

$$\begin{aligned}\cos \widehat{B} &= \frac{c^r + a^r - b^r}{rac} = \frac{(\sqrt{r} - 1)^r + r^r - (\sqrt{r})^r}{r(r)(\sqrt{r} - 1)} = \frac{r + 1 - r\sqrt{r} + r - r}{r(\sqrt{r} - 1)} \\ &= \frac{r - r\sqrt{r}}{r(\sqrt{r} - 1)} = \frac{-r(\sqrt{r} - 1)}{r(\sqrt{r} - 1)} = -\frac{1}{r} \Rightarrow \cos \widehat{B} = -\frac{1}{r} \Rightarrow \widehat{B} = 120^\circ\end{aligned}$$

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{B}$$

$$\begin{aligned}rac \sin \left(\frac{\widehat{A} - \widehat{B} + \widehat{C}}{r} \right) &= rac \sin \left(\frac{180^\circ - \widehat{B} - \widehat{B}}{r} \right) = rac \sin (90^\circ - \widehat{B}) = rac \cos \widehat{B} \\ &= rac \times \frac{a^r + c^r - b^r}{rac} = a^r + c^r - b^r\end{aligned}$$

بنا به قضیه کسینوس‌ها:



$$\triangle BAD : \frac{BD}{\sin \theta} = \frac{AD}{\sin 60^\circ} \Rightarrow AD = \frac{BD \cdot \sin 60^\circ}{\sin \theta} \quad (1)$$

$$\triangle CAD : \frac{CD}{\sin (75^\circ - \theta)} = \frac{AD}{\sin 45^\circ} \Rightarrow AD = \frac{CD \cdot \sin 45^\circ}{\sin (75^\circ - \theta)} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{BD \cdot \sin 60^\circ}{\sin \theta} = \frac{CD \cdot \sin 45^\circ}{\sin (75^\circ - \theta)} \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\sin (75^\circ - \theta)} = \frac{BD \cdot \sin 60^\circ}{CD \cdot \sin 45^\circ} \Rightarrow$$

$$\frac{\sin \widehat{BAD}}{\sin \widehat{CAD}} = \frac{1}{r} \times \frac{\frac{\sqrt{r}}{r}}{\frac{\sqrt{r}}{r}} = \frac{\sqrt{r}}{r\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r}}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۳۳

$$(a+b+c)(a-b+c) = 3ac \Rightarrow (a+c)^2 - b^2 = 3ac$$

$$\Rightarrow a^2 + c^2 - b^2 = 3ac - 3ac$$

$$\frac{a^2 + c^2 + b^2}{3ac} = \frac{ac}{3ac}$$

طرفین را بر $3ac$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a^2 + c^2 + b^2}{3ac} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{1}{3} \Rightarrow \hat{B} = \frac{\pi}{3}$$

بنابه قضیه کسینوس‌ها:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه کسینوس‌ها $\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ و $\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ داریم. ۱۳۴

$$a(b \cos \hat{C} - c \cos \hat{B}) = ab \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) - ac \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (a^2 + b^2 - c^2 - a^2 - c^2 + b^2) = \frac{1}{2} (2b^2 - 2c^2) = b^2 - c^2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۳۵

با استفاده از قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = k \Rightarrow \frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 75^\circ} = \frac{c}{\sin 60^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{b}{\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = k \Rightarrow a + c\sqrt{2} = \frac{k}{\sqrt{2}} + \left(\frac{k\sqrt{3}}{2} \right) \sqrt{2}$$

$$= \frac{k}{\sqrt{2}} + \left(\frac{k\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right) = 2 \times \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right) \times k = 2b$$

$$\sin 75^\circ = \sin (30^\circ + 45^\circ) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

