



سوال ۱۷۹

هندسه ۳

۱) نقطه $(0, a)$ و مبدأ مختصات، کانون های یک بیضی بوده و $(-3, 0)$ یک نقطه واقع بر آن است. اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{1}{\sqrt{2}}$ باشد، طول قطر کوچک بیضی کدام است؟

۴ $3\sqrt{2}$

۳ $3\sqrt{6}$

۲ $6\sqrt{2}$

۱ $6\sqrt{6}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲) مساحت مثلثی برابر ۱۶ و مختصات وسط اضلاع آن نقاط $(1, 4, a)$ ، $(3, b, a)$ و $(9, b, a)$ هستند. مجموع مقادیر ممکن برای b کدام است؟

۴ -10

۳ 10

۲ -5

۱ 5

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳) اگر $x = 3$ معادله خط هادی سهمی به معادله $x^2 - 2y + 4x = a$ باشد، مقدار a کدام است؟

۴ 9

۳ 8

۲ 7

۱ 6

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل ضرب درایه های A چند برابر حاصل ضرب درایه های A^2 است؟

۴ 1

۳ -1

۲ 3

۱ -3

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵) اگر $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ و $3I - 2A^{-1}B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -12 & -11 \end{bmatrix}$ باشد، کوچکترین درایه ماتریس $3B^{-1} - 2A^{-1}$ کدام است؟

۴ 2

۳ 1

۲ -14

۱ -11

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶) نقطه $A(\alpha, \beta)$ روی سهمی $x = -y^2 + 5y - 6$ قرار دارد. اگر فاصله نقطه A از کانون سهمی برابر $1/5$ باشد، مقدار α کدام است؟

۴ -2

۳ -1

۲ 1

۱ 2

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴ تیرماه



۷) برای ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، اگر $C = A \times B$ و $D = B \times C \times A$ باشد، $|D|$ کدام است؟

- ۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴ تیرماه

۸) اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $D = BA^T B$ کدام است؟

- ۱) ۸ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) -۸ ۴) $-\frac{8}{3}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴ تیرماه

۹) اگر $\vec{u}$ بردار یکه در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{v}$ بردار یکه در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $2\vec{b}$ باشد، مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ تولید می‌شود، کدام است؟

- ۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴ تیرماه

۱۰) نقطه $A(\alpha, \beta)$ روی سهمی $y^2 + 2x + 3y + 2 = 0$ قرار دارد. اگر فاصله نقطه A از کانون سهمی برابر $\frac{2}{5}$ باشد، اختلاف مقادیر ممکن برای β کدام است؟

- ۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱) اگر ماتریس‌های $A = B \times C$ و $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشند، درایه واقع در سطر سوم ستون اول ماتریس A^0 کدام است؟

- ۱) -۱۶ ۲) -۳۲ ۳) -۸ ۴) -۶۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲) اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|(AB)^2|$ کدام است؟

- ۱) $\frac{16}{9}$ ۲) $\frac{25}{9}$ ۳) ۱۶ ۴) ۲۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

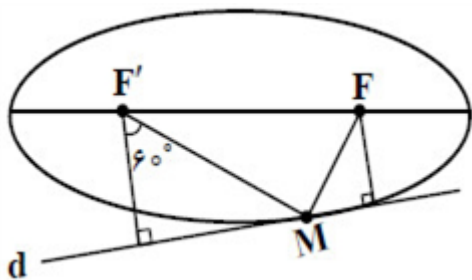
۱۳) اگر $\vec{e}_1$ بردار یکه در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{e}_2$ بردار یکه در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $2\vec{b}$ باشد، طول یکی از قطرهای متوازی‌الاضلاعی که توسط بردارهای $\vec{e}_1$ و $\vec{e}_2$ تولید می‌شود، کدام است؟

- ۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی



۱۴ در شکل مقابل، خط d در نقطه M بر بیضی مماس است. اگر فاصله بین پای عمودهای رسم شده از دو کانون F و F' بر خط d برابر $2\sqrt{3}$ باشد، طول قطر بزرگ بیضی کدام است؟



