



www.sejall.ir

تست های طبقه بندی شده و فصل به فصل کنکور سراسری همراه با پاسخ کامل تشریحی

پایه تحصیلی : دوازدهم تجربی

نام درس : ریاضی ۳ تجربی فصل ۵ و ۶ و ۷

نام آموزشگاه : سامانه جامع آزمونهای

الکترونیکی سجال sejall.ir

سوال ۱۱۴

ریاضی ۳ تجربی فصل ۵ و ۶ و ۷

۱ نقطه $(0, a)$ و مبدأ مختصات، کانون‌های یک بیضی بوده و $(-3, 0)$ یک نقطه واقع بر آن است. اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{1}{\sqrt{2}}$ باشد، طول قطر کوچک بیضی کدام است؟

۴ $3\sqrt{2}$

۳ $3\sqrt{6}$

۲ $6\sqrt{2}$

۱ $6\sqrt{6}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲ در کیسه‌ای تعدادی مهره سفید و سیاه وجود دارد که تعداد مهره‌ها از یک رنگ ۲ برابر دیگری است. دو مهره یکی پس از دیگری از کیسه به تصادف خارج می‌شود، احتمال اینکه مهره‌ها هم‌رنگ نباشند برابر $\frac{1}{4}$ است. در ابتدا مجموع مهره‌های داخل کیسه کدام است؟

۴ ۶

۳ ۹

۲ ۱۲

۱ ۱۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۳ روی خطی به موازات محور y ها، نقاطه M و N ، به ترتیب، روی منحنی‌های $y = x^2 - 2x^2 + 1$ و $y = x^2 + 2x - 3$ بین نقاط تلاقی دو منحنی قرار دارند. بیشترین مقدار طول پاره‌خط MN کدام است؟

۴ $5/5$

۳ $4/5$

۲ $3/5$

۱ $2/5$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۴ تابع $y = |f(x)|$ که در آن $f(x) = x(|x| + 3)$ است، چند نقطه بحرانی دارد؟

۴ صفر

۳ ۱

۲ ۳

۱ ۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵ تابع f با ضابطه $f(x) = x^2 - 5|x|$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب، تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع $y = |f(x)|$ باشند، مقدار $\frac{n}{m}$ کدام است؟

۴ ۲

۳ $\frac{1}{2}$

۲ $\frac{2}{3}$

۱ $\frac{3}{2}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴ تیرماه

۶ نقاط A و B به ترتیب، روی منحنی‌های $y = x^2 - 2x - 3$ و $y = x^2 + x^2 + 1$ قرار دارند. اگر این نقاط روی خطی به موازات محور y ها باشند، کمترین مقدار طول پاره‌خط AB کدام است؟

۴ ۱

۳ ۲

۲ ۳

۱ ۴

سراسری-تجربی-۱۴۰۴ تیرماه

www.sejall.ir

تست های طبقه بندی شده و فصل به فصل کنکور سراسری همراه با پاسخ کامل تشریحی



۷ در پرتاب ۱ تاس و ۳ سکه، با کدام احتمال تعداد دفعاتی که سکه رو می‌آید ۳ برابر عدد روی تاس است؟

۱/۱۶ (۴)

۱/۴۸ (۳)

۱/۲۴ (۲)

۱/۸ (۱)

سراسری-تجربی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۸ نقطه A، نقطه برخورد تابع $y = \sqrt{x+2}$ با محور عرض‌ها است. کمترین فاصله نقطه A از منحنی $y = x + |x|$ کدام است؟

$\sqrt{5}/2$ (۴)

$\sqrt{10}/2$ (۳)

$\sqrt{5}$ (۲)

$\sqrt{10}$ (۱)

سراسری-تجربی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۹ ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2} |x-a|$ روی بازه $[0, a]$ برابر $1/5$ است. مقدار a کدام است؟

۱ (۴)

$1/5$ (۳)

۲ (۲)

$2/5$ (۱)

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۱۰ مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی که دو رأس آن بر محور xها و دو رأس دیگر آن یکی بر $y = \sqrt{x+1}$ و دیگری بر $y = \sqrt{2-x}$ قرار دارد، کدام است؟

$\sqrt{2}$ (۴)

$\sqrt{2}$ (۳)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۱ تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x|x|} - x$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و k تعداد نقاط بحرانی تابع f باشند، مقدار $\frac{km+n}{k-n}$ کدام است؟

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲ اگر مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی که دو رأس آن بر محور xها و دو رأس دیگر آن، یکی بر $y = \sqrt{x}$ و دیگری بر $y = \sqrt{a-x}$ واقع است برابر $\sqrt{2}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۶ (۱)

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۳

۱۳ سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر «رو» بیاید، ۲ سکه پرتاب کرده و اگر «پشت» بیاید، ۳ سکه را پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال همه سکه‌ها یکسان ظاهر می‌شوند؟

$\frac{5}{16}$ (۴)

$\frac{5}{12}$ (۳)

$\frac{3}{16}$ (۲)

$\frac{3}{12}$ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۱۴ تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{x(1-|x|)}$ را در نظر بگیرید. اگر m و n به ترتیب تعداد نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و k تعداد نقاط بحرانی تابع f باشند، مقدار $m+n+k$ کدام است؟

۳ (۴)

۴ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳



۱۵) جعبه A شامل ۶ مهره آبی، ۴ مهره سبز و ۵ مهره قرمز است و جعبه B شامل ۵ مهره آبی، ۳ مهره سبز و ۶ مهره قرمز است. از جعبه A به تصادف یک مهره انتخاب کرده، در جعبه B قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از جعبه B انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال مهره خارج شده از جعبه B آبی است؟

- ۱) $\frac{1}{36}$ ۲) $\frac{1}{32}$ ۳) $\frac{1}{28}$ ۴) $\frac{1}{24}$

سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۱۶) مقدار مینیمم نسبی تابع $y = x^3 - 12x + 2$ ، کدام است؟

- ۱) -۱۴ ۲) -۱۱ ۳) -۹ ۴) -۷

سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۱۷) تابع $y = (x-1)|x|$ در بازه (a, b) اکیداً نزولی است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{3}{4}$

سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۱۸) به ازای چند مقدار صحیح m ، تابع $y = \frac{mx+2}{x-1+m}$ روی بازه $(1, +\infty)$ نزولی است؟ ($m \neq 2$)

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

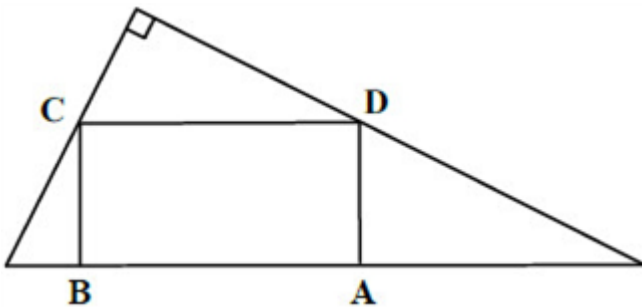
سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۱۹) نقطه‌های M و N به ترتیب روی دو دایره متخارج $x^2 + y^2 - 2x + 2y = a$ و $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 6a = 0$ قرار دارند. اگر بیشترین فاصله M و N برابر ۸ باشد، مقدار a کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{5}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲۰) در شکل مقابل، یکی از اضلاع قائمه مثلث بزرگ نصف دیگری است. اگر مساحت مستطیل ABCD ماکزیمم باشد، نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟



- ۱) ۱ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{2}{5}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲۱) کمترین فاصله نقاط واقع بر منحنی $y = -\sqrt{-x - [x^2]}$ از خط $x - y - 1 = 0$ کدام است؟

- ۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ ۳) $\frac{3\sqrt{2}}{10}$ ۴) $\frac{3\sqrt{2}}{8}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی



۲۲ اگر $A = \left\{ \log_9 x + 3 \log_{x^2} 3 : x > 1 \right\}$ باشد، کوچک‌ترین عضو مجموعه A کدام است؟

۴ $\sqrt{3}$

۳ $\sqrt{6}$

۲ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه

۲۳ طول کوتاه‌ترین وتری که از $(-1, 2/5)$ در دایره $2x^2 + 2y^2 - 6x - 10y + 1 = 0$ رسم می‌شود، کدام است؟

۴ $\frac{\sqrt{7}}{2}$

۳ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

۲ $\sqrt{7}$

۱ $\sqrt{5}$

سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه

۲۴ احتمال اینکه امیر برای قبولی در رشته پزشکی، یکی از سه دانشگاه A، B و C را انتخاب کند، به ترتیب، $0/4$ ، $0/35$ و $0/25$ است. اگر او یکی از دانشگاه‌های A، B و C را انتخاب کند، به ترتیب، با احتمال $0/25$ ، $0/3$ و $0/35$ در آن دانشگاه پذیرفته می‌شود. چند درصد احتمال دارد که امیر در رشته پزشکی قبول شود؟

۴ $29/25$

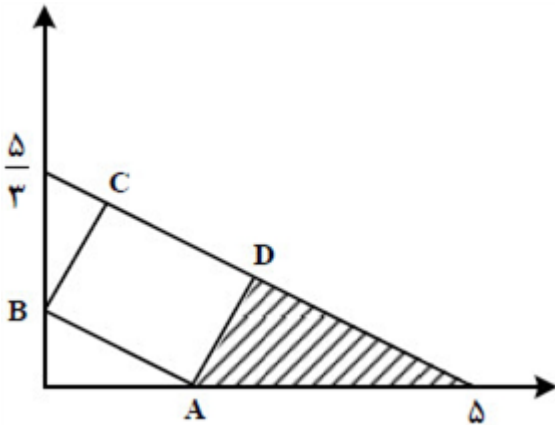
۳ $20/25$

۲ $29/55$

۱ $20/55$

سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه

۲۵ در شکل مقابل، مساحت مستطیل ABCD ماکزیمم است. مساحت مثلث هاشورخورده چقدر است؟



۴ $\frac{25}{24}$

۳ $\frac{25}{12}$

۲ $\frac{15}{16}$

۱ $\frac{15}{8}$

سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه

۲۶ قطرهای یک بیضی روی خطوط $2y - 3x = 2$ و $3y + 2x = 11$ قرار دارند. فاصله مرکز بیضی تا مبدأ مختصات، چقدر است؟

۴ $\sqrt{5}$

۳ ۵

۲ $\sqrt{10}$

۱ ۱۰

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۲۷ یک سازنده جعبه‌های مقوایی می‌خواهد از مقواهای مربع شکل به ضلع ۱۲ cm، با بریدن مربع‌های مساوی از چهار گوشه و بالا بردن اضلاع جعبه‌های باز بسازد. طول ضلع مربعی را که باید بُرید چند سانتی‌متر باشد تا جعبه بیش‌ترین حجم را داشته باشد؟

۴ ۶

۳ ۴

۲ ۳

۱ ۲

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۲۸ نقطه $A(-1, 2)$ ، نقطه ماکزیمم نسبی تابع $y = ax^2 + b|x|$ است. مقدار ab کدام است؟

۴ -۸

۳ $-\frac{1}{4}$

۲ $\frac{8}{9}$

۱ ۱



۲۹ طول وتری از دایره $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 1$ که روی خط $2y + x = a$ قرار دارد، برابر ۳ است. اختلاف مقادیر a چقدر است؟

۴ $5\sqrt{2}$

۳ $3\sqrt{6}$

۲ $\sqrt{28}$

۱ $\sqrt{25}$

سراسری-تجربی-دی ۱۴۰۱

۳۰ سه عدد را به طور متوالی و بدون جایگذاری از میان اعداد ۱ تا n انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد سوم ۱۰ باشد، برابر $\frac{1}{15}$ است. در انتخاب تصادفی سه عدد و بدون جایگذاری از میان همین اعداد، با کدام احتمال فقط عدد سوم مضرب ۳ است؟

۴ $\frac{5}{51}$

۳ $\frac{15}{91}$

۲ $\frac{1}{5}$

۱ $\frac{1}{3}$

سراسری-تجربی-دی ۱۴۰۱

۳۱ حاصل‌ضرب بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{a-2x}$ برابر $\sqrt{12}$ است. اگر $a > 0$ باشد، مقدار $[a]$ کدام است؟

۴ ۱۲

۳ ۶

۲ ۴

۱ ۲

سراسری-تجربی-دی ۱۴۰۱

۳۲ نمودار تابع $f(x) = (m^2 + 1)x^2 + (2 - m)x - 5$ محور x ها را در α و β قطع می‌کند. اگر مجموع α و β بیشترین مقدار باشد، m کدام است؟

۴ $2 - \sqrt{3}$

۳ $2 - \sqrt{5}$

۲ $2 + \sqrt{3}$

۱ $2 + \sqrt{5}$

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۳۳ تابع $f(x) = \frac{x}{1 - x|x|}$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۴ ۳

۳ ۲

۲ ۱

۱ صفر

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۳۴ دو سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر هر دو سکه «رو» یا هر دو «پشت» ظاهر شوند، یک سکه دیگر می‌اندازیم، در غیر این صورت دو سکه دیگر پرتاب می‌کنیم. در مجموع با کدام احتمال، دقیقاً دو سکه به «پشت» ظاهر می‌شود؟

۴ $\frac{3}{8}$

۳ $\frac{3}{4}$

۲ $\frac{1}{2}$

۱ $\frac{1}{4}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۳۵ در ساخت قوطی‌های حلبی درباز به شکل مکعب مستطیل با قاعده مربع و حجم ۴ واحد مکعب، حداقل حلب استفاده شده در هر قوطی، چند واحد مربع است؟

۴ ۸

۳ ۱۰

۲ ۱۲

۱ ۱۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۳۶ نقاط $A(0,0)$ و $B(1,1)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ هستند. حاصل ab کدام است؟

۴ ۶

۳ ۳

۲ -۶

۱ -۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۷ نقطه $(-12, 0)$ یکی از کانون‌های یک بیضی است که طول قطر کوچک آن برابر ۱۸ است. اگر مبدأ مختصات مرکز بیضی باشد، خروج از مرکز بیضی، چقدر است؟

۴ $1/8$

۳ $1/4$

۲ $0/8$

۱ $0/6$



۳۸ از بین مخروط های حاصل که از دوران کامل پاره خط AB با اندازه $3\sqrt{3}$ حول خط L به دست می آیند، ارتفاع مخروطی با بیشترین حجم، کدام است؟ (فقط نقطه A روی خط L واقع است).

- ۱) ۶ ۲) ۳ ۳) $2\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{3}$

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۱

۳۹ نقطه $A(-1, 1)$ اکستریم نسبی تابع $y = x^2|x| + 3ax^2 + b$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

- ۱) -۳ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{1}{3}$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۴۰ در یک بازی ۱۶ نفره به هر نفر یکی از شماره های ۳، ۴، ۵، ...، ۱۸ را نسبت می دهیم. سه تاس را پرتاب می کنیم و اعداد رو شده را با یکدیگر جمع می کنیم. شخصی که آن شماره را داشته باشد، انتخاب می شود. احتمال این که شخص صاحب شماره ی ۱۰ انتخاب شود، کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{7}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-انسانی

۴۱ دایره ی $x^2 + y^2 + 2y = 3$ مفروض است. معادله ی دایره های که با دایره ی قبلی مماس داخل بوده و از نقطه ی $(0, -3)$ گذشته و قطر آن با شعاع دایره ی داده شده برابر باشد، کدام است؟

- ۱) $x^2 + y^2 - 4x = 3$ ۲) $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$
۳) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ ۴) $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۴۲ احتمال متولد شدن یک خرگوش نر در یک نسل در اولین دوره ی بارداری مادر، ۷۰ درصد و احتمال متولد شدن دو خرگوش نر در دو بار متوالی زایمان ۶۰ درصد است. اگر دومین فرزند خرگوش، نر باشد، احتمال آن که در زایمان قبلی خرگوش نر به دنیا آمده باشد، کدام است؟ (فرض بر این است که در هر دوره فقط یک تولد صورت می گیرد).