تذکر:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر قضیه کسینوس‌ها $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ پس $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ داریم. ۱۳۶

$$bc = 2b^2 \cos \hat{A} + 2c^2 \cos \hat{A} - 2bc \cos \hat{A} \Rightarrow bc = 2 \cos \hat{A} (b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A})$$

$$\Rightarrow bc = 2 \cos \hat{A} (a^2)$$

$$\frac{bc}{2a^2} = \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Rightarrow b^2 c^2 = a^2 (b^2 + c^2 - a^2)$$

$$\Rightarrow b^2 c^2 - a^2 b^2 - a^2 c^2 + a^4 = 0 \Rightarrow -b^2 (a^2 - c^2) + a^2 (a^2 - c^2) = 0$$

$$\Rightarrow (a^2 - c^2)(a^2 - b^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ \text{یا} \\ a = c \end{cases}$$

در این صورت مثلث قطعاً متساوی‌الساقین است و در حالتی که $a = b = c$ باشد، متساوی‌الاضلاع خواهد بود.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۳۷

$$(a-b)^2 \cos^2 \frac{\hat{C}}{2} + (a+b)^2 \sin^2 \frac{\hat{C}}{2} = (a-b)^2 \frac{(1+\cos \hat{C})}{2} + (a+b)^2 \frac{(1-\cos \hat{C})}{2}$$

$$= \frac{1}{2} [(a-b)^2 + (a+b)^2] \cos \hat{C} = a^2 + b^2 + \frac{1}{2} (-2ab \cos \hat{C})$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} = c^2$$

نکته: از روابط مثلثاتی $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ و $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ و $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$ استفاده کرده‌ایم.

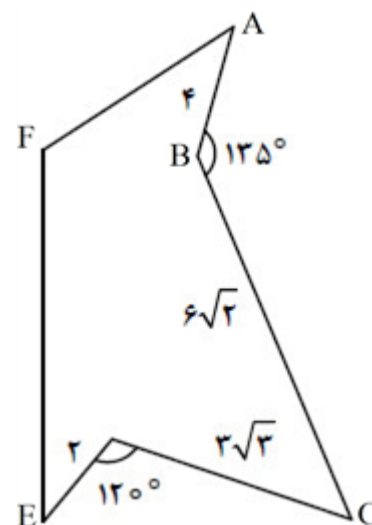
۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر مسئله همپیرامونی میزان افزایش مساحت برابر $2S_{ABC} + 2S_{DEC}$ است.

$$2S_{ABC} = 2 \left(\frac{1}{2} AB \times BC \sin 135^\circ \right) = 4 \times 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 24$$

$$2S_{DEC} = 2 \left(\frac{1}{2} DE \times DC \sin 120^\circ \right) = 2 \times 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9$$

بنابراین میزان افزایش مساحت برابر $24 + 9 = 33$ است.



۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر مسئله کتاب درسی هندسه یازدهم فصل ۳ پاره خط PQ موازی BC است. پس:

$$\triangle ABC : PQ \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AP}{AC} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{PQ}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{PQ}{BC} = \frac{1}{4} \quad (1)$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیه نیمساز می‌نویسیم:

$$\triangle AMC : MP \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow MC = 3AM$$

$$\triangle AMC : MP \text{ نیمساز} \Rightarrow MP^2 = AM \times MC - AP \times PC$$

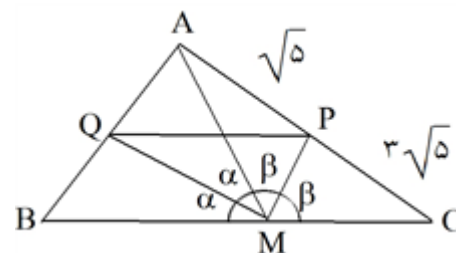
$$\Rightarrow \sqrt{33}^2 = AM \times 3AM - (\sqrt{5})(3\sqrt{5}) \Rightarrow 33 = 3AM^2 - 15 \Rightarrow 11 = AM^2 - 5$$

$$\Rightarrow AM^2 = 16 \Rightarrow AM = 4 \Rightarrow MC = 12 \Rightarrow BC = 24 \xrightarrow{\text{از (1)}} \frac{PQ}{24} = \frac{1}{4} \Rightarrow PQ = 6$$

در ضمن MP و MQ نیمساز زاویه‌های AMC و AMB هستند پس: $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ پس: $\alpha + \beta = 90^\circ$.