۴ ۶

۳ ۴

۲ ۳

۱ ۲

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۱۵ مختصات مرکز دایره‌ای که از نقطه $(\frac{4}{5}, \frac{0}{5})$ بگذرد و بر خط $3x - 2y = 6$ در نقطه $(2, 0)$ مماس باشد، کدام است؟

۴ $(\frac{3}{5}, -1)$

۳ $(4, -\frac{3}{5})$

۲ $(\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$

۱ $(\frac{2}{5}, 4)$

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۱۶ برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ با درایه‌های صحیح و ماتریس $B = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & a \\ \cdot & \sqrt{2}b & \cdot \\ c & \cdot & d \end{bmatrix}$ ، اگر $|A| = 2$ و $B^T = 2I$ باشد، حاصل ضرب درایه‌های غیرصفر ماتریس B^T کدام است؟

۴ $-2\sqrt{2}$

۳ $-32\sqrt{2}$

۲ $2\sqrt{2}$

۱ $32\sqrt{2}$

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۱۷ برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، اگر $|A^T + kA - A| = 125$ باشد، دترمینان $(k+1)I_3$ کدام است؟

$(k \in \mathbb{Z})$

۴ -64

۳ -8

۲ 8

۱ 64

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۱۸ اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، 60° باشد، اندازه تصویر قائم بردار $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ بر امتداد بردار $\vec{a}$ کدام است؟

۴ $\frac{3}{2}$

۳ $\frac{1}{2}$

۲ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۱۹ اگر $\log(3x+1) = \begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix}$ باشد، مقدار $\log \frac{x}{\sqrt{2}}$ کدام است؟

۴ $\frac{1}{2}$

۳ 2

۲ -2

۱ $-\frac{1}{2}$

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۲۰ سهمی $y = 2ax^2 - 5x + 18a$ در نقطه A بر نیمساز ناحیه سوم محورهای مختصات مماس است. مقدار a ، کدام است؟

۴ $\frac{5}{2}$

۳ $\frac{1}{2}$

۲ $-\frac{1}{2}$

۱ $-\frac{5}{2}$

۲۱) نقاط $F(a, 0)$ و $F(0, 0)$ کانون‌های یک بیضی و $A(0, -1)$ یک نقطه واقع بر آن است. اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{2}{\sqrt{5}}$ باشد، مقدار a کدام است؟ (با اندکی تغییر)

- ۱) $2\sqrt{5}$ ۲) $-2\sqrt{5}$ ۳) $-4\sqrt{5}$ ۴) $8\sqrt{5}$

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۳

۲۲) مساحت مثلثی برابر ۶۴ و مختصات وسط اضلاع آن نقاط $A(3, a, b)$ ، $B(-1, -a, b)$ و $C(5, -4, b)$ هستند. طول ضلع AB کدام می‌تواند باشد؟ (با اندکی تغییر)

- ۱) $2\sqrt{10}$ ۲) $4\sqrt{10}$ ۳) $8\sqrt{2}$ ۴) $10\sqrt{2}$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۲۳) خط $x = -\frac{5}{4}$ خط هادی سهمی به معادله $3y^2 - 3x - ay = 0$ است. اختلاف مقادیر a کدام است؟

- ۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۲۴) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های A^T چند برابر مجموع درایه‌های A است؟

- ۱) ۱ ۲) -۱ ۳) -۳ ۴) ۳

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۲۵) اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ و $2I - 3A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $2A - 3B^{-1}$ کدام است؟

- ۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۲۶) یک متوازی‌السطوح توسط بردارهای $\vec{a} = (2, -3, 4)$ ، $\vec{b} = (-1, 2, 3)$ و $\vec{c} = (3, -2, 1)$ تولید شده و صفحه P شامل بردارهای b و c است. اندازه ارتفاع این متوازی‌السطوح عمود بر صفحه P ، کدام است؟

- ۱) $\sqrt{5}$ ۲) $5\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ۴) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۲۷) کانون‌های یک بیضی نقاطی با طول $x = 3$ و $x = -3$ روی محور x ها هستند. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{1}{3}$ باشد، طول قطر کوچک این بیضی کدام است؟

- ۱) $15\sqrt{2}$ ۲) $12\sqrt{2}$ ۳) $8\sqrt{2}$ ۴) $6\sqrt{2}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۲۸) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، سطر سوم ماتریس A^T کدام است؟