- ۱) $\frac{20}{27}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{7}{10}$ ۴) $\frac{6}{7}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۴۳ تعداد بازه هایی که تابع $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 2}$ ؛ $x \in (-2, 2)$ در آن ها اکیداً نزولی باشد، کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۴ مجموعه ی مقادیری از اعداد حقیقی که در آن تابع $f(x) = 3\sqrt{x} + |x|$ صعودی باشند، کدام است؟

- ۱) $[-1, \infty)$ ۲) $(-\infty, \infty)$ ۳) $[-1, 0) \cup (0, \infty)$ ۴) $[-3\sqrt{3}, 0]$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۵ دایره های $x^2 + y^2 + 2y = 3$ و $x^2 + y^2 + 2x = 3$ متقاطع اند. معادله ی وتر مشترک این دو دایره، کدام است؟

- ۱) $x = y$ ۲) $x = 1 + y$ ۳) $x = -y$ ۴) $x = 1 - y$

سراسری-تجربی-۱۴۰۰

۴۶ با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی می‌سازیم، که در آن رقم تکراری به کار نرفته باشد. یک عضو از مجموعه‌ی فوق انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عضو انتخاب شده بر ۴ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

$\frac{1}{5}$ (۴)

$\frac{3}{5}$ (۳)

$\frac{4}{5}$ (۲)

$\frac{13}{21}$ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۰

۴۷ احتمال این‌که یک دانش‌آموز در یک امتحان نمره قبولی بگیرد $\frac{9}{10}$ و در دو امتحان متوالی نمره قبولی بگیرد $\frac{85}{100}$ است. اگر دانش‌آموز در امتحان دوم موفق باشد، احتمال این‌که امتحان قبلی نیز موفق شده باشد، کدام است؟

$\frac{45}{47}$ (۴)

$\frac{17}{18}$ (۳)

$\frac{85}{94}$ (۲)

$\frac{8}{9}$ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۰

۴۸ تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} |x^2 - 4|$ ، کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۰

۴۹ فرض کنید خطوط $x + y = 1$ و $x - y = 3$ قطرهای یک دایره و خط $4x + 3y + 5 = 0$ مماس بر آن باشد. نزدیک‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی $M(4, -2)$ از دایره، کدام است؟

$\sqrt{5} - 2$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

$\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt{3} - 1$ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۵۰ دو تاس سالم را پرتاب می‌کنیم. می‌دانیم مجموع دو عدد رو شده، کمتر از ۱۰ است. با کدام احتمال مجموع این دو عدد، برابر ۷ است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{1}{25}$ (۳)

$\frac{1}{24}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۵۱ ۱۰ نفر در یک صف ایستاده‌اند. با کدام احتمال دو فرد موردنظر از آن‌ها، در کنار هم نیستند؟

$\frac{9}{10}$ (۴)

$\frac{4}{5}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۵۲ کوتاه‌ترین فاصله‌ی نقطه $A(5, 0)$ از نقاط منحنی به معادله‌ی $y = \sqrt{2x + 7}$ ، کدام است؟

$3\sqrt{2}$ (۴)

۵ (۳)

$\frac{4}{5}$ (۲)

۴ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۵۳ دایره‌ای به مرکز $(1, 3)$ بر روی خط راست $5x + 12y = 15$ ، وترى به طول $2\sqrt{21}$ ، جدا می‌کند. این دایره بر روی محور x ها، وترى با کدام اندازه جدا می‌کند؟

۸ (۴)

$2\sqrt{15}$ (۳)

۶ (۲)

$2\sqrt{6}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۴ از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازه‌ی وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیش‌ترین باشد؟

$\frac{\sqrt{2}}{1}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{1}$ (۲)

$\frac{2}{1}$ (۱)

سراسری-تجربی-۹۹

۵۵ فاصله‌ی نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x + \sqrt{4x - x^2}$ ، از نیمساز ناحیه‌ی اول کدام است؟

$2\sqrt{2}$ (۴)

۲ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱)

سراسری-تجربی-۹۹

۵۶ نقطه‌ی $A(-1, 4)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $2x - 3y + 1 = 0$ وتری به طول $2\sqrt{7}$ جدا می‌کند. این دایره خط $y = 2$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟

$-1 \pm \sqrt{3}$ (۴)

$-1 \pm \sqrt{2}$ (۳)

۲، -۴ (۲)

۳، -۵ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۵۷ بیش‌ترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟

۳۶ (۴)

۲۷ (۳)

۲۴ (۲)

۱۸ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۵۸ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x|x| - 2x$ ، فاصله‌ی دو نقطه‌ی ماکسیمم نسبی و می‌نیمم نسبی آن، کدام است؟

۴ (۴)

$3\sqrt{2}$ (۳)

۳ (۲)

$2\sqrt{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۵۹ احتمال موفقیت فردی در یک آزمون مستقل، ۲ برابر احتمال موفقیت دوست وی است. احتمال موفقیت لااقل یکی از آن دو، $\frac{7}{9}$ است. احتمال موفقیت این فرد کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{4}{9}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{6}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۶۰ در جعبه‌ای ۵ مهره‌ی سفید و ۶ مهره‌ی سیاه است. ابتدا یک مهره را بدون رویت خارج می‌کنیم. سپس از بین بقیه‌ی مهره‌ها، ۲ مهره بیرون می‌کشیم. با کدام احتمال هر دو مهره‌ی اخیر، سفید است؟

$\frac{5}{22}$ (۴)

$\frac{4}{11}$ (۳)

$\frac{2}{11}$ (۲)

$\frac{1}{11}$ (۱)

سراسری-تجربی-۹۸

۶۱ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x|x - 4|$ ، فاصله‌ی دو نقطه ماکسیمم نسبی و می‌نیمم نسبی آن، کدام است؟

$2\sqrt{5}$ (۴)

$3\sqrt{2}$ (۳)

$2\sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt{5}$ (۱)

سراسری-تجربی-۹۸

۶۲ در یک بیضی به کانون‌های $(2, -1)$ و $(2, 7)$ ، اندازه‌ی قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی، کدام است؟

$0/8$ (۴)

$0/75$ (۳)

$0/64$ (۲)

$0/6$ (۱)

سراسری-تجربی-۹۸



۶۳ در آزمایش تکراری پرتاب دو تاس با هم، احتمال آمدن مجموع ۱۱ قبل از آمدن عدد هر دو تاس یکسان، کدام است؟

۱/۲ (۴)

۱/۳ (۳)

۱/۴ (۲)

۱/۵ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶۴ دایره گذرا بر نقطه‌ی $(-2, 1)$ ، بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟

۲٫۵ (۴)

۲٫۴ (۳)

۱٫۵ (۲)

۱٫۴ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۶۵ دو تاس را با هم می‌اندازیم، احتمال آن‌که مجموع دو عدد رو شده مضرب ۴ باشد، کدام است؟

۵/۱۸ (۴)

۲/۹ (۳)

۱/۳ (۲)

۱/۴ (۱)

سراسری-تجربی-۹۷

۶۶ در یک قطعه زمین اگر ۳۰ بوته گوجه‌فرنگی با فاصله‌ی مساوی از هم کاشته شوند، هر بوته ۴ کیلو محصول می‌دهد. به ازای هر بوته اضافی که کاشته شود، $\frac{1}{10}$ کیلو از میانگین محصول بوته‌ها کم می‌شود. بیش‌ترین محصول برداشتی، کدام است؟

۱۳۲/۵ (۴)

۱۳۰/۵ (۳)

۱۲۷/۵ (۲)

۱۲۲/۵ (۱)

سراسری-انسانی-۹۷

۶۷ احتمال قبولی فرد A در یک آزمون ۸۴٪ و احتمال قبولی فرد B در همان آزمون ۷۵٪ است. با کدام احتمال لااقل یکی از آنان، در این آزمون قبول می‌شوند؟

۰/۹۸ (۴)

۰/۹۶ (۳)

۰/۹۴ (۲)

۰/۹۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۶۸ در کیسه‌ای ۵ مهره‌ی سفید و ۴ مهره‌ی سیاه و ۳ مهره‌ی آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره‌های خارج شده، متفاوت است؟

۴/۱۱ (۴)

۷/۲۲ (۳)

۳/۱۱ (۲)

۵/۲۲ (۱)

سراسری-تجربی-۹۶

۶۹ دایره‌ای به مرکز $(-1, 2)$ و مماس بر خط به معادله‌ی $x - y = 1$ ، محور x ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۱/۵ و ۴ (۴)

۲ و ۳ (۳)

۱ و ۴ (۲)

۱ و ۳ (۱)

سراسری-تجربی-۹۵

۷۰ مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x$ ، در بازه‌ی $[-4, 3]$ ، کدام است؟

۳۶ و -۲۷ (۴)

۲۷ و -۳۶ (۳)

۲۷ و -۴۵ (۲)

۲۴ و -۱۸ (۱)

سراسری-تجربی-۹۵

۷۱ احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر ۹/۰ و برای شخص B برابر ۸/۰ است. با کدام احتمال، لااقل عمل جراحی برای یکی از این دو نفر، موفقیت‌آمیز است؟

۰/۹۸ (۴)

۰/۹۶ (۳)

۰/۹۴ (۲)

۰/۹۲ (۱)

سراسری-تجربی-۹۵



۷۲ دو تاس را با هم می‌اندازیم، با کدام احتمال دو عدد رو شده، متوالی هستند؟

$\frac{4}{9}$ (۴)

$\frac{7}{18}$ (۳)

$\frac{5}{18}$ (۲)

$\frac{2}{9}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۷۳ طول نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $y = (x-1)^2 \sqrt[3]{x^2}$ ، کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۴ در جعبه‌ای ۳ مهره‌ی سفید، ۲ مهره‌ی سیاه و ۵ مهره‌ی قرمز موجود است. اگر دو مهره از آن بیرون آوریم، با کدام احتمال این دو مهره هم‌رنگ نیستند؟

$\frac{22}{45}$ (۴)

$\frac{31}{45}$ (۳)

$\frac{29}{45}$ (۲)

$\frac{28}{45}$ (۱)

سراسری-تجربی-۹۴

۷۵ بیش‌ترین مقدار اختلاف مربع نصف عددی، از ۶ برابر همان عدد، کدام است؟

۴۸ (۴)

۴۲ (۳)

۳۸ (۲)

۳۶ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-انسانی

۷۶ ۵۵ درصد دانشجویان سال اول، دختر و بقیه پسر هستند. ۶۰ درصد دختران و ۶۴ درصد پسران، تمام واحدهای درسی خود را گذرانده‌اند. چند درصد کل دانشجویان، تمام واحدهای درسی را گذرانده‌اند؟

$\frac{62}{8}$ (۴)

$\frac{62}{4}$ (۳)

$\frac{61}{8}$ (۲)

$\frac{61}{4}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۷۷ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x|x^2 - 3|$ ، در چند نقطه، اکسترمم نسبی دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۸ تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 1 \\ -x + 2 & ; 0 < x < 1 \\ x^2 & ; x \leq 0 \end{cases}$

(۲) مینیمم نسبی دارد اما مطلق ندارد.

(۱) ماکزیمم نسبی دارد.

(۴) مینیمم نسبی و مطلق دارد.

(۳) مینیمم نسبی و مطلق ندارد.

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-تجربی

۷۹ دایره‌ای از دو نقطه‌ی $(0,0)$ و $(3,1)$ گذشته و مرکز آن برخط به معادله‌ی $y = 2x$ قرار دارد. شعاع این دایره کدام است؟

۳ (۴)

$\sqrt{5}$ (۳)

۲ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۸۰ طول نقطه‌ی ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$ ، کدام است؟

۱ (۴)

۰ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی



۸۱) اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + a}$ دارای اکسترمم نسبی باشد، مقادیر a کدام است؟

- ۱) $a > 0$ یا $a < -2$ ۲) $a > 2$ یا $a < 0$ ۳) $-2 < a < 0$ ۴) $0 < a < 2$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۸۲) در یک خانواده‌ی دو فرزند، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال این خانواده فرزند دختر دارد؟

- ۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۸۳) احتمال این‌که از سه موش انتخاب شده از ۶ موش سفید و ۵ موش سیاه، هرسه موش سفید باشند، کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{4}{33}$ ۳) $\frac{5}{32}$ ۴) $\frac{5}{33}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۸۴) تابع $y = (x - 1)^v (x - 2)^a$:

- ۱) فقط یک ماکزیمم نسبی دارد. ۲) فقط یک می‌نیمم نسبی دارد.
۳) ماکزیمم و می‌نیمم نسبی ندارد. ۴) یک ماکزیمم نسبی و یک می‌نیمم نسبی دارد.

کنکورهای خارج از کشور - آزاد - ریاضی

۸۵) اگر $x + y = 18$ باشد، بیشترین مقدار $x^2 y$ کدام است؟ ($x, y > 0$)

- ۱) ۲۱۶ ۲) ۷۲۹ ۳) ۸۶۴ ۴) ۶۴۸

کنکورهای خارج از کشور - آزاد - ریاضی

۸۶) تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x|x^2 - 1|$ و دامنه‌ی $(-2, 2)$ چند نقطه‌ی بحرانی دارد؟

- ۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۸۷) بیش‌ترین مساحت زمینی مستطیل شکل را که می‌توان توسط یک طناب، از زمینی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، ۶۴۸ متر مربع است. طول طناب چند متر است؟

- ۱) ۶۸ ۲) ۷۰ ۳) ۷۱ ۴) ۷۲

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۸۸) شعاع دایره‌ی گذرا بر سه نقطه‌ی $(0, 0)$ ، $(2, 1)$ و $(1, -2)$ ، برابر کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) $\frac{1}{2}\sqrt{13}$

سراسری - تجربی - سراسری - آزاد (۹۳)

۸۹) ظرف A دارای ۴ مهره‌ی سفید و ۵ مهره‌ی سیاه است و هریک از دو ظرف یکسان B و C دارای ۶ مهره‌ی سفید و ۳ مهره‌ی سیاه است. به تصادف یکی از سه ظرف را انتخاب کرده و ۴ مهره از آن خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره از مهره‌های خارج شده، سفید است؟

- ۱) $\frac{25}{63}$ ۲) $\frac{26}{63}$ ۳) $\frac{10}{21}$ ۴) $\frac{11}{21}$

سراسری - تجربی - سراسری - آزاد (۹۳)



۹۰ کمترین مقدار تابع $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2$ ، کدام است؟

۱۸ (۴)

۲۴ (۳)

۳۲ (۲)

۳۶ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۹۱ در ظرفی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره‌های خارج شده هم‌رنگ‌اند؟

$\frac{5}{14}$ (۴)

$\frac{2}{9}$ (۳)

$\frac{3}{14}$ (۲)

$\frac{1}{6}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۹۲ بیش‌ترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود چند متر مربع است؟

۹۸۸ (۴)

۹۷۸ (۳)

۹۶۸ (۲)

۹۵۸ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۹۳ در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۶ موش سیاه موجود است، به تصادف ۳ موش از بین آن‌ها خارج می‌کنیم. با کدام احتمال لااقل یکی از موش‌ها سفید است؟

$\frac{29}{33}$ (۴)

$\frac{28}{33}$ (۳)

$\frac{9}{11}$ (۲)

$\frac{8}{11}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۹۴ در جعبه‌ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جای‌گذاری از آن بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال بدون توجه به اولین مهره، دومین مهره خارج شده سفید است؟

$\frac{3}{5}$ (۴)

$\frac{2}{5}$ (۳)

$\frac{3}{7}$ (۲)

$\frac{5}{14}$ (۱)

سراسری - تجربی - سراسری - آزاد (۹۲)

۹۵ در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به‌طور تصادفی پی‌درپی بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره فرد متوالیاً خارج نمی‌شود؟

۵/۲۵ (۴)

۵/۲ (۳)

۵/۱۵ (۲)