در نتیجه مثلث MPQ قائم‌الزاویه است. بنابراین:

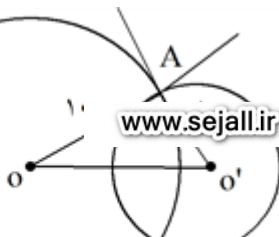
$$PQ^2 = MP^2 + MQ^2 \Rightarrow 6^2 = \sqrt{33}^2 + MQ^2 \Rightarrow MQ^2 = 36 - 33 = 3 \Rightarrow MQ = \sqrt{3}$$



۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مماس‌های رسم شده در نقطه تلاقی دو دایره به مراکز O و O' یعنی A بر هم عمودند. پس

این مماس‌ها از مراکز دو دایره عبور می‌کنند. در نتیجه در مثلث OAO' که قائم‌الزاویه است. می‌نویسیم:



تست های طبقه بندی شده و فصل به فصل کنکور سراسری همراه با پاسخ کامل تشریحی

$$oAo' : oo'' = oA' + o'A = 11' + 15' = 26' \Rightarrow oo' = 17$$

۱



پاسخنامه کلیدی

توجه کنید خط مماس بر دایره در نقطه تماس بر شعاع دایره عمود است به همین علت هر کدام از این مماس‌ها از

کتاب درج ۱ عبور می‌کند.

۱	۱	۲	۳	۴	۳۳	۱	۲	۳	۴	۶۵	۱	۲	۳	۴	۹۷	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴	۳۴	۱	۲	۳	۴	۶۶	۱	۲	۳	۴	۹۸	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴	۳۵	۱	۲	۳	۴	۶۷	۱	۲	۳	۴	۹۹	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴	۳۶	۱	۲	۳	۴	۶۸	۱	۲	۳	۴	۱۰۰	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴	۳۷	۱	۲	۳	۴	۶۹	۱	۲	۳	۴	۱۰۱	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴	۳۸	۱	۲	۳	۴	۷۰	۱	۲	۳	۴	۱۰۲	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴	۳۹	۱	۲	۳	۴	۷۱	۱	۲	۳	۴	۱۰۳	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴	۴۰	۱	۲	۳	۴	۷۲	۱	۲	۳	۴	۱۰۴	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴	۴۱	۱	۲	۳	۴	۷۳	۱	۲	۳	۴	۱۰۵	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴	۴۲	۱	۲	۳	۴	۷۴	۱	۲	۳	۴	۱۰۶	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴	۴۳	۱	۲	۳	۴	۷۵	۱	۲	۳	۴	۱۰۷	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴	۴۴	۱	۲	۳	۴	۷۶	۱	۲	۳	۴	۱۰۸	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴	۴۵	۱	۲	۳	۴	۷۷	۱	۲	۳	۴	۱۰۹	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴	۴۶	۱	۲	۳	۴	۷۸	۱	۲	۳	۴	۱۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴	۴۷	۱	۲	۳	۴	۷۹	۱	۲	۳	۴	۱۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴	۴۸	۱	۲	۳	۴	۸۰	۱	۲	۳	۴	۱۱۲	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴	۴۹	۱	۲	۳	۴	۸۱	۱	۲	۳	۴	۱۱۳	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴	۵۰	۱	۲	۳	۴	۸۲	۱	۲	۳	۴	۱۱۴	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴	۵۱	۱	۲	۳	۴	۸۳	۱	۲	۳	۴	۱۱۵	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴	۵۲	۱	۲	۳	۴	۸۴	۱	۲	۳	۴	۱۱۶	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴	۵۳	۱	۲	۳	۴	۸۵	۱	۲	۳	۴	۱۱۷	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴	۵۴	۱	۲	۳	۴	۸۶	۱	۲	۳	۴	۱۱۸	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴	۵۵	۱	۲	۳	۴	۸۷	۱	۲	۳	۴	۱۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴	۵۶	۱	۲	۳	۴	۸۸	۱	۲	۳	۴	۱۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴	۵۷	۱	۲	۳	۴	۸۹	۱	۲	۳	۴	۱۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴	۵۸	۱	۲	۳	۴	۹۰	۱	۲	۳	۴	۱۲۲	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴	۵۹	۱	۲	۳	۴	۹۱	۱	۲	۳	۴	۱۲۳	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴	۶۰	۱	۲	۳	۴	۹۲	۱	۲	۳	۴	۱۲۴	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴	۶۱	۱	۲	۳	۴	۹۳	۱	۲	۳	۴	۱۲۵	۱	۲	۳	۴
۳۳	۱	۲	۳	۴	۶۲	۱	۲	۳	۴	۹۴	۱	۲	۳	۴	۱۲۶	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴	۶۳	۱	۲	۳	۴	۹۵	۱	۲	۳	۴	۱۲۷	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴	۶۴	۱	۲	۳	۴	۹۶	۱	۲	۳	۴	۱۲۸	۱	۲	۳	۴