- ۱) $[-10 \ 1 \ 5]$ ۲) $[-10 \ 1 \ 7]$ ۳) $[7 \ 5 \ -5]$ ۴) $[7 \ 5 \ -2]$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت



۲۹ اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۲ و $AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ باشد، حاصل ضرب درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی ماتریس

$$B - \frac{2}{2}A \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & \frac{2}{2} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$$

۴ -۹

۳ ۹

۲ -۳

۱ ۳

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۳۰ خطی به معادله $y + 2x = 0$ ، عمودمنصف خط‌المرکزین دو دایره است که شعاع یکی نصف شعاع دیگری است. اگر معادله دایره بزرگ‌تر به صورت $x^2 + y^2 + 6x - 2y = a$ و خط مفروض بر دایره کوچک‌تر مماس باشد، مجموع طول نقاط برخورد دو دایره کدام است؟

۴ -۱

۳ ۱

۲ $-\frac{\sqrt{15}}{2}$

۱ $\frac{\sqrt{15}}{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۱ اگر دو بردار ناصفر $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ و $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ بر هم عمود باشند، مساحت متوازی‌الاضلاعی را که توسط بردارهای

ناصفر $\frac{3\vec{a}}{|\vec{b}|} - \frac{2\vec{b}}{|\vec{a}|}$ و $\frac{\vec{a}}{|\vec{b}|} - \frac{2\vec{b}}{|\vec{a}|}$ ساخته می‌شود، کدام است؟

۴ $6/4$

۳ $4/8$

۲ $3/2$

۱ $1/6$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۲ نمودار سهمی با مختصات رأس $(-2, -2)$ ، از نقطه $(-1, 1)$ می‌گذرد. طول وتری که از کانون بر محور سهمی عمود رسم می‌شود، کدام است؟

۴ ۹

۳ ۸

۲ ۴

۱ ۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۳ اگر $a = (\text{Log } 25)^2 - (\text{Log } 4)^2$ و $A = \begin{bmatrix} 1.0 \frac{a}{2} & 2 \frac{a}{2} \\ 5 \frac{a}{2} & 1.0 \frac{a}{2} \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $\left| \frac{1}{3}A \right|$ کدام است؟

۴ $\frac{75}{24}$

۳ $\frac{25}{24}$

۲ $\frac{75}{8}$

۱ $\frac{25}{8}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۴ خط d به معادله $y - x = 0$ ، عمودمنصف خط‌المرکزین دو دایره است که شعاع یکی ۲ برابر دیگری است. اگر خط d بر دایره کوچک‌تر به معادله $x^2 + y^2 + 6x - 2y = r$ مماس باشد، حاصل ضرب طول نقاط برخورد دو دایره کدام است؟

۴ $\frac{65}{64}$

۳ $\frac{65}{32}$

۲ $\frac{5}{4}$

۱ $\frac{5}{2}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه



۳۵ فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهای ناصفري هستند كه ضرب داخلي آنها، $-\frac{3}{5}$ حاصل ضرب اندازه‌هاي دو بردار است. مساحت

مثلي را كه توسط بردارهاي $\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ و $\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ ساخته مي‌شود، كدام است؟

۱/۶ (۴)

۳/۲ (۳)

۴/۸ (۲)

۶/۴ (۱)

سراسري-رياضي-۱۴۰۲ تيرماه

۳۶ نمودار سهمي با مختصات رأس $(-۱, -۱)$ ، از نقطه $(۱, ۱)$ مي‌گذرد. اگر از دو سر و تری كه از كانون بر محور سهمي عمود است، دو خط موازي با محور سهمي بر خط هادي عمود كنيم، يك مستطيل رسم مي‌شود. قطر مستطيل حاصل كدام است؟

$\sqrt{۳}$ (۴)

$۳\sqrt{۲}$ (۳)

$\sqrt{۵}$ (۲)

$۵\sqrt{۲}$ (۱)