۵/۱ (۱)

سراسری - تجربی - سراسری - آزاد (۹۲)

۹۶ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ از نظر اکسترمم نسبی کدام وضع را دارد؟

ماکسیمم نسبی (۲)

می‌نیمم نسبی (۱)

فاقد اکسترمم نسبی (۴)

می‌نیمم نسبی و ماکسیمم نسبی (۳)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۹۷ دو نقطه به طول‌های ۳ و ۵- نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ هستند. مقدار مینیمم نسبی این تابع، کدام است؟

-۷۵ (۴)

-۵۷ (۳)

-۸۱ (۲)

-۸۴ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی



۹۸ چهار رقم ۰, ۱, ۲, ۳ را به تصادف در کنار هم قرار می‌دهیم، با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی مضرب ۶، حاصل می‌شود؟

$\frac{5}{9}$ (۴)

$\frac{4}{9}$ (۳)

$\frac{5}{12}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۹۹ به ازای کدام مقادیر a ، تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ ، دارای ماکزیمم نسبی است؟

هیچ مقدار a (۴)

$a > 0$ (۳)

$a < 0$ (۲)

$|a| > 2$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۰۰ مجموع مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt{|3x-2|}$ در فاصله $[0, 1]$ کدام است؟

$\sqrt{2}$ (۴)

۱ (۳)

۳ (۲)

$\frac{5}{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - آزاد - ریاضی

۱۰۱ در کارخانه‌ای سه ماشین A ، B و C به ترتیب ۴۰ درصد، ۴۰ درصد، ۲۰ درصد محصولات را تولید می‌کنند که به ترتیب ۱۰ درصد، ۵ درصد و ۵ درصد محصولات تولیدی آن‌ها معیوب هستند. محصولی به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال این‌که معیوب باشد، چقدر است؟

$\frac{9}{100}$ (۴)

$\frac{7}{100}$ (۳)

$\frac{5}{100}$ (۲)

$\frac{3}{100}$ (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۰۲ سه ظرف یکسان داریم که اولی فقط ۱۰ مهره سفید و دومی ۲۰ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه و در سومی ۳۰ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه وجود دارد. یکی از ظرف‌ها را به تصادف انتخاب کرده و یک مهره خارج می‌کنیم. احتمال این‌که مهره سفید باشد، چقدر است؟

$\frac{23}{36}$ (۴)

$\frac{27}{36}$ (۳)

$\frac{29}{36}$ (۲)

$\frac{25}{36}$ (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۰۳ در یک مهمانی ۴۰ درصد حاضرین خانم که ۶۰ درصد آن‌ها ازدواج کرده‌اند و ۷۰ درصد آقایان متأهل می‌باشند. اگر یکی از مهمان‌ها را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال این‌که مجرد باشد، چقدر است؟

۳۶٪ (۴)

۳۴٪ (۳)

۳۲٪ (۲)

۳۰٪ (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۰۴ در پرتاب سه سکه، اگر حداقل یک سکه پشت بیاید، یک تاس و در غیر این صورت دو تاس می‌اندازیم. با کدام احتمال عدد ۵ حداقل یک بار ظاهر می‌شود؟

$\frac{47}{48}$ (۴)

$\frac{51}{216}$ (۳)

$\frac{53}{288}$ (۲)

$\frac{51}{48}$ (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۰۵ در کیسه اول ۹ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و در کیسه دوم ۷ مهره سفید و ۵ مهره سیاه و در کیسه سوم ۳ مهره سفید و ۱ مهره سیاه وجود دارد. یکی از کیسه‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و یک مهره خارج می‌کنیم، احتمال این‌که مهره بیرون آمده سفید باشد کدام است؟

$\frac{9}{40}$ (۴)

$\frac{25}{36}$ (۳)

$\frac{16}{25}$ (۲)

$\frac{7}{20}$ (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳



۱۰۶ در جعبه A، ۴ موش سالم و ۲ موش مریض و در جعبه B، ۶ موش سالم و ۳ موش مریض وجود دارد. یک جعبه به تصادف انتخاب کرده و یک موش از آن خارج می‌کنیم. احتمال این‌که موش خارج شده مریض باشد چقدر است؟

- ۱ $\frac{1}{2}$ ۲ $\frac{1}{3}$ ۳ $\frac{3}{10}$ ۴ $\frac{1}{9}$

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۰۷ در یک همایش ۶۰ درصد افراد شرکت‌کننده تمایل به نوشیدن قهوه و ۳۰ درصد نسکافه و ۱۰ درصد چای دارند. که از دوستداران قهوه ۴۰ درصد آن‌ها و علاقه‌مندان نسکافه ۶۰ درصد و چای ۸۰ درصد آن‌ها تمایل به نوشیدن شیرین دارند. اگر یک نفر از افراد همایش را به تصادف انتخاب کنیم، احتمال این‌که نوشیدنی شیرین دوست داشته باشد چقدر است؟

- ۱ $\frac{1}{3}$ ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ $\frac{3}{5}$ ۴ $\frac{4}{5}$

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۰۸ دو جعبه یکسان B_1 و B_2 داریم که به ترتیب در آن‌ها ۳ مهره سفید، ۶ مهره قرمز و ۵ مهره سفید، ۸ مهره قرمز قرار دارد. از ظرف B_1 یک مهره به تصادف برداشته و در ظرف B_2 قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف B_2 خارج می‌کنیم. احتمال این‌که این مهره سفید باشد، چقدر است؟

- ۱ $\frac{5}{7}$ ۲ $\frac{7}{11}$ ۳ $\frac{8}{21}$ ۴ $\frac{7}{18}$

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۰۹ جعبه‌ای شامل ۵ توپ سفید و ۳ توپ آبی است. یک توپ به طور تصادفی از جعبه خارج می‌کنیم، اگر توپ خارج شده سفید باشد، یک توپ آبی به جعبه اضافه می‌کنیم و اگر توپ خارج شده آبی بود یک توپ سفید به جعبه اضافه می‌کنیم. تویی که از جعبه خارج شده به جعبه برگردانده نمی‌شود. حالا دومین توپ را به طور تصادفی از جعبه خارج می‌کنیم، احتمال این‌که این توپ سفید باشد چقدر است؟

- ۱ $\frac{7}{8}$ ۲ $\frac{19}{32}$ ۳ $\frac{3}{10}$ ۴ $\frac{21}{50}$

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۱۰ ۳ کیسه داریم که هر کدام شامل سه توپ سفید و ۲ توپ سیاه است. این ۳ کیسه را گروه A می‌نامیم. ۲ کیسه دیگر داریم که هر کدام شامل ۴ توپ سفید و یک توپ سیاه است و این ۲ کیسه را گروه B می‌نامیم. یک کیسه به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم و یک توپ بیرون می‌آوریم. احتمال این‌که سیاه باشد چقدر است؟

- ۱ $\frac{4}{25}$ ۲ $\frac{8}{27}$ ۳ $\frac{8}{25}$ ۴ $\frac{7}{27}$

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۱۱ در یک خوابگاه دانشجویی ۶۰ نفر در رشته‌های علوم پزشکی، ۴۰ نفر در رشته‌های علوم پایه و ۲۰ نفر در رشته‌های مهندسی اقامت دارند. از این تعداد به ترتیب ۲۰، ۱۰ و ۱۰ درصد سال اولی هستند. یک نفر به تصادف از این خوابگاه انتخاب می‌کنیم، احتمال این‌که سال اولی باشد چقدر است؟

- ۱ $\frac{3}{20}$ ۲ $\frac{7}{20}$ ۳ $\frac{9}{20}$ ۴ $\frac{11}{20}$

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۱۲ جعبه‌ای شامل ۸ توپ سفید و ۶ توپ سیاه است. یک توپ به طور تصادفی از جعبه خارج می‌کنیم و رنگ آن را مشاهده و سپس این توپ را با دو توپ دیگر به همین رنگ به جعبه برمی‌گردانیم. سپس یک توپ به طور تصادفی از جعبه خارج می‌کنیم. احتمال این‌که سفید باشد چقدر است؟

- ۱ $\frac{1}{7}$ ۲ $\frac{2}{7}$ ۳ $\frac{3}{7}$ ۴ $\frac{4}{7}$



۱۱۳

در یک سالن سینما در سه ردیف جلو ۳۰، ۲۰ و ۱۰ نفر نشسته‌اند که در این ردیف‌ها به ترتیب ۵، ۴ و ۲ نفر عینک زده‌اند. یک ردیف را انتخاب می‌کنیم و از آن ردیف یک نفر را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم، احتمال این‌که عینکی باشد چقدر است؟

$$\frac{13}{70} \quad (4)$$

$$\frac{15}{47} \quad (3)$$

$$\frac{17}{90} \quad (2)$$

$$\frac{11}{45} \quad (1)$$

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

۱۱۴

معلمی برای رفتن به مدرسه از وسایل نقلیه ماشین شخصی، اسنپ، مترو و اتوبوس استفاده می‌کند. احتمال این‌که از این وسایل استفاده کند به ترتیب $\frac{4}{9}$ ، $\frac{3}{9}$ ، $\frac{1}{9}$ و $\frac{1}{9}$ و احتمال این‌که با این وسایل نقلیه دیر به مدرسه برسد به ترتیب $\frac{1}{8}$ ، $\frac{1}{8}$ ، $\frac{2}{8}$ و $\frac{3}{8}$ است. احتمال این‌که به موقع به مدرسه برسد، چقدر است؟

$$\frac{2}{7} \quad (4)$$

$$\frac{5}{6} \quad (3)$$

$$\frac{1}{6} \quad (2)$$

$$\frac{2}{5} \quad (1)$$

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲



۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا حرف a را به m تغییر می‌دهیم تا با نصف قطر بزرگ بیضی آن را اشتباه نگیریم. پس کانون‌های بیضی $F(0,0)$ و $F'(0,m)$ هستند. پس:

$$FF' = 2c \Rightarrow |m| = 2c \Rightarrow c = \frac{|m|}{2} \quad (1)$$

$$A \in \text{بیضی} \Rightarrow AF + AF' = 2a \Rightarrow 3 + \sqrt{9 + m^2} = 2a \quad (2)$$

از طرف دیگر:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{c}{a} \Rightarrow 2a = 2\sqrt{2}c \xrightarrow{\text{از (1)}} 2 + \sqrt{9 + m^2} = \sqrt{2}|m|$$

$$\Rightarrow \sqrt{9 + m^2} = \sqrt{2}|m| - 2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 9 + m^2 = 2m^2 + 4 - 4\sqrt{2}|m| \Rightarrow m^2 - 4\sqrt{2}|m| = -5$$

اکنون دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$m > 0 \xrightarrow{|m|=m} m^2 - 4\sqrt{2}m = 0 \Rightarrow m(m - 4\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } m = 4\sqrt{2}$$

$$m < 0 \xrightarrow{|m|=-m} m^2 + 4\sqrt{2}m = 0 \Rightarrow m(m + 4\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } m = -4\sqrt{2}$$

مسلماً $m = 0$ قابل قبول نیست زیرا به‌ازای $m = 0$ به کانون $F'(0,0)$ می‌رسیم که همان کانون F است. پس $m = \pm 4\sqrt{2}$ بنابراین $c = 2\sqrt{2}$ و چون $2a = 2\sqrt{2}c$ پس $a = 4$ در نتیجه:

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - (2\sqrt{2})^2 = 8 \Rightarrow b = 2\sqrt{2} \Rightarrow \text{قطر کوچک} = 2b = 4\sqrt{2}$$

x تا سفید $2x$ تا سیاه

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲

$$P(\text{همرنگ نباشند}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{x}{1} \binom{2x}{1}}{\binom{3x}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x \times 2x}{\frac{(3x)(3x-1)}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 = \frac{9x^2 - 3x}{2} \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 3$$

$$3 + 6 = 9$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۳

$$\text{تفاضل } y \text{ ها: } y_1 - y_2 = (x^2 + 2x - 3) - (x^2 - 2x^2 + 1) = 2x^2 + 2x - 4$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$y_1 - y_2 = 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times -\frac{1}{2} - 4 = -4/5$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۴

$$y = |f(x)| = |x|(|x| + 3) = \begin{cases} x(x+3) & ; x \geq 0 \\ -x(-x+3) & ; x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 + 3x & ; x \geq 0 \\ x^2 - 3x & ; x < 0 \end{cases}$$

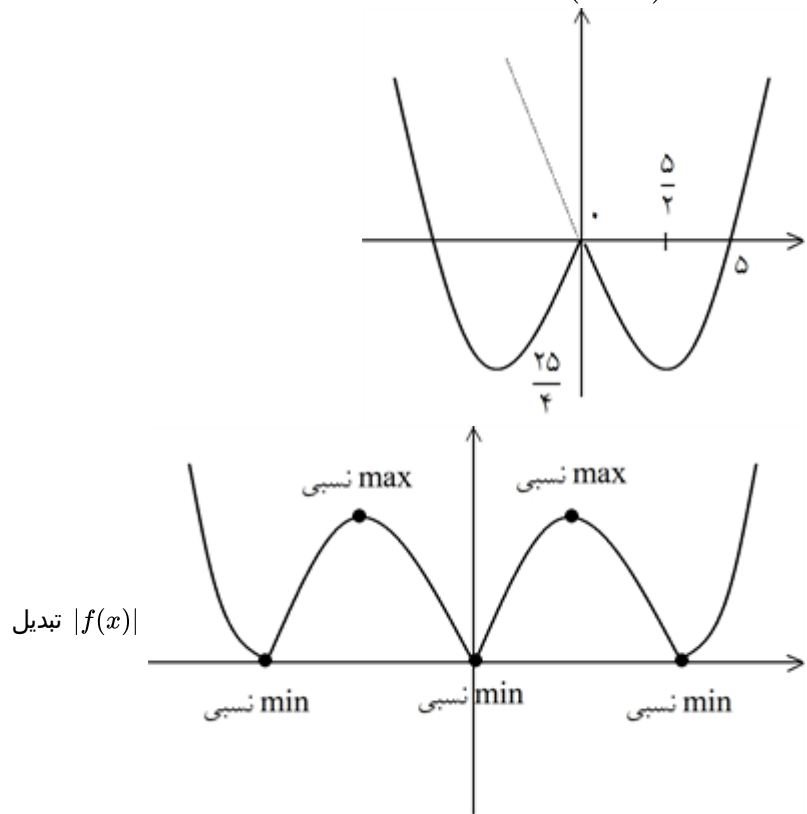
$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x + 3 & ; x > 0 \\ 2x - 3 & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = |f(x)| \text{ تابع در } R \text{ پیوسته است}$$

و $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ ، لذا تنها نقطهٔ بحرانی این تابع $x = 0$ می‌باشد.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۵

$$f(x) = |x|^2 - 5|x| = \left(|x| - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

تابع $y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$ که خاصیت $f(|x|)$ روی آن اجرا شده



تعداد max نسبی = ۲ = m $\Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{۳}{۲}$
تعداد min نسبی = ۳ = n

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۶

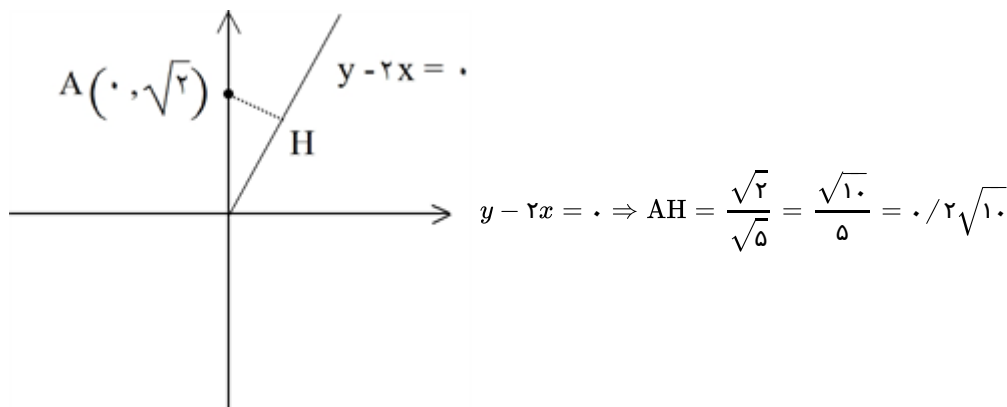
$$|AB| = |f_1(x) - f_2(x)| = |x^2 + 2x + 2| = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow |AB|_{\min} = 1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۷

تعداد رو	تاس
۳	۱
×	۲
×	۳
×	۴
×	۵
×	۶

$$\Rightarrow P = \frac{1}{6} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{48}$$





$$f(0) = f(a) = 0$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در ابتدا و انتهای بازه مقدار تابع صفر می‌شود.