تست های طبقه بندی شده و فصل به فصل کنکور سراسری همراه با پاسخ کامل تشریحی

www.sejall.ir

$$\triangle ADC \text{ متساوی الساقین است پس } DF \Rightarrow DF^2 = AD \times DC = AF \times EC \Rightarrow DF^2 = 3 \times 7 = \left(\frac{12}{5}\right) \left(\frac{28}{5}\right)$$

$$\left(\frac{12}{5}\right) \left(\frac{28}{5}\right) = 21 \times \frac{9}{25} \Rightarrow DF = \frac{2}{5} \sqrt{21} = 0.6 \sqrt{21}$$

۱۳۹	۱	۲	۳	۴
۱۳۰	۱	۲	۳	۴
۱۳۱	۱	۲	۳	۴
۱۳۲	۱	۲	۳	۴
۱۳۳	۱	۲	۳	۴
۱۳۴	۱	۲	۳	۴
۱۳۵	۱	۲	۳	۴
۱۳۶	۱	۲	۳	۴
۱۳۷	۱	۲	۳	۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. محیط مثلث $\sqrt{48\pi}$ یعنی $4\sqrt{3\pi}$ است. اگر شعاع دایره محاطی باشد

$$r = \frac{S}{P}$$

داریم:

از طرف دیگر مساحت مثلث برابر ۳ به اضافه مساحت دایره است. بنابراین:

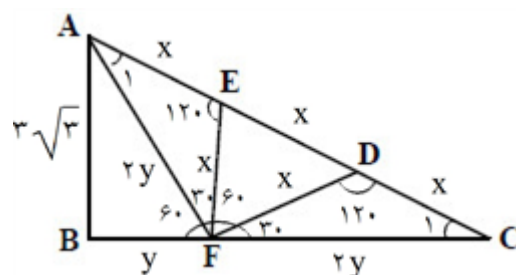
$$3 + \pi r^2 \Rightarrow \pi r^2 - 2\sqrt{3\pi}r + 3 = 0 \Rightarrow (\sqrt{\pi}r - \sqrt{3})^2 = 0$$

$$3 + \pi \left(\frac{2}{\pi}\right) = 6$$

۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در نظر می‌گیریم $AE = ED = DC = x$ چون مثلث EFD متساوی الساقین است پس