سراسري-رياضي-۱۴۰۲ تيرماه

۳۷ اگر $A = \begin{bmatrix} \text{Log}_6 ۳ & \text{Log}_6 ۲ \\ \text{Log}_6 ۲ & \text{Log}_6 ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۶^{|A|} & ۲^{|A|} \\ ۳^{|A|} & ۳۶^{|A|} \end{bmatrix}$ باشد، مقدار دترمینان B ، كدام است؟

$\frac{۱۵}{۸}$ (۴)

$\frac{۹}{۸}$ (۳)

$\frac{۱۵}{۴}$ (۲)

$\frac{۹}{۴}$ (۱)

سراسري-رياضي-۱۴۰۲ تيرماه

۳۸ در سهمي $۴y^۲ - ۲by - ۳۲x + a = ۰$ ، نقطه $\left(\frac{۱}{۲}, -۲\right)$ رأس سهمي است. مقدار $a - b$ كدام است؟

۴۸ (۴)

۴۰ (۳)

۳۲ (۲)

۲۴ (۱)

سراسري-رياضي-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۳۹ اگر $x + ay = ۳$ و $x + by = c$ به ترتيب خطوط مماس و قائم بر دایره $x^۲ + y^۲ + \alpha x + y = \beta$ در نقطه $(۱, -۱)$ باشند، مقدار $\alpha + \beta$ كدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

-۱ (۱)

سراسري-رياضي-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۴۰ اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۰ \\ ۴ & ۲ & -۵ \\ -۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و ماتريس X در رابطه ماتريسي $\begin{bmatrix} \sqrt{|A|} & ۰ \\ ۰ & -\sqrt{|A|} \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}$ صدق كند، كوچك‌ترين درايه ماتريس X كدام است؟

۵/۵ (۴)

۵ (۳)

۴/۵ (۲)

۴ (۱)

سراسري-رياضي-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۴۱ اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & y \\ ۰ & x & ۰ \\ ۱ & ۰ & z \end{bmatrix}$ و $A^۲$ ماتريس اسكالر باشد، حاصل $x^۲ - y + z$ كدام است؟

صفر (۴)

-۶ (۳)

-۲ (۲)

۳ (۱)

سراسري-رياضي-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۴۲) قطرهای یک بیضی روی خطوط $2y - 3x = 3$ و $3y + 2x = 11$ قرار دارند. فاصله مرکز بیضی تا مبدأ مختصات، چقدر است؟

۴ $\sqrt{5}$

۳ ۵

۲ $\sqrt{10}$

۱ ۱۰

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۴۳) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $||A||$ کدام است؟

۴ ۱۶

۳ -۱۶

۲ ۱

۱ -۱

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۴۴) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & x-1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & -1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، به ازای کدام مقدار x ، مجموع درایه‌های قطر اصلی و فرعی ماتریس D برابر هستند؟

۴ ۶

۳ ۵

۲ -۳

۱ -۴

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۴۵) از کانون سهمی $y^2 - x - 4y + 2 = 0$ خطی عمود بر محور تقارن آن رسم می‌شود تا سهمی را در نقاط A و B قطع کند. مساحت مثلثی با رئوس A ، B و رأس سهمی، چقدر است؟

۴ $\frac{1}{12}$

۳ $\frac{1}{8}$

۲ $\frac{1}{4}$

۱ $\frac{1}{3}$

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۴۶) اندازه تصویر قائم بردار $(2, -a, 3)$ بر امتداد بردار $(1, 0, a)$ برابر $\frac{5}{\sqrt{2}}$ است. اختلاف مقادیر a کدام است؟

۴ $\frac{10}{7}$

۳ $\frac{3}{2}$

۲ ۷

۱ ۲

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۴۷) دو دایره با شعاع یکسان در نقاط $(1, 4)$ و $(3, 2)$ همدیگر را قطع می‌کنند. اگر فاصله بین مراکز دو دایره، دو برابر فاصله بین نقاط تقاطع باشد، فاصله بین نقاط برخورد یکی از دایره‌ها با محور x ها کدام است؟

۴ $4\sqrt{2}$

۳ $2\sqrt{2}$

۲ ۶

۱ ۸

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۴۸) فاصله دو کانون بیضی $x^2 + 4y^2 - 16y - 2x + 16 = 0$ ، کدام است؟