پس در نقطه بحرانی درون بازه ماکزیمم می‌شود بنابراین:

$$f(x) = \pm \sqrt[3]{x^3(x-a)} \Rightarrow f'(x) = \pm \frac{3}{3} x^{-\frac{1}{3}}(x-a) + \sqrt[3]{x^3}(1)$$

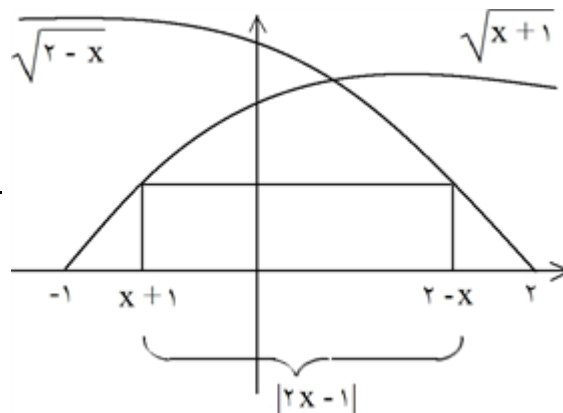
$$= \pm \frac{3x - 2a + 3x}{3\sqrt[3]{x}} = \pm \frac{6x - 2a}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow 6x = 2a \Rightarrow x = \frac{2a}{6}$$

$$f\left(\frac{2a}{6}\right) = 1/5$$

$$\text{استفاده از گزینه‌ها: } a = \frac{5}{2} \Rightarrow f\left(\frac{2}{5} \times \frac{5}{2}\right) = 1/5 \Rightarrow f(1) = 1/5 \checkmark$$

پس $a = \frac{5}{2} = 2.5$ می‌باشد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

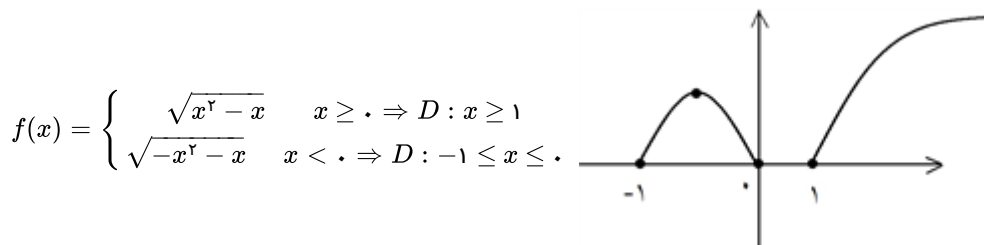


$$S = (2x-1)\sqrt{x+1}$$

$$S' = 2\sqrt{x+1} + \frac{2x-1}{\sqrt{x+1}} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



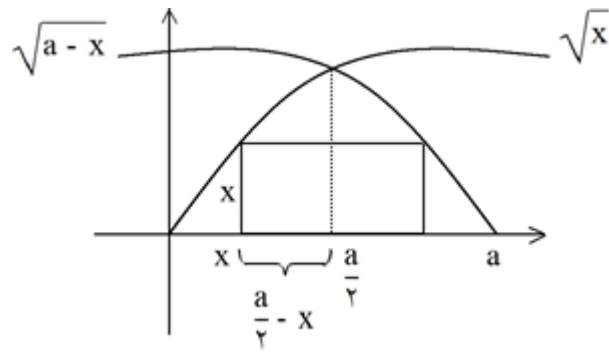
$$m = 1 \quad n = 0 \quad k = 2$$

$$\frac{km + n}{k - n} = \frac{2}{2} = 1$$



۱۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$S = \left(\frac{a}{2} - x\right) \sqrt{x}$$

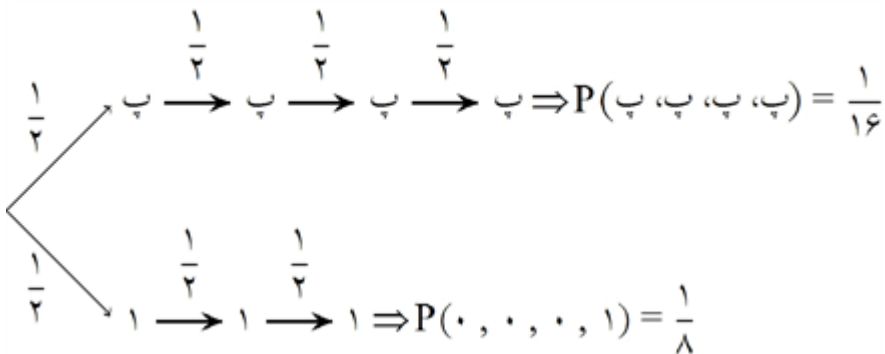
$$S' = \frac{a}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \sqrt{x} = \frac{\frac{a}{2} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$x = \frac{a}{4} \Rightarrow s\left(\frac{a}{4}\right) = \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{4}\right) \sqrt{\frac{a}{4}} = \frac{\sqrt{a}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} \sqrt{\frac{a}{4}} = \frac{\sqrt{a}}{2} \Rightarrow a = 2$$

۱۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{16}$$

۱۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x(|x| - 1) \leq 0 \Rightarrow x \leq -1, 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-x^2} & 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x+x^2} & x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} & 0 < x < 1 \\ \frac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}} & x < -1 \end{cases}$$

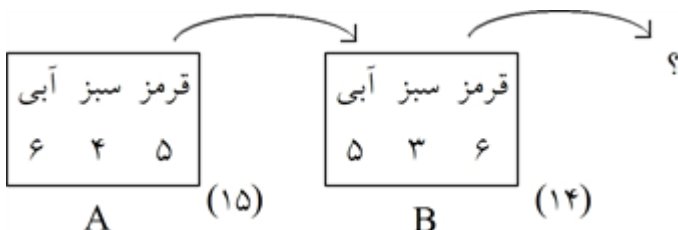
$$\text{نقاط بحرانی} \begin{cases} x = 0, x = 1, x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

این تابع ۴ نقطه بحرانی دارد که فقط $x = \frac{1}{2}$ ماکزیمم نسبی است. پس:

$$\begin{cases} m = 1 \\ n = 0 \\ k = 4 \end{cases} \Rightarrow m + n + k = 5$$

۱۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$P(B) = \frac{6}{15} \times \frac{6}{15} + \frac{4}{15} \times \frac{5}{15} + \frac{5}{15} \times \frac{5}{15} = \frac{81}{225} = 0.36$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۶

$$f(x) = x^2 - 12x + 2 \Rightarrow f'(x) = 2x - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 6$$

x	-6	6
f'	+	-
	↗	↘
	max	min
	نسبی	نسبی

$$f(6) = 36 - 72 + 2 = -34$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۷

$$f(x) = (x-1)|x| = \begin{cases} x(x-1) & x \geq 0 \\ x(1-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 0 \\ 1-2x & x < 0 \end{cases}$$

$$a+b = \frac{1}{2} \leftarrow a=0, b=\frac{1}{2}$$

تابع f در بازه $(0, \frac{1}{2})$ اکیداً نزولی است. بنابراین:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در ابتدا، بازه $(1, +\infty)$ باید زیرمجموعه دامنه تابع باشد، یعنی مجانب قائم نمودار در این

$$\Rightarrow 1-m \leq 1 \Rightarrow m \geq 0 \quad (1)$$

بازه نباشد:

از طرفی تابع باید نزولی باشد:

$$\Rightarrow y' = \frac{m(m-1)-2}{(x+m-1)^2} < 0 \Rightarrow m^2 - m - 2 = (m-2)(m+1) < 0 \Rightarrow -1 < m < 2 \quad (2)$$

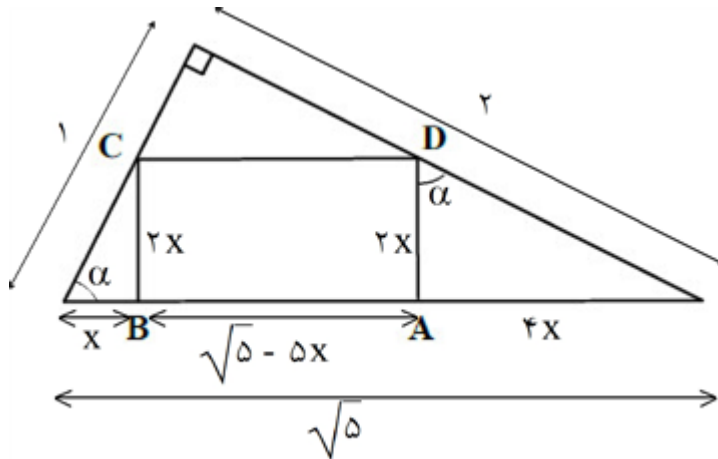
$$\xrightarrow{(1), (2)} 0 \leq m < 2 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 0, m = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۹

$$R_1 + \overline{O_1 O_2} + R_2 = 8 \Rightarrow \sqrt{2+a+5} + \sqrt{13-6a} = 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{2+a} + \sqrt{13-6a} = 3 \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه ها}} a = 2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون بحث نسبت هاست پس مثلاً ضلع کوچک را عدد یک و ضلع بزرگتر را ۲ می گیریم.

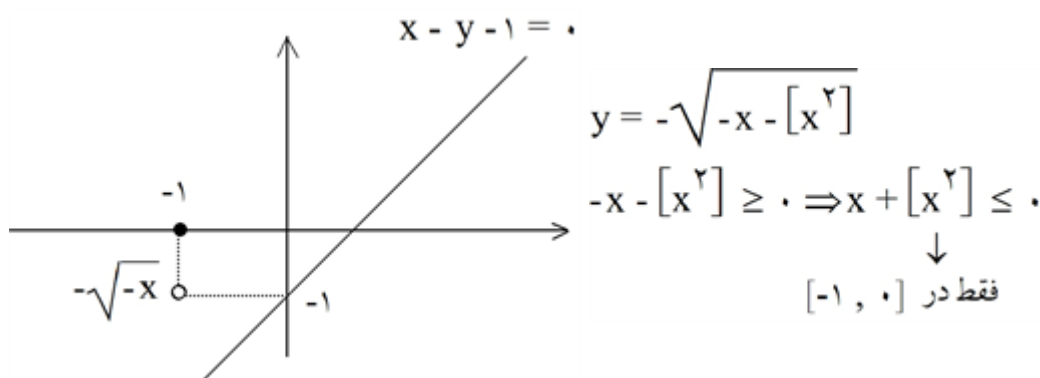


$$S = 2x(\sqrt{5} - 5x) = -5x^2 + 2\sqrt{5}x$$

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-2\sqrt{5}}{-10} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{\text{طول}}{\text{عرض}} = \frac{\sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{2} = 2.5$$





نقطه A را روی $-\sqrt{-x}$ در نظر بگیرید پس داریم:

$$\left| a + \sqrt{-a - 1} \right|$$

مشتق

$$1 - \frac{1}{2\sqrt{-a}} = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{\left| -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 \right|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

فاصله نقطه A از خط برابر است با:

$$\frac{\log x}{\log 9} + \frac{r \log r}{\log x^r} = \frac{a}{r \log r} + \frac{b}{r \log x}$$

$$ab = \frac{r}{r} \frac{a, b > 0}{\min\{a+b\}} \Rightarrow a = b = \sqrt{\frac{r}{r}} = \frac{\sqrt{r}}{r} \Rightarrow \min\{a+b\} = \frac{\sqrt{r}}{r} + \frac{\sqrt{r}}{r} = \frac{2\sqrt{r}}{r}$$

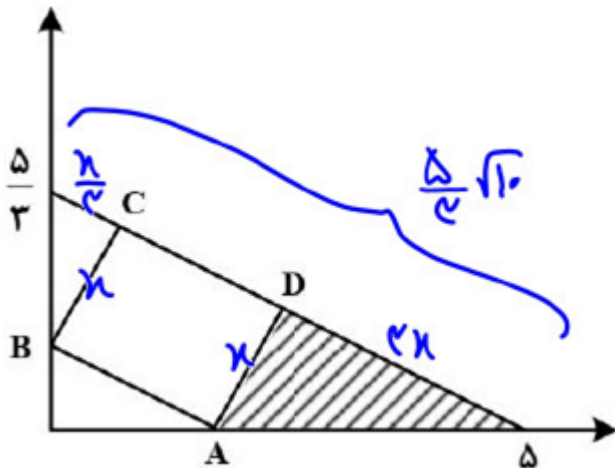
$$2x^2 + 2y^2 - 6x - 10y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 3x - 5y + \frac{1}{2} = 0$$

$$1 + \frac{25}{4} + 3 - \frac{25}{2} + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - \frac{25}{4} = -\frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \text{کوچکترین وتر} = 2\sqrt{-\left(\frac{-7}{4}\right)} = \sqrt{7}$$

$$0.4 \times 0.25 + 0.35 \times 0.3 + 0.25 \times 0.25 = 0.1 + 0.105 + 0.0625 = 0.2675$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۵



$$S = x \left(\frac{5}{2} \sqrt{10} - \frac{x}{2} - 3x \right) = \frac{1}{2} x (5\sqrt{10} - 10x)$$

$$= \frac{1}{2} x \left(\frac{\sqrt{10}}{2} - x \right)$$

حداکثر S در $x = \frac{\sqrt{10}}{4}$ رخ می‌دهد. پس مساحت هاشورخورده برابر است با:

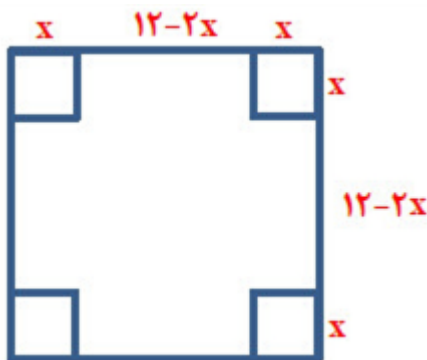
$$\frac{1}{2} x \times 3x = \frac{3}{2} x^2 = \frac{3}{2} \times \frac{10}{16} = \frac{15}{16}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۲۶

$$\begin{cases} 2y - 3x = 3 \xrightarrow{\times 2} 4y - 6x = 6 \\ 3y + 2x = 11 \xrightarrow{\times 3} 9y + 6x = 33 \end{cases} \Rightarrow 13y = 39 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow O'(1, 3)$$

$$OO' = \sqrt{1^2 + 3^2} \Rightarrow OO' = \sqrt{10}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۲۷



$$V(x) = x(12 - 2x)^2$$

$$\Rightarrow V'(x) = (12 - 2x)^2 - 2 \times 2x(12 - 2x) = 0$$

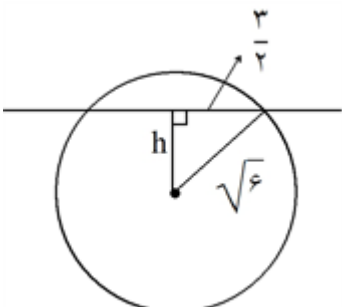
$$\Rightarrow (12 - 2x)(12 - 2x - 4x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 2 \end{cases}$$