$EF = FD = x$ در نتیجه هر دو مثلث $\triangle AEF$ و $\triangle DFC$ متساوی الساقین با زاویه رأس 120° هستند پس $\hat{C}_1 = \hat{A}_1 = 30^\circ$ پس $AF = FC$



از طرف دیگر با استفاده از فرض $\frac{AF}{BC} = \frac{2}{3}$ در نظر می‌گیریم $AF = 2y$ و $BC = 3y$ پس $FC = 2y$ پس $BF = y$ اکنون با

استفاده از قضیه کسینوس‌ها می‌نویسیم: (با توجه به شکل مشخص است که: $\angle AFB = 60^\circ$)

$$\triangle ABF : AB^2 = AF^2 + BF^2 - 2AF \times BF \cos 60^\circ \Rightarrow (3\sqrt{3})^2 = (2y)^2 + y^2 - 2(2y)(y)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 27 = 4y^2 + y^2 - 2y^2 \Rightarrow 27 = 3y^2 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = 3$$

$$FC = 2y = 6$$

بنابراین:

۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از C به D وصل می‌کنیم. زاویه D محاطی روبه‌رو به قطر است پس $\hat{D} = 90^\circ$. از طرف دیگر

از مرکز O به نقطه E وسط کمان DC وصل می‌کنیم در این صورت OE بر وتر DC عمود خواهد شد. بنابراین دو خط OE و

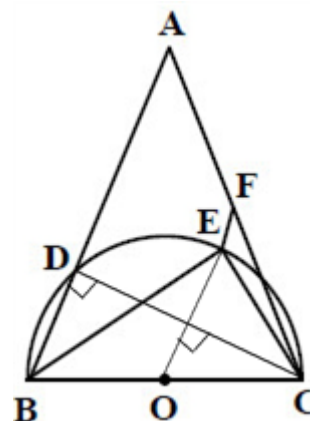
AB هر دو بر DC عمودند. بنابراین $OE \parallel AB$.

در ضمن نقاط O و F وسط دو ضلع مثلث ABC هستند. پس بنابر عکس قضیه تالس $OF \parallel AB$. در نتیجه نقاط O، E و F

$$R = OE = 4/5 \Rightarrow OF = OE + EF = 4/5 + 2 = 6/5$$

روی یک خط موازی با AB قرار دارد، داریم. پس:

$$\triangle ABC : OF \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CF}{AC} = \frac{OF}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6/5}{AB} \Rightarrow AB = 12$$



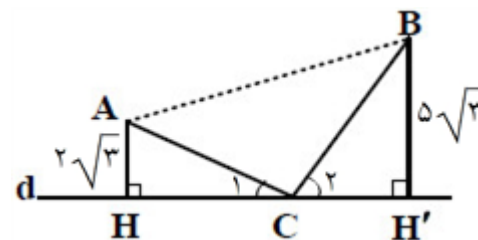
گزینه ۳. پاسخ صحیح است. بنابر مسئله هر دو زاویه $\hat{C}_1$ و $\hat{A}_1$ مساویند پس، مثلث‌های قائم‌الزاویه $\triangle BCH$ و $\triangle ACH$ متشابهند. اکنون بنابر قضیه تالس داریم:

$$S_{ACH} = 6\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2}(2\sqrt{3})CH = 6\sqrt{3} \Rightarrow CH = 6$$

از طرف دیگر:

$$\triangle ACH \sim \triangle BCH' \Rightarrow \frac{CH}{CH'} = \frac{AH}{BH'} \Rightarrow \frac{6}{CH'} = \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} \Rightarrow CH' = 15$$

$$HH' = CH + CH' = 6 + 15 = 21 \quad \text{پس:}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در چهارضلعی ABCD مجموع زوایای داخلی برابر 360° است پس:

$$\widehat{A} + \widehat{ABC} + \widehat{C} + \widehat{ADC} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{A} + 105^\circ + \alpha + 165^\circ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{A} + \alpha = 90^\circ \Rightarrow \sin \widehat{A} = \cos \alpha \quad (1)$$