$x = 6$ حجم را صفر (می‌نیم) می‌کند پس $x = 2$.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۲۸

$$x < 0 \Rightarrow y = ax^2 - bx \Rightarrow y' = 2ax - b \xrightarrow{y'(-1)=0} -2a - b = 0 \quad \otimes$$

$$A(-1, 2) \in y \Rightarrow 2 = a + b \xrightarrow{\otimes} a = -2, b = 4 \Rightarrow ab = -8$$



$$\begin{cases} O(2, -1) \\ R = \sqrt{6} \end{cases} \quad h = \sqrt{6 - \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$\frac{|-2 + 2 - a|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow |a| = \frac{5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{تفاضل} = 5\sqrt{3}$$

$$P(\text{عدد سوم} = 10) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n-2} = \frac{1}{n} = \frac{1}{15} \Rightarrow n = 15$$

۱۰ = تعداد مضارب غیر ۳ $\Rightarrow 5 = \text{تعداد} \Rightarrow \{3, 6, 9, 12, 15\} = \text{مضارب } 3 \Rightarrow 1, 2, 3, \dots, 15$ اعداد

$$P = \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} \times \frac{5}{13} = \frac{15}{91}$$

$$D_f = \left[0, \frac{a}{2}\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-2}{2\sqrt{a-2x}} = 0 \Rightarrow \sqrt{a-2x} = 2\sqrt{x} \Rightarrow a-2x = 4x \Rightarrow x = \frac{a}{6}$$

$$\left. \begin{aligned} f\left(\frac{a}{6}\right) &= \sqrt{\frac{a}{6}} + \sqrt{\frac{2a}{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}}\sqrt{a} \rightarrow \max \\ f(0) &= \sqrt{a} \\ f\left(\frac{a}{2}\right) &= \sqrt{\frac{a}{2}} \rightarrow \min \end{aligned} \right\} \max. \min = \frac{3}{\sqrt{12}}a = \sqrt{12} \Rightarrow a = 4$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{m-2}{m^2+1}$$

$$S'(m) = -\frac{m^2-2m-1}{(m^2+1)^2} \xrightarrow{S'(m)=0} m^2-2m-1=0 \Rightarrow m = 2 \pm \sqrt{5}$$

جدول تغییرات رفتار تابع $S(m)$ را می‌نویسیم:

m	$2-\sqrt{5}$	$2+\sqrt{5}$	
S'	-	+	-
S	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
	min	max	
	نسبی	نسبی	

پس در $m = 2 + \sqrt{5}$ تابع S بیشترین مقدار است.
تذکر:

اصل سؤال به صورت $f(x) = (m^2-1)x^2 + (2-m)x + 5$ بوده که در آن حالت، سؤال غلط می‌شد. چون نه $\frac{m-2}{m^2-1}$ ماکزیمم داشت و نه حتی به ازای $m = 2 + \sqrt{3}$ که ماکزیمم نسبی ایجاد می‌شد، معادله درجه ۲، ریشه می‌داشت.

۳۳

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x^r} & ; x < \cdot \\ \frac{x}{1-x^r} & ; x \geq \cdot \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1-x^r}{(1+x^r)^r} & ; x < \cdot \\ \frac{1+x^r}{(1-x^r)^r} & ; x \geq \cdot \end{cases}$$

تابع در $x = 0$ مشتق دارد و برابر یک است. ($f'(0) = 1$)

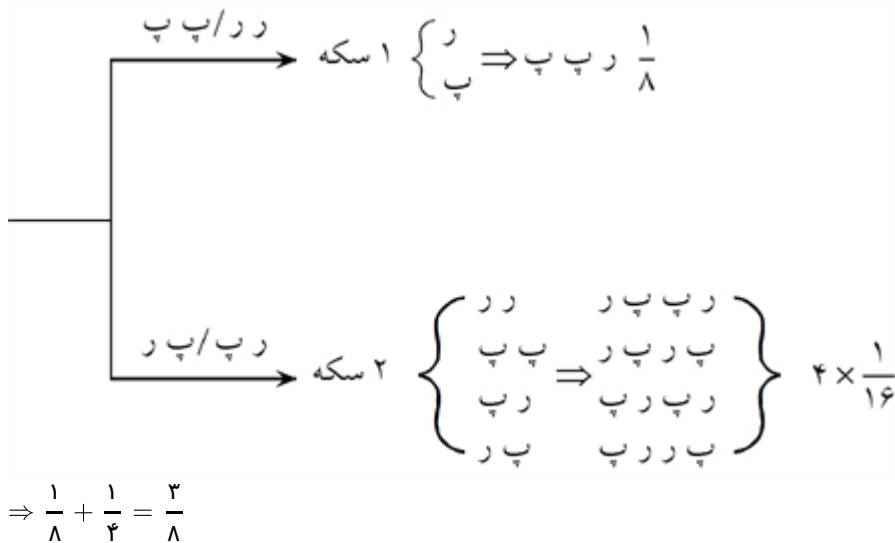
$$f'(-1) = 0.$$

و با توجه به دامنه هر ضابطه فقط در $x = -1$ مشتق برابر صفر دارد:

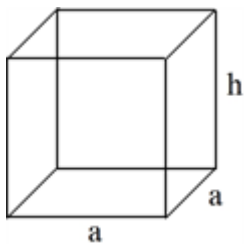
پس تابع فقط یک نقطه بحرانی دارد.

دقت کنید که $x = 1$ عضو دامنه تابع نیست و نباید لحاظ شود.

۳۴)



35)



$$V = a^{\mathfrak{r}}h = \mathfrak{r} \Rightarrow h = \frac{\mathfrak{r}}{a^{\mathfrak{r}}}$$

$$S = a^r + \mathfrak{r}ah = a^r + \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{e}}{a}$$

$$S' = \Upsilon a - \frac{1\mathfrak{f}}{a^{\Upsilon}} = \bullet \Rightarrow \Upsilon a = \frac{1\mathfrak{f}}{a^{\Upsilon}} \Rightarrow a^{\Upsilon} = \Lambda \Rightarrow \begin{matrix} a = \Upsilon \\ h = \mathfrak{y} \end{matrix}$$

$$S = a^r + \mathfrak{f}ah = \mathfrak{r} + \mathfrak{r} \times \mathfrak{r} \times \mathfrak{r} = \mathfrak{r}\mathfrak{r}$$

36

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقطه $A(.,.)$ نقطه اکسترمم نمودار تابع است ($f'(.) = 0$ و $f(0) = 0$)، پس تابع باید عامل x^2 را داشته باشد، در نتیجه $c = d = 0$ و $f(x) = ax^2 + bx^2$ است.

$$B \in \mathfrak{f} \Rightarrow f(\mathfrak{v}) = a + b = \mathfrak{v} \quad (I)$$

$$f'(x) = \mathfrak{r}ax^{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r}bx \xrightarrow{f'(1)=.} \mathfrak{r}a + \mathfrak{r}b = . \quad (\text{II})$$

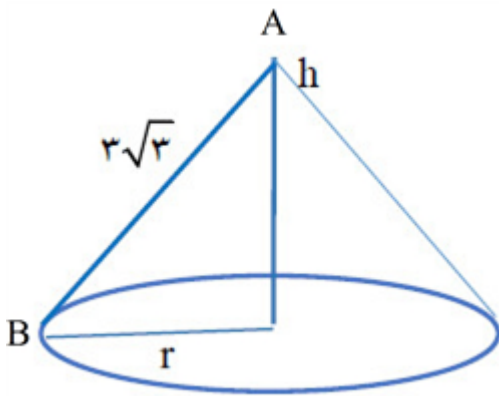
$$\xrightarrow[\text{(II)}]{\text{(I)}} a = -\mathfrak{r}, b = \mathfrak{r} \Rightarrow ab = -\mathfrak{r}$$

$$c = 12, 2b = 18 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow a = 10$$

37

$$e = \frac{c}{a} = \frac{12}{10} = 1.2$$





$$r^r + h^r = (r\sqrt{r})^r \Rightarrow r^r = r^r - h^r$$

$$V = \frac{1}{r}\pi r^r h = \frac{1}{r}\pi(r^r - h^r)h = \frac{\pi}{r}(r^r h - h^r)$$

$$V' = 0 \Rightarrow r^r - r h^r = 0 \Rightarrow h = r$$

$$y = x^r |x| + rax^r + b \xrightarrow{(-1,1)} 1 = 1 + ra + b \Rightarrow ra + b = 0 \Rightarrow b = -ra \Rightarrow \frac{b}{a} = -r$$

با فرض اول به جواب رسیدیم، ولی ادامه حل:

$$\Rightarrow y' = -rx^r + rax = -r(-1)^r + ra(-1) = 0 \Rightarrow a = \frac{-1}{r}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{r}{r}}{\frac{-1}{r}} = -r \quad b = \frac{r}{r} \text{ داریم:}$$

$$n(S) = 6 \times 6 \times 6$$

$$A: 10 \text{ مجموع} \Rightarrow \begin{cases} 1, 3, 6 \Rightarrow 3! = 6 \\ 1, 4, 5 \Rightarrow 3! = 6 \\ 2, 3, 5 \Rightarrow 3! = 6 \\ 2, 4, 4 \Rightarrow 3 \\ 2, 2, 6 \Rightarrow 3 \\ 3, 3, 4 \Rightarrow 3 \end{cases} \Rightarrow n(A) = 27$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{27}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{8}$$

روش دوم: جدول

	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
مجموع ۳ تاس	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱
تعداد حالات	$\binom{2}{2}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{7}{2}$	۲۵	۲۷

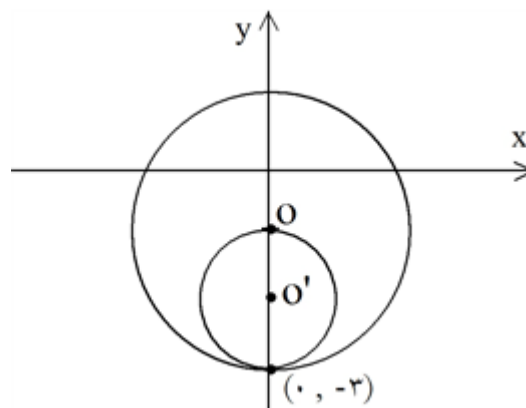
$$\Rightarrow P(A) = \frac{27}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{8}$$

$$x^2 + (y+1)^2 = 2^2 \Rightarrow R=2, O(0, -1)$$

مطابق شکل اگر دایره جدید بخواهد با دایره فعلی مماس داخل باشد و از نقطه $(0, -3)$ نیز عبور کند تنها حالت آن است که دایره مذکور تنها نقطه تماسش (نقطه مماس) همان نقطه $(0, -3)$ باشد. پس مرکز دایره جدید به فرم $O'(0, y)$ است.

شعاع دایره جدید نصف شعاع دایره داده شده $\rightarrow R'=1, O'=(0, -2)$

$$x^2 + (y+2)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$$



$$\frac{v}{10} = \text{نر اول}$$

$$\frac{6}{v} = \text{نر دوم به شرط نر اول} \Rightarrow \frac{6}{10} = \text{نر دوم به شرط نر اول} \times \text{نر اول}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2(x^2-2) - 2x(x^2-3)}{(x^2-2)^2} = \frac{2x^4 - 4x^2 + 6x}{(x^2-2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x^3-2x+3)}{(x^2-2)^2}$$

جدول تغییرات رفتار تابع را در بازه $(-2, 2)$ می‌نویسیم:

x	-2	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2
f'	-	o	+	o	+	o	-	o	+
f	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$-\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

پس نمودار تابع روی بازه‌های $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ و $(1, \sqrt{2})$ اکیداً نزولی است.

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} - x & ; x \leq 0 \\ 2\sqrt{x} + x & ; x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 & ; x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 & ; x > 0 \end{cases}$$

روی بازه $(0, +\infty)$ ، مشتق تابع همواره مثبت است بنابراین تابع اکیداً صعودی است. حال برای مقادیر $x < 0$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 1$$

داریم:

$$\Rightarrow x^2 \leq 1 \xrightarrow{x < 0} -1 \leq x < 0$$

چون تابع f پیوسته است پس فاصله‌ی صعودی کل بازه $[-1, +\infty)$ است.

۴۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر معادلات دایره‌ها را در یک دستگاه بنویسیم، با حذف x^2 و y^2 از دستگاه هر آنچه بماند معادله وتر مشترک است.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \cup$$

$$2y - 2x = 0 \Rightarrow x = y$$

۴۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

یک رقمی $\begin{cases} \text{تعداد کل} = 5 \\ \text{تعداد مضرب } 4 = 1 \end{cases}$

دو رقمی $\begin{cases} \text{تعداد کل} = 5 \times 4 = 20 \\ \text{مضرب } 4 = \{12, 24, 32, 52\} \Rightarrow \text{تعداد} = 4 \end{cases}$

سه رقمی $\begin{cases} \text{تعداد کل} = 5 \times 4 \times 3 = 60 \\ \text{تعداد مضرب } 4 = \boxed{\text{صدگان}} \boxed{\text{دو رقم}} = 3 \times 4 = 12 \end{cases}$

$\downarrow$ انتخاب ۳ $\downarrow$ {12, 24, 32, 52}

چهار رقمی $\begin{cases} \text{تعداد کل} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120 \\ \text{تعداد مضرب } 4 = \boxed{\text{هزارگان}} \boxed{\text{صدگان}} \boxed{\text{دو رقم}} = 3 \times 2 \times 4 = 24 \end{cases}$

$\downarrow$ انتخاب ۳ $\downarrow$ انتخاب ۲ $\downarrow$ {12, 24, 32, 52}

پنج رقمی $\begin{cases} \text{تعداد کل} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \\ \text{تعداد مضرب } 4 = \boxed{\text{ده هزارگان}} \boxed{\text{هزارگان}} \boxed{\text{صدگان}} \boxed{\text{دو رقم}} = 3 \times 2 \times 1 \times 4 = 24 \end{cases}$

$\downarrow$ انتخاب ۳ $\downarrow$ انتخاب ۲ $\downarrow$ انتخاب ۱ $\downarrow$ {12, 24, 32, 52}

$$P(A) = \frac{24 + 24 + 12 + 4 + 1}{120 + 120 + 60 + 20 + 5} = \frac{65}{325} = \frac{1}{5}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0./85}{0./9} = \frac{17}{18}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۴۷



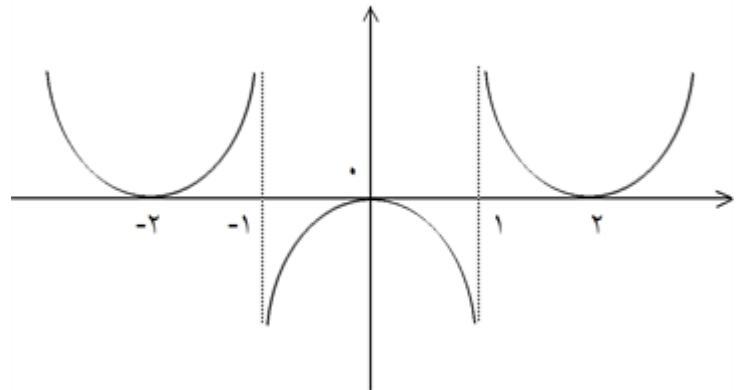
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $x = 0$ ریشه زوج تکرار تابع است پس یک نقطه اکسترمم نسبی است. نقاط $x = \pm 2$ ، نقاط گوشه تابع با توجه به همواره مثبت بودن تابع در اطراف آنها نیز نقاط اکسترمم تابع می‌باشد. مشتق تابع نیز فقط ریشه $x = 0$ را دارد.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} |x^2 - 4| = +\infty$$

بنابراین نمودار تقریبی به صورت زیر است:



با توجه به شکل تابع سه نقطه اکسترمم نسبی دارد.

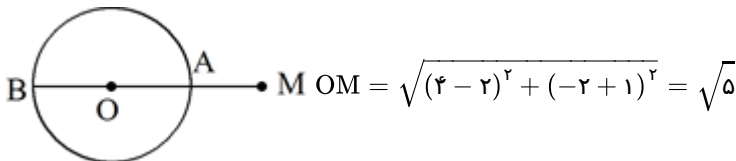
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقطه تلاقی قطره‌های $x + y = 1$ و $x - y = 3$ مرکز دایره است.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \xrightarrow{+} 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -1$$

پس مرکز دایره $O(2, -1)$ است. در ضمن فاصله‌ی O تا خط مماس $4x + 3y + 5 = 0$ برابر شعاع دایره است.

$$R = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4 - 3 + 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{6}{5} = 1.2$$

نزدیک‌ترین فاصله‌ی $M(4, -2)$ از دایره مساوی $|OM - R|$ است. بنابراین:



$$MA = \text{نزدیک‌ترین فاصله} = |OM - R| = \sqrt{5} - \frac{6}{5}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۵۰

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$n(B) = 30$

$$A \cap B = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$$

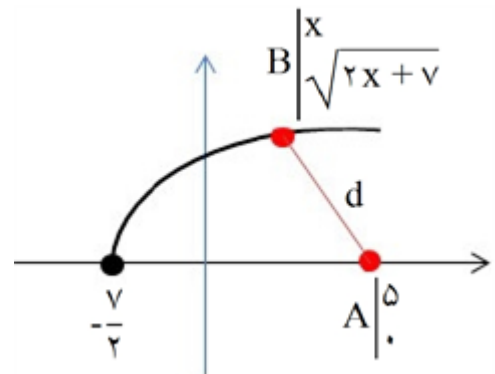
$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{6}{30} = 0.2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۵۱

$$p(A') = \frac{2 \times 9!}{10!} = \frac{1}{5}$$

$$p(A) = 1 - p(A') = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

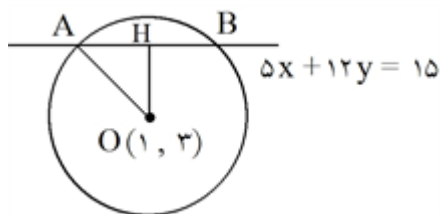
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۵۲



$$\begin{cases} A(5, 0) \\ B(x, \sqrt{2x+5}) \end{cases} \Rightarrow AB = \sqrt{(x-5)^2 + (\sqrt{2x+5}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 2x + 5}$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{x^2 - 8x + 30} \Rightarrow AB' = \frac{2x - 8}{2\sqrt{x^2 - 8x + 30}} = 0 \Rightarrow x = 4$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال وتر AB به طول $2\sqrt{21}$ است پس $AH = \sqrt{21}$ با به دست آوردن OH شعاع OA را پیدا می‌کنیم. ۵۳



$$OH = \frac{|5+36-15|}{\sqrt{25+144}} = \frac{26}{13} = 2$$

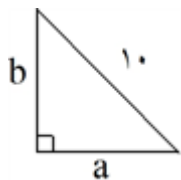
$$\begin{aligned} \triangle OAH : OA^2 &= OH^2 + AH^2 = 4 + 21 = 25 \\ \Rightarrow OA &= 5 \Rightarrow R = 5 \end{aligned}$$

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25 \quad \text{معادله دایره}$$

حال نقاط برخورد این دایره با محور xها را تعیین می‌کنیم.

$$y = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + 9 = 25 \Rightarrow (x-1)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 4 \Rightarrow x = 5 \\ x-1 = -4 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

نقاط تلاقی دایره با محور xها نقطه‌های $M(5, 0)$ و $N(-3, 0)$ است و فاصله‌ی این دو نقطه مساوی ۸ است. MN = 8



$$a^2 + b^2 = 100 \Rightarrow a^2 = 100 - b^2$$

$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi a^2 b \Rightarrow \frac{\pi}{3} (100 - b^2) b \Rightarrow V_{\text{مخروط}} = \frac{\pi}{3} (100b - b^3)$$

$$V' = \frac{\pi}{3} (100 - 3b^2) = 0$$

$$3b^2 = 100 \Rightarrow b = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a^2 = 100 - \frac{1000}{3} = \frac{200}{3} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{200} \times 10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{10\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}}{\frac{10\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{2}$$

$$P'(x) = 1 + \frac{-2x + 2}{2\sqrt{4x - x^2}} = 0$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{-2x + 2}{2\sqrt{4x - x^2}} = -1 \xrightarrow{\times -1} \frac{-2x + 2}{2\sqrt{4x - x^2}} = 1 \Rightarrow -2x + 2 = 2\sqrt{4x - x^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{2}(-x + 1) = \cancel{2}\sqrt{4x - x^2}$$

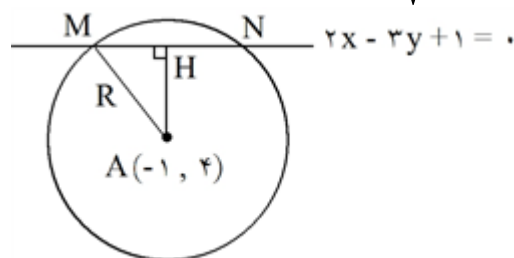
$$x^2 - 4x + 4 = 4x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 16 \Rightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{x=2+\sqrt{2}} y = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{4(2+\sqrt{2}) - (2+\sqrt{2})^2} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2} \text{ max}$$

$$\xrightarrow{x=2-\sqrt{2}} y = 2 - \sqrt{2} + \sqrt{4(2-\sqrt{2}) - (2-\sqrt{2})^2} = 2 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 \text{ min}$$

$$(2 + \sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2}) \Rightarrow d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \xrightarrow{y=x} = \frac{|2 + 2\sqrt{2} - 2 - \sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل و فرض $MN = 2\sqrt{v}$ نتیجه می‌گیریم $MH = \sqrt{v}$.

$$AH = \frac{|-2 - 12 + 1|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

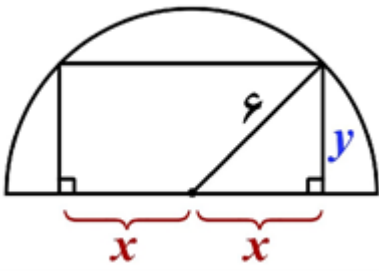
$$\triangle AMH : AM^2 = AH^2 + MH^2 \Rightarrow R^2 = 13 + v = 20$$

بنابراین معادله دایره به صورت $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 20$ است. حال دایره را با خط $y = 2$ قطع می‌دهیم.

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-4)^2 = 20 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow (x+1)^2 + (2-4)^2 = 20 \Rightarrow (x+1)^2 = 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1 = 4 \Rightarrow x = 3 \\ x+1 = -4 \Rightarrow x = -5 \end{cases}$$





$$S = rxy$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow S = rx\sqrt{r^2 - x^2} \xrightarrow{x>0} r\sqrt{r^2x^2 - x^4} \Rightarrow S' = r \left(\frac{r^2x - 2x^3}{\sqrt{r^2x^2 - x^4}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow r^2x - 2x^3 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{r^2}{2} \Rightarrow x = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

$$S_{\max} = r \left(\frac{r}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = r \left(\frac{r}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{r}{\sqrt{2}} \right) = \frac{r^3}{2}$$

$$f(x) = x|x| - 2x = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 0 \\ -x^2 - 2x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x \geq 0 \\ -2x - 2 & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ min} \\ -2x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ max} \end{cases}$$

$$A(1, -1) \Rightarrow AB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$B(-1, 1)$$

$$\begin{cases} P(A) = x \\ P(B) = \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \Rightarrow \frac{5}{9} = \frac{x}{2} + \frac{x}{4} - \frac{1}{4}x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{5}{9} = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{9}{4} - \frac{15}{9} = \frac{25}{36}$$

$$x = \frac{\frac{3}{4} \pm \frac{5}{6}}{1} \Rightarrow x = \frac{5}{3} \vee x = \frac{2}{3}$$

روش اول:

هر دو مهره سفید باشد هر دو مهره بعدی سفید باشد

$$P(A) = \frac{6}{11} \times \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{5}{11} \times \frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{6}{11} \times \frac{10}{45} + \frac{5}{11} \times \frac{6}{45} = \frac{2}{11}$$

مهره اول سیاه باشد مهره اول سفید باشد

روش دوم: در این روش مهره اول را در نظر نمی‌گیریم و فرض می‌کنیم دو مهره بعدی که باید سفید باشد، هر دو مهره اول است.

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{10}{55} = \frac{2}{11}$$



$$f(x) = x|x-2| = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \\ -x^2 + 4x & x < 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x > 2 \\ -2x + 4 & x < 2 \end{cases}$$

x	2	4
f'	+ 0 - 0 +	
f	↗ max ↘	↗ min ↘
	4	0

$$f' = 0 \Rightarrow x = 2$$

f' وجود ندارد $\Rightarrow x = 4$

$$\max(2, 4) \Rightarrow d = \sqrt{(2-4)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$$

$$2C = FF' = \sqrt{(2-2)^2 + (7+1)^2} = 8 \Rightarrow C = 4$$

$$2b = \text{قطر کوچک بیضی} = 2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow a = 5$$

بنابراین:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$x + y = 11 \quad (5, 6), (6, 5) \quad \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

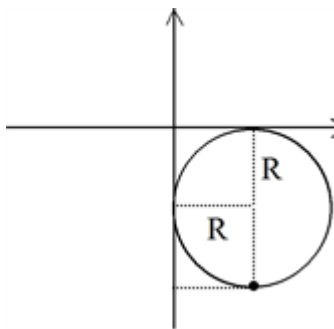
احتمال آمدن هر دو یکسان نیز $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ است.

فرض کنید در مرحله‌ی n ام برای اولین بار مثل هم بیایند و در تمام مراحل قبلی جمع ۱۱ نباشد. یعنی در هر گام احتمال

$$\frac{28}{36} \text{ همان } \frac{7}{9} \text{ داریم در گام } n \text{ ام } \frac{1}{6} \text{ خواهیم داشت:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1 - \frac{7}{9}}\right) = \frac{3}{4}$$

ولی سؤال دقیقاً پیشامد متمم را می‌خواهد که می‌شود: $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$



$$\begin{aligned} (x-R)^2 + (y+R)^2 &= R^2 \Rightarrow (1-R)^2 + (-2+R)^2 = R^2 \\ &\Rightarrow 1 + R^2 - 2R + 4 + R^2 - 4R = R^2 \\ &\Rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0 \Rightarrow (R-1)(R-5) = 0 \Rightarrow R = 1, 5 \end{aligned}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مجموع باید ۴، ۸ یا ۱۲ باشد. ۶۵

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$\text{مجموع } ۲: (1, 3), (2, 2), (3, 1)$$

$$\text{مجموع } ۸: (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$$

$$\text{مجموع } ۱۲: (6, 6)$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۶۶

$$f(x) = (30 + x) \left(4 - \frac{1}{10}x \right) = -\frac{1}{10}x^2 + x + 120 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2(-\frac{1}{10})} = 5$$

$$f(5) = (30 + 5) \left(4 - \frac{1}{10} \cdot 5 \right) = (35) \left(\frac{7}{2} \right) = 122.5$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هرگاه در مسائل احتمال لااقل یکی داشتیم از متمم استفاده می‌کنیم. ۶۷

$$P(A') = \frac{16}{100} \times \frac{25}{100} = \frac{4}{100} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{4}{100} = \frac{96}{100}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باید رنگ‌های مهره‌های خارج شده متفاوت باشد یعنی یکی سفید و یکی سیاه و یکی آبی باشد. ۶۸

$$P(A) = \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{1} \binom{3}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{3}{11}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۶۹

$$x - y - 1 = 0 \Rightarrow d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2 + 1 - 1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = R$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2 \xrightarrow{y=0} (x - 2)^2 = 1$$

$$x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$$

$$x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۷۰

$$[-4, 3]$$

$$x = -4 \Rightarrow y = -\frac{64}{3} - 16 + 6 = -\frac{80}{3}$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 9 - 45 = -36 \text{ min}$$

$$f'(x) = x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$$

$$x = -5 \quad x = -3$$

$$y = -9 - 9 + 45 = 27 \text{ max}$$

۷۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$P(A) = . / ۹$$

$$P(B) = . / ۸$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = . / ۷۲$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = . / ۹ + . / ۸ - . / ۷۲ = ۱ / ۷ - . / ۷۲ = . / ۹۸$$

۷۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$n(S) = ۶ \times ۶ = ۳۶$$

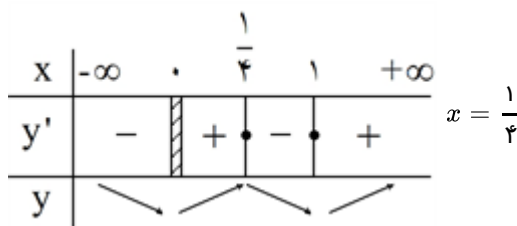
$$A = \left\{ (۱, ۲), (۲, ۳), (۳, ۴), (۴, ۵), (۵, ۶), (۲, ۱), (۳, ۲), (۴, ۳), (۵, ۴), (۶, ۵) \right\} \Rightarrow \frac{۱۰}{۳۶} = \frac{۵}{۱۸}$$

۷۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y' = ۲(x-۱)\sqrt[۳]{x} + (x-۱)^۲ \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}} = \frac{۶x(x-۱) + ۲(x-۱)^۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$$y' = \frac{۸x^۲ - ۱۰x + ۲}{۳\sqrt[۳]{x}} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = \frac{۱}{۲} \\ x = ۰ \end{cases}$$



۷۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. روش اول: برای این که دو مهره هم رنگ نباشند باید حالت های زیر رخ دهد:

یکی قرمز و یکی سیاه یا یکی قرمز و یکی سفید یا یکی سیاه و یکی سفید = هر دو غیرهم رنگ

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}} + \frac{\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}} + \frac{\binom{۲}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۰}{۲}} = \frac{۶}{۴۵} + \frac{۱۵}{۴۵} + \frac{۱۰}{۴۵} = \frac{۳۱}{۴۵}$$

دقت کنید که فضای نمونه ای برابر تعداد حالات انتخاب دو مهره از ده مهره است یعنی: $\binom{۱۰}{۲}$

روش دوم: از متمم آن استفاده می کنیم:

$$\Rightarrow P(A) = ۱ - P(\text{هر دو هم رنگ باشند}) = ۱ - \frac{\binom{۳}{۲} + \binom{۲}{۲} + \binom{۵}{۲}}{\binom{۱۰}{۲}} = ۱ - \frac{۳ + ۱ + ۱۰}{۴۵} = \frac{۳۱}{۴۵}$$

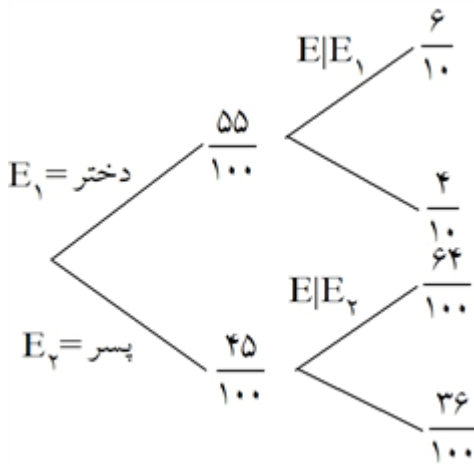
۷۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A = ۶x - \left(\frac{۱}{۲}x\right)^۲ = -\frac{۱}{۲}x^۲ + ۶x \Rightarrow x = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۶}{۲\left(-\frac{۱}{۲}\right)} = ۱۲$$

$$x = ۱۲ \xrightarrow{\text{جایگزینی}} -\frac{۱}{۲}(۱۲)^۲ + ۶(۱۲) = ۳۶$$





E = گذراندن واحدهای درسی

$$\Rightarrow P(E) = P(E_1) \cdot P(E|E_1) + P(E_2) \cdot P(E|E_2) = \frac{55}{100} \times \frac{6}{10} + \frac{45}{100} \times \frac{64}{100}$$

$$\frac{330}{1000} + \frac{2880}{10000} = \frac{330 + 288}{1000} = \frac{618}{1000} = 0.618 \Rightarrow 61.8\% \text{ درصد}$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ضابطه‌ی تابع $y = x|x^2 - 3|$ را ساده می‌کنیم. داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x(x^2 - 3) & |x| \geq \sqrt{3} \\ x(3 - x^2) & |x| < \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & |x| \geq \sqrt{3} \\ 3x - x^3 & |x| < \sqrt{3} \end{cases}$$

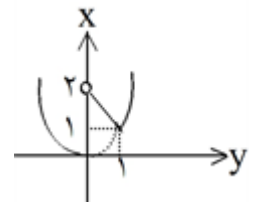
$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & |x| > \sqrt{3} \\ 3 - 3x^2 & |x| < \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 & \text{غ ق} \\ 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 & \text{ق ق} \end{cases}$$

با توجه به این که $x = \pm 1$ ، ریشه‌های ساده‌ی $f'(x)$ هستند، بنابراین هر دو اکسترمم نسبی هستند و همچنین با توجه به این که $f'_+(\sqrt{3}) = 6$ و $f'_-(\sqrt{3}) = -6$ (چرا؟) و $f'_-(-\sqrt{3}) = 6$ و $f'_+(-\sqrt{3}) = -6$ (چرا؟) است، لذا دو نقطه‌ی $x = \pm\sqrt{3}$ نیز اکسترمم‌های نسبی تابع f هستند.