از طرف دیگر با استفاده از قضیه سینوس‌ها می‌نویسیم:

$$\triangle ABD: \frac{AD}{\sin 30^\circ} = \frac{BD}{\sin \widehat{A}} \xrightarrow{(1)} \frac{AD}{\frac{1}{2}} = \frac{BD}{\cos \alpha} \quad (2)$$

$$\triangle BDC: \frac{BC}{\sin 135^\circ} = \frac{BD}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{BD}{\sin \alpha} \quad (3)$$

اکنون از تقسیم روابط (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\sqrt{2}AD}{BC} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \xrightarrow{\frac{AD}{BC} = \frac{2}{3}} \frac{2\sqrt{2}}{3} = \tan \alpha$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه نیمساز می‌نویسیم.

$$\triangle ABD: DE \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BD} = \frac{3}{5}$$

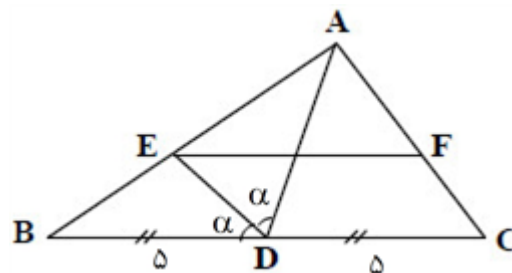
$$\triangle ABC: EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{FC} = \frac{3}{5}$$

پس $\frac{AF}{FC} = \frac{AD}{DC}$ در نتیجه در مثلث ADC پاره‌خط DF نیمساز زاویه ADC است.

$$\frac{AF}{FC} = \frac{3}{5} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AF}{AC} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{AF}{v} = \frac{3}{8} \Rightarrow AF = \frac{3v}{8} \Rightarrow FC = v - \frac{3v}{8} = \frac{5v}{8}$$

$$\triangle ADC: DF \text{ نیمساز} \Rightarrow DF^2 = AD \times DC - AF \times FC = 3 \times 5 - \frac{3v}{8} \times \frac{5v}{8} = 15 \left(1 - \frac{15}{64}\right)$$

$$\Rightarrow 15 \times \frac{49}{64} \Rightarrow DF = \frac{15}{8}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم ۲ شعاع دایره محاطی باشد.

$$2P = \sqrt{80\pi} \Rightarrow 2P = 2\sqrt{5\pi} \Rightarrow P = \sqrt{5\pi}$$

در ضمن مساحت قسمت سایه زده مساوی مساحت چهارضلعی منهای مساحت دایره است. پس:

$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow r = \frac{5 - \pi r^2}{2\sqrt{5\pi}} \Rightarrow 2\sqrt{5\pi}r = 5 - \pi r^2 \Rightarrow \pi r^2 + 2\sqrt{5\pi}r - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{\pi}r - \sqrt{5})^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}}$$

۱۱

۱۲

۱۳

$$\text{بنابراین:} \quad 2\pi r = 2\pi \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\pi}} \right) = 2\sqrt{5\pi}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از O به F وصل می‌کنیم چون F وسط کمان $\widehat{EC}$ قرار دارد پس OF بر وتر CE عمود می‌شود. از طرف دیگر زاویه $\widehat{E} = 90^\circ$ است پس $\widehat{E} = 90^\circ$ بنابراین OF و AB هر دو بر CE عمودند پس $OF \parallel AB$.

در ضمن در مثلث ABC نقاط O و D وسط اضلاع BC و AC هستند پس بنابر عکس قضیه تالس $OD \parallel AB$. بنابراین نقاط O و F و D روی یک خط موازی AB هستند. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} OF = R = \frac{v}{2} \\ DF = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} OD = \frac{v}{2} + 1 = \frac{9}{2}$$

$$\triangle ABC : OD \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OD}{AB} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \frac{\frac{9}{2}}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 9$$