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. برای بررسی نقاط اکسترمم نسبی و مطلق تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 & ; x \geq 1 \\ -x + 2 & ; 0 < x < 1 \\ x^3 & ; x \leq 0 \end{cases}$

از نمودار بهره می‌گیریم:

همان‌طور که در شکل مقابل مشاهده می‌کنید این تابع ماکزیمم نسبی و مطلق ندارد اما در $x = 1$ و $x = 0$ دارای مینیمم نسبی و در $x = 0$ دارای مینیمم مطلق می‌باشد.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می دانیم مرکز دایره روی خط $y = 2x$ قرار دارد، پس مختصات مرکز به صورت $O(\alpha, 2\alpha)$ می باشد. چون این دایره از دو نقطه $A(0, 0)$ و $B(3, 1)$ می گذرد، لذا فاصله ی مرکز دایره از این دو نقطه یکسان و برابر شعاع دایره است. بنابراین داریم:

$$OA = OB \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2\alpha - 0)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1)^2} \xrightarrow{\text{به توان می رسانیم}} \\ \alpha^2 + 4\alpha^2 = (\alpha^2 - 6\alpha + 9) + (4\alpha^2 - 4\alpha + 1) \Rightarrow \cancel{\alpha^2} = \cancel{\alpha^2} - 10\alpha + 10 \Rightarrow \alpha = 1 \\ \Rightarrow O(1, 2) \Rightarrow R = OA = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای تعیین طول های نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطه ی $f(x) = x^3 + \frac{2}{3}x^2 - 2x$ کافی است ابتدا از ضابطه ی تابع مشتق گرفته و سپس ریشه های ساده ی مشتق را مشخص کنیم:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 2 = 3x(x + \frac{2}{3}) - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \text{ ریشه ی ساده} \\ x = 1 \text{ ریشه ی ساده} \\ x = -\frac{2}{3} \text{ ریشه ی ساده} \end{cases} \Rightarrow \text{تابع شامل اکسترمم نسبی است}$$

حال با استفاده از جدول تغییرات تابع (آزمون مشتق اول) طول ماکزیمم نسبی این تابع به دست می آید.

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	0	1	$+\infty$
f'(x)	-	+	-	+	
f(x)		↘	↗	↘	↗
		min نسبی	max نسبی	min نسبی	

$\Rightarrow x = 0$ طول نقطه ی ماکزیمم نسبی تابع f است

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + a} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x - 2)(x + a) - (1)(x^2 - 2x)}{(x + a)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 2ax - 2a}{(x + a)^2}$$

برای این که تابع f دارای اکسترمم نسبی باشد، باید نقطه ی بحرانی داشته باشد و ضمناً f' در اطراف این نقطه تغییر علامت دهد. در تابع فوق این اتفاق زمانی می افتد که Δ عبارت درجه دوم $x^2 + 2ax - 2a$ مثبت باشد (اگر Δ این عبارت درجه دوم منفی باشد، تابع f فاقد نقطه ی بحرانی است و اگر Δ این عبارت صفر باشد، f' در اطراف نقطه ی بحرانی تغییر علامت نمی دهد). بنابراین:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (2a)^2 - 4(1)(-2a) > 0 \Rightarrow 4a^2 + 8a > 0 \Rightarrow$$

$$4a(a + 2) > 0 \xrightarrow{\text{خارج دو ریشه}} a < -2 \text{ یا } a > 0$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می دانیم در یک خانواده ی دو فرزندی یکی از فرزندان پسر (b) است، پس فضای نمونه ای با وجود این شرط به صورت $S = \{bb, bg, gb\}$ می باشد. حال برای محاسبه ی احتمال آن که این خانواده فرزند دختر داشته باشد، پیشامد تصادفی خواسته شده را می نویسیم. داریم:

$$A = \{bg, gb\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{2}{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از میان ۶ موش سفید و ۵ موش سیاه، سه موش را به تصادف انتخاب می کنیم. پس تعداد اعضای فضای نمونه ای برابر $n(S) = \binom{11}{3} = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$ است. حال احتمال این که هر سه موش انتخابی سفید باشند، برابر است با:

$$n(A) = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3}}{6 \times \cancel{3}} = 20 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{20}{165} = \frac{4}{33}$$



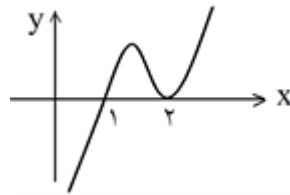
$$f(x) = (x-1)^6(x-2)^4 \rightarrow f'(x) = 6(x-1)^5(x-2)^4 + 4(x-2)^3(x-1)^6$$

x	$-\infty$	1	$\frac{22}{15}$	2	$+\infty$
y'		+	+	-	+
y			max	min	

$$\rightarrow f'(x) = (x-1)^6(x-2)^3(6x-14+4x-8) = (x-1)^6(x-2)^3(10x-22)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = \frac{22}{10} \end{cases}$$

روش دوم: تابع در اطراف $x = 2$ تغییر علامت نمی‌دهد چون ریشه‌ی مرتبه‌ی زوج است، واضح است که در اطراف $x = 2$ مقدار تابع مثبت است پس $x = 2$ طول می‌نیمد نسبی تابع است. از طرفی در طرف راست $x = 1$ مقدار تابع مثبت و در طرف چپ آن مقدار تابع منفی است. پس مقدار تابع به شکل مقابل است و همان‌طور که دیده می‌شود، این تابع یک



ماکزیمم نسبی و یک می‌نیمم نسبی دارد.

$$P = x^2 y \xrightarrow{y=18-x} P(x) = x^2(18-x) = 18x^2 - x^3$$

حال از مشتق‌گیری و تعیین نقاط بحرانی، اقدام به محاسبه‌ی بیش‌ترین مقدار P کنیم:

x	0	12	18
P'	-	+	-
P		Max	

$$P'(x) = 36x - 3x^2 \xrightarrow{P'=0} 3x(12-x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 12 \end{cases}$$

این تابع در $x = 12$ به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد و مقدار این ماکزیمم برابر است با:

$$\xrightarrow{x=12} P_{\max} = (12)^2(18-12) = 144 \times 6 = 864$$

$$P = x^2(18-x)$$

روش دوم: هرگاه مجموع دو عامل مثبت، مقداری ثابت باشد، آن‌گاه بیش‌ترین مقدار حاصل‌ضرب توان‌های مختلف آن‌ها به شرطی حاصل می‌شود که مقدار ثابت، بین آن‌دو متغیر به نسبت توان‌هایشان توزیع شود، به زبان ریاضی داریم:

$$(if \ u, v > 0) : u + v = k \xrightarrow{\text{برای آن که ماکزیمم شود}} \frac{u^\alpha v^\beta}{\text{ماکزیمم شود}} \text{ باشد } \frac{u}{\alpha} = \frac{v}{\beta} = \frac{v}{\beta}$$

در نتیجه با آگاهی از قضیه‌ی فوق خواهیم داشت:

$$x > 0, y > 0, x + y = 18 \xrightarrow{\text{جایگذاری در } x+y=18} \frac{x}{2} = \frac{y}{1} \rightarrow x = 2y$$

$$2y + y = 18 \rightarrow y = 6, x = 12 \rightarrow \text{Max}(x^2 y) = 12^2 \times 6 = 864$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ریشه‌های ساده‌ی درون قدرمطلق یعنی نقاط $x = 1$ و $x = -1$ بحرانی‌اند. حال به جستجوی سایر نقاط بحرانی می‌پردازیم:

$$f(x) = \begin{cases} x(x^2 - 1) & ; x^2 \geq 1 \\ x(-x^2 + 1) & ; x^2 < 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^3 - x & ; x^2 \geq 1 \\ -x^3 + x & ; x^2 < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f_1(x) = x^3 - x \Rightarrow f'_1(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \neq 1 \text{ غ ق } 1 \\ f_2(x) = -x^3 + x \Rightarrow f'_2(x) = -3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} < 1 \text{ ق ق } 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

پس نقاط $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ نیز نقاط بحرانی تابع هستند. بنابراین این تابع در مجموع ۴ نقطه‌ی بحرانی در بازه‌ی $(-2, 2)$ دارد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این‌که در صورت تست قید شده که در یک طرف، رودخانه قرار دارد، پس طناب مورد استفاده فقط سه طرف زمین مستطیلی را پوشش می‌دهد. یعنی طول طناب برابر با محیط مستطیل (به جز طولی که کنار رودخانه قرار دارد) می‌باشد که برابر است با: $L = 2y + x$. از طرفی خود مساله ماکزیمم مقدار مساحت را با توجه به محدودیت‌های مساله تعیین کرده است که می‌توان با استفاده از آن، به عدد دسترسی پیدا نمود.

$$S = xy \xrightarrow{x=L-2y} S = y(L - 2y) \Rightarrow S = Ly - 2y^2$$

$$S'_y = L - 4y \xrightarrow{S'_y=0} L - 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{L}{4}$$

$$S_{\max} = \frac{L}{4} \left(L - \frac{L}{2} \right) = \frac{L^2}{8} \xrightarrow{S_{\max}=648} \frac{L^2}{8} = 648 \Rightarrow L^2 = 8 \times 648$$

$$\Rightarrow L^2 = 16 \times 324 \Rightarrow L = 4 \times 18 = 72$$

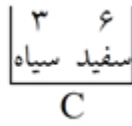
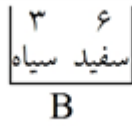
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم که معادله‌ی دایره‌ی مورد نظر $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ باشد و سه نقطه‌ی $A(0, 0)$ ، $B(2, 1)$ و $C(1, -2)$ نقاط روی این دایره می‌باشند پس مختصات آن‌ها در دایره صدق می‌کند:

$$\begin{cases} A \begin{cases} 0 + 0 + 0 + c = 0 \\ B \begin{cases} 4 + 1 + 2a + b + c = 0 \\ C \begin{cases} 1 + 4 + a - 2b + c = 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \xrightarrow{c=0} \begin{cases} 2a + b = -5 \\ a - 2b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -10 \\ a - 2b = -5 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} 5a = -15 \Rightarrow a = -3, b = 1$$

به این ترتیب معادله‌ی دایره به صورت $x^2 + y^2 - 3x + y = 0$ است و شعاع این دایره برابر است با:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 1} = \frac{1}{2} \sqrt{10}$$



از آن‌جا که یکی از سه ظرف به تصادف انتخاب می‌شود، احتمال انتخاب هریک برابر $\frac{1}{3}$ است. اگر از ظرف A، ۴ مهره به تصادف خارج کنیم، احتمال آن‌که ۲ مهره سفید باشد برابر است با:

$$\frac{\binom{4}{2} \times \binom{5}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{6 \times 10}{\frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1}} = \frac{60}{126} = \frac{10}{21}$$

اگر از هر یک دو ظرف B یا C مهره به تصادف خارج کنیم، احتمال آن‌که ۲ مهره سفید باشد برابر است با:

$$\frac{\binom{6}{2} \times \binom{3}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{15 \times 3}{126} = \frac{5}{14}$$

بنابراین جواب این احتمال برابر است با:

$$P = \binom{A}{\frac{1}{3} \times \frac{10}{21}} + \binom{B}{\frac{1}{3} \times \frac{5}{14}} + \binom{C}{\frac{1}{3} \times \frac{5}{14}} = \frac{1}{3} \left(\frac{10}{21} + 2 \times \frac{5}{14} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{10}{21} + \frac{5}{7} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{10+15}{21} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{25}{21} = \frac{25}{63}$$

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{1}{4} x^4 - x^3 - 2x^2 \rightarrow y' = x^3 - 3x^2 - 4x = 0$$

$$x(x^2 - 3x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \\ x = -1 \Rightarrow f(-1) = -\frac{7}{4} \\ x = 4 \Rightarrow f(4) = -32 \Rightarrow \min \end{cases}$$

باید توجه داشت که تابع در دو سر دامنه $(\pm\infty)$ به سمت $+\infty$ می‌رود.

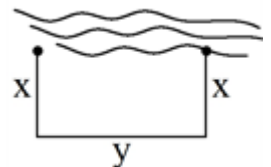
$$P(A) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{6 + 10}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است.

گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} S &= xy \\ 2x + y &= 11 \Rightarrow y = 11 - 2x \end{aligned} \right\} S = x(11 - 2x) \Rightarrow S = -2x^2 + 11x$$

$$x_{\text{راس}} = \frac{-11}{-4} = 2.75 \Rightarrow y = 5.5 \Rightarrow S = 2.75 \times 5.5 = 15.125 = 15 \frac{1}{8}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۹۳

$$n(S) = \binom{11}{3} = 165$$

$$n(A) = \binom{5}{0} \binom{6}{3} = 20$$

سفيد نباشد

$$\Rightarrow P(A) = \frac{20}{165} = \frac{4}{33} \Rightarrow P(A') = 1 - P(A) = \frac{29}{33}$$

حداقل يکي سفيد باشد

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۹۴

(دومی سفید ، اولی سیاه) یا (دومی سفید ، اولی سفید)

$$\frac{6}{15} \times \frac{5}{14} + \frac{9}{15} \times \frac{6}{14} = \frac{30 + 54}{15 \times 14} = \frac{84}{15 \times 14} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

روش دوم:

چون در مورد مهره‌ی اول صحبتی نشده است، می‌توان آن را در نظر نگرفت و فرض کنیم دومین مهره سفید باشد همان

$$\frac{\binom{6}{1}}{\binom{15}{1}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

اولین مهره سفید باشد، است. بنابراین داریم:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۹۵

$$n(S) = 5! = 120; A = \{(f, z, f, z, f)\} \Rightarrow n(A) = 12; P(A) = \frac{12}{120} = 0.1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از آزمون مشتق اول برای حل استفاده می‌کنیم: ۹۶

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (*)$$

مجموع ضرایب صفر است پس یک جواب $x = 1$ است و با تقسیم عبارت $x^2 - 3x + 2$ بر $x - 1$ بقیه‌ی جواب‌ها را می‌یابیم:

$$x^2 - 3x + 2 \Big| \frac{x-1}{x^2+x-2} = (x-1)(x+2) \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$

$$(*) \Rightarrow (x-1)^2(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ریشه ی مضاعف} \\ x = -2 \text{ ریشه ی ساده} \end{cases}$$

پس تابع تنها یک می‌نیمم نسبی دارد. دقت کنید چون $x = 1$ ریشه‌ی مضاعف f' است، f' در این نقطه تغییر علامت نمی‌دهد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در واقع نقاط $x = 3$ و $x = -5$ ریشه‌های مشتق تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ می‌باشند. ۹۷

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ x'' = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = -\frac{2a}{3} = -2 \Rightarrow a = 3 \\ P = \frac{b}{3} = -15 \Rightarrow b = -45 \end{cases}$$

باتوجه به تعیین علامت مشتق نقطه‌ی $x = 3$ طول مینیمم نسبی تابع می‌باشد که مقدار مینیمم نسبی (عرض مینیمم) برابر است با:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x \Rightarrow f(3) = 27 + 27 - 135 = -81$$

۹۸

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم عددی مضرب ۶ است که هم مضرب ۲ باشد و هم مضرب ۳. اگر چهار رقم ۳ و ۲ و ۱ و ۰ کنار هم قرار داده شوند. عدد حاصل، حتماً مضرب ۳ خواهد بود. پس کفایت تعداد اعداد چهار رقمی مضرب ۲ (زوج) را محاسبه کنیم، داریم:

الف) اگر رقم یکان صفر باشد. $\boxed{3} \boxed{2} \boxed{1} \boxed{0} = 6$

$$\Rightarrow n(A) = 6 + 2 = 8$$

ب) اگر رقم یکان ۲ باشد. $\boxed{2} \boxed{2} \boxed{1} \boxed{0} = 4$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

$$n(S) = \boxed{3} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{0} = 18$$

۹۹

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنید نقطه‌ای به طول x ماکزیمم نسبی باشد، پس طبق آزمون مشتق دوم، داریم:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{a}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 = a \Rightarrow 2a = 4x^3$$

و

$$f''(x) < 0 \Rightarrow 2 + \frac{2a}{x^3} < 0 \Rightarrow 2 + 4 \frac{x^3}{x^3} < 0 \Rightarrow 6 < 0$$

امکان ندارد یعنی این تابع هیچ‌گاه ماکزیمم نسبی نخواهد داشت.

۱۰۰

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

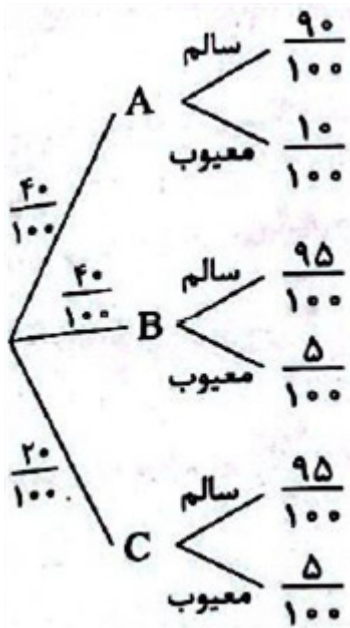
$$f(x) = \sqrt{|2x-2|} \Rightarrow f'(x) = \frac{\pm 1}{2\sqrt{|2x-2|}}$$

x	0	$\frac{2}{3}$	1
f(x)	$\sqrt{2}$	0	1

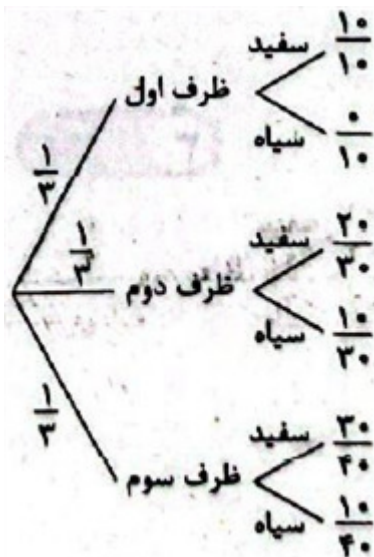
بنابراین نقطه‌ی بحرانی تابع $x = \frac{2}{3}$ است.

بنابراین ماکسیمم تابع $\sqrt{2}$ و می‌نیمم آن برابر ۰ است.





$$P(\text{معیوب}) = \frac{40}{100} \times \frac{10}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{20}{100} \times \frac{5}{100} = \frac{4}{100} + \frac{2}{100} + \frac{1}{100} = \frac{7}{100}$$



$$P(\text{سفید}) = \frac{1}{3} \times \frac{10}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{20}{30} + \frac{1}{3} \times \frac{30}{40} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{12 + 8 + 9}{12} \right) = \frac{29}{3 \times 12} = \frac{29}{36}$$

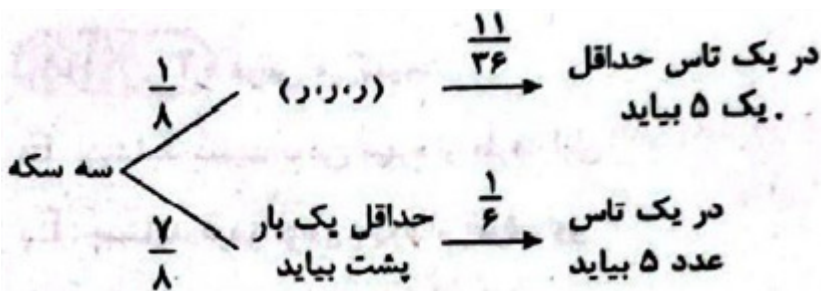


گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۰۳



$$P(\text{مجرد}) = \frac{40}{100} \times \frac{40}{100} + \frac{60}{100} \times \frac{30}{100} = \frac{16}{100} + \frac{18}{100} = \frac{34}{100}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۰۴



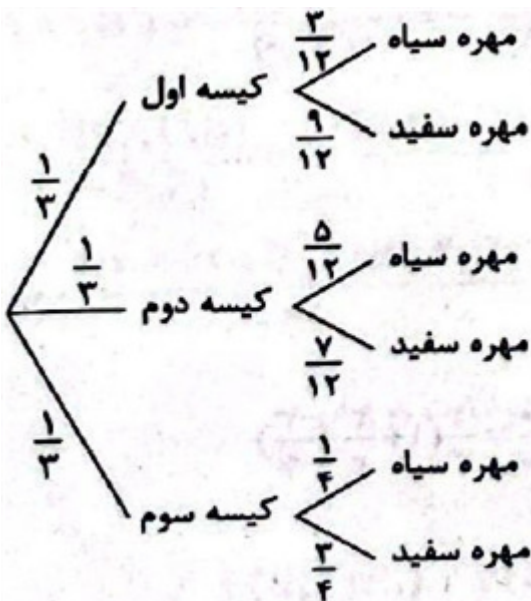
در دو تاس حداقل یک ۵ بیاید:

$$A = \{(1, 5), (2, 5), \dots, (5, 5), (6, 5), (5, 1), \dots, (5, 4), (5, 6)\}$$

$$n(A) = 11$$

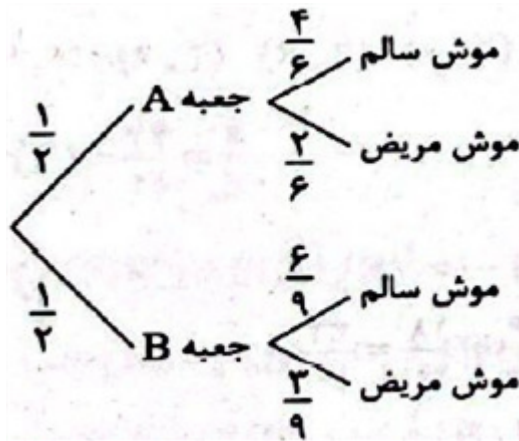
$$P(\text{احتمال موردنظر}) = \frac{1}{8} \times \frac{11}{36} + \frac{7}{8} \times \frac{1}{6} = \frac{53}{288}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۰۵



M: پیشامد مهره بیرون آمده سفید باشد:

$$P(M) = \frac{1}{3} \times \frac{9}{12} + \frac{1}{3} \times \frac{7}{12} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{36} + \frac{7}{36} + \frac{3}{36} = \frac{9+7+3}{36} = \frac{19}{36}$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۰۶

E: پیشامد این که موش خارج شده مریض باشد.

$$P(E) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۰۷

A: پیشامد این که فرد انتخاب شده دوستدار نوشیدنی شیرین باشد و پیشامد G، N و T به ترتیب دوستدار قهوه، نسکافه، چای است:

بنابه قانون احتمال کل داریم:

$$P(A) = P(G) \cdot P(A|G) + P(N) \cdot P(A|N) + P(T) \cdot P(A|T) \\ = \frac{60}{100} \times \frac{40}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{60}{100} + \frac{10}{100} \times \frac{80}{100} = \frac{24}{100} + \frac{18}{100} + \frac{8}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم: ۱۰۸

E_1 : پیشامد سفید بودن مهره از ظرف اول

E_2 : پیشامد قرمز بودن مهره از ظرف اول

A: پیشامد سفید بودن مهره از ظرف دوم

بنا به قانون احتمال کل داریم:

$$P(A) = P(E_1) \cdot P(A|E_1) + P(E_2) \cdot P(A|E_2) = \frac{3}{9} \times \frac{6}{14} + \frac{6}{9} \times \frac{5}{14} = \frac{18 + 30}{9 \times 14} \\ = \frac{48}{9 \times 14} = \frac{8}{21}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۰۹

E_1 : پیشامد خارج کردن توپ سفید و اضافه کردن یک توپ آبی

E_2 : پیشامد خارج کردن توپ آبی و اضافه کردن یک توپ سفید

A: پیشامد خارج کردن توپ سفید برای بار دوم

با استفاده از قانون احتمال کل داریم:

$$P(A) = P(E_1) \cdot P(A|E_1) + P(E_2) \cdot P(A|E_2) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{8} + \frac{3}{8} \times \frac{6}{8} = \frac{20}{64} + \frac{18}{64} = \frac{38}{64} = \frac{19}{32}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. A_1 و A_2 و A_3 را گروه A در نظر می‌گیریم و B_1 و B_2 را گروه B در نظر می‌گیریم.

بنابراین: $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{5}$

اگر E را پیشامد بیرون آمدن یک توپ سیاه در نظر بگیریم بنابراین:

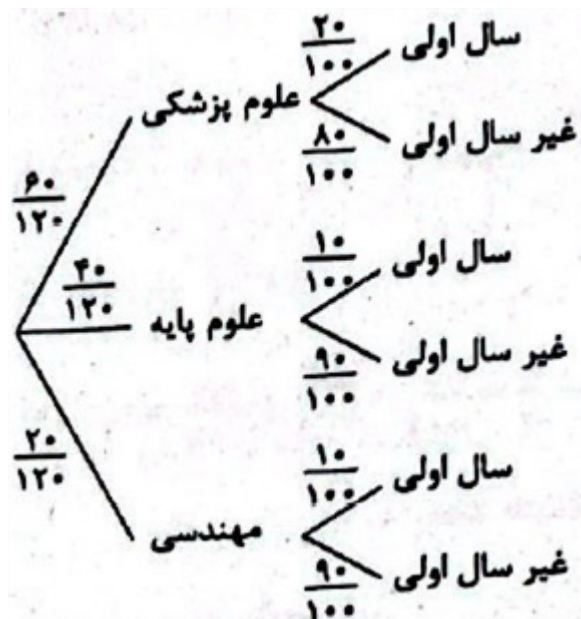
$$P(E|A_1) = P(E|A_2) = P(E|A_3) = \frac{2}{5}$$

$$P(E|A_1) = P(E|A_2) = \frac{1}{5}$$

$$P(E) = 3 \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{6}{25} + \frac{2}{25} = \frac{8}{25}$$

با استفاده از قانون احتمالات داریم:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$P(\text{سال اولی}) = \frac{60}{120} \times \frac{20}{100} + \frac{20}{120} \times \frac{10}{100} + \frac{20}{120} \times \frac{10}{100} = \frac{12}{120} + \frac{4}{120} + \frac{2}{120} = \frac{18}{120} = \frac{3}{20}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از قانون احتمال کل استفاده می‌کنیم.

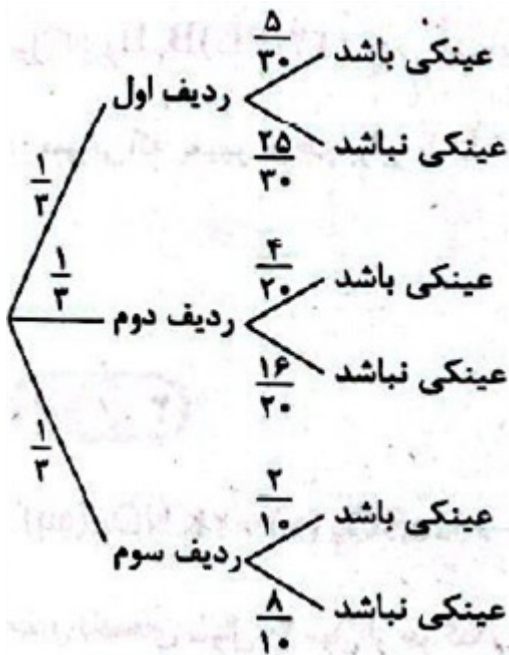
E_1 : پیشامد این‌که اولین توپ خارج شده، سفید است.

E_2 : پیشامد این‌که اولین توپ خارج شده، سیاه است.

A: پیشامد این‌که دومین توپ خارج شده سفید است.

$$P(E_1) = \frac{8}{14} \quad P(E_2) = \frac{6}{14} \quad P(A|E_1) = \frac{10}{16} \quad P(A|E_2) = \frac{8}{16}$$

$$P(A) = P(E_1) \cdot P(A|E_1) + P(E_2) \cdot P(A|E_2) = \frac{8}{14} \times \frac{10}{16} + \frac{6}{14} \times \frac{8}{16} = \frac{80 + 48}{14 \times 16} = \frac{4}{7}$$



$$P(E) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{30} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{20} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{10} = \frac{1}{3} \left(\frac{5}{30} + \frac{4}{20} + \frac{2}{10} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{10 + 12 + 12}{60} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{34}{60} = \frac{17}{90}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر پیشامد استفاده از وسایل نقلیه ماشین، اسنپ، مترو و اتوبوس به ترتیب C, S, M و B در نظر بگیریم. بنابراین: ۱۱۴

$$P(C) = \frac{4}{9}, P(S) = \frac{2}{9}, P(M) = \frac{1}{9}, P(B) = \frac{1}{9}$$

اگر E پیشامد به موقع رسیدن معلم به مدرسه باشد، E' پیشامد دیر رسیدن است. پس با استفاده قانون احتمال کل داریم:

$$P(E) = P(C) \cdot P(E|C) + P(S) \cdot P(E|S) + P(M) \cdot P(E|M) + P(B) \cdot P(E|B)$$

$$= \frac{4}{9} \times \frac{7}{8} + \frac{2}{9} \times \frac{7}{8} + \frac{1}{9} \times \frac{6}{8} + \frac{1}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{28 + 14 + 6 + 5}{72} = \frac{51}{72} = \frac{17}{24}$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴

۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴

۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	۳	۴
۸۸	۱	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	۳	۴
۹۰	۱	۲	۳	۴
۹۱	۱	۲	۳	۴
۹۲	۱	۲	۳	۴
۹۳	۱	۲	۳	۴
۹۴	۱	۲	۳	۴
۹۵	۱	۲	۳	۴
۹۶	۱	۲	۳	۴

۹۷	۱	۲	۳	۴
۹۸	۱	۲	۳	۴
۹۹	۱	۲	۳	۴
۱۰۰	۱	۲	۳	۴
۱۰۱	۱	۲	۳	۴
۱۰۲	۱	۲	۳	۴
۱۰۳	۱	۲	۳	۴
۱۰۴	۱	۲	۳	۴
۱۰۵	۱	۲	۳	۴
۱۰۶	۱	۲	۳	۴
۱۰۷	۱	۲	۳	۴
۱۰۸	۱	۲	۳	۴
۱۰۹	۱	۲	۳	۴
۱۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۱۴	۱	۲	۳	۴