۴ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳ $\sqrt{3}$

۲ $\frac{\sqrt{15}}{2}$

۱ $\sqrt{15}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۹) معادله دایره‌ای که بر دو دایره $x^2 - 8x + y^2 + 15 = 0$ و $x^2 - 2x + y^2 = 0$ مماس خارج است و مرکزش روی یکی از محورها قرار دارد، کدام است؟

۲ $x^2 + y^2 - 5x + 6 = 0$

۱ $x^2 + y^2 + 5x + 6 = 0$

۴ $4x^2 + 4y^2 + 20x + 25 = 0$

۳ $4x^2 + 4y^2 - 20x + 25 = 0$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی



۵۰) اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 کدام است؟

- ۱) $[1 \ -1 \ 0]$ ۲) $[9 \ 12 \ 16]$ ۳) $[1 \ 0 \ -2]$ ۴) $[9 \ 5 \ -7]$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۱) ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ ، α و β دو عدد حقیقی هستند که $\alpha A + \beta I = A^{-1}$. مقدار $\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

- ۱) -4 ۲) 4 ۳) -2 ۴) 2

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵۲) دو بردار که اندازه یکی دو برابر دیگری است، با هم زاویه 60° درجه می‌سازند. زاویه بین بردار بزرگ‌تر و تفاضل دو بردار، چند درجه است؟

- ۱) 30 ۲) 45 ۳) 60 ۴) 120

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۵۳) سه بردار $\vec{a} = (1, 1, 0)$ ، $\vec{b} = (-1, 2, 0)$ و $\vec{c}$ غیر واقع در یک صفحه و $\vec{h} = (x, y, 4)$ بردار ارتفاع متوازی‌السطوح حاصل از این سه بردار است. اگر $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1$ و $\vec{b} \cdot \vec{c} = 5$ باشد، اندازه بردار $\vec{c}$ کدام است؟

- ۱) 5 ۲) 4 ۳) $\sqrt{19}$ ۴) $\sqrt{21}$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۵۴) در سهمی $2y^2 - 2xy + 8x + b = 0$ نقطه $(-1, 1)$ رأس سهمی است. مقدار $\frac{a}{b}$ چقدر است؟

- ۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $-\frac{1}{5}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۵۵) به ازای هر m ، معادله $(m-2)x + (m+1)y = 6$ ، معادله قطری از دایره C است. اگر نقطه $A(-1, 1)$ روی دایره C باشد، محیط دایره C کدام است؟

- ۱) $2\sqrt{2}\pi$ ۲) 2π ۳) 3π ۴) $2\sqrt{3}\pi$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۵۶) اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ و ماتریس X در رابطه ماتریسی $X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ صدق کند، کوچک‌ترین درایه قطر اصلی ماتریس X کدام است؟

- ۱) -15 ۲) -3 ۳) 6 ۴) 8

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۵۷) اگر $A = \begin{bmatrix} x-1 & -x \\ 0 & 4 \\ y & z & z \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2z & \frac{1}{2} & 2 \\ 2z & 0 & -4y \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ و ماتریس AB به ازای $y \in \mathbb{Z}$ ماتریس اسکالر باشد، مقدار xy کدام است؟

- ۱) -1 ۲) -2 ۳) 1 ۴) 2

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱



۵۸ دایره‌ی $x^2 + y^2 + 2y = 3$ مفروض است. معادله‌ی دایره‌ای که با دایره‌ی قبلی مماس داخل بوده و از نقطه‌ی $(0, -3)$ گذشته و قطر آن با شعاع دایره‌ی داده شده برابر باشد، کدام است؟

۱ $x^2 + y^2 - 4x = 3$ ۲ $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$

۳ $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ ۴ $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۵۹ اگر $A = (-1, 2, 0)$ ، $B = (1, 0, -1)$ و $C = (0, -1, 1)$ ، سه رأس مثلث ABC باشند، طول ارتفاع AH کدام است؟

۱ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ۲ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ۳ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ۴ $2\sqrt{3}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۶۰ کدام عبارت زیر درست است؟

۱ مجموعه‌ی خطوط عمود بر یک خط در فضا، بی‌نهایت صفحه در فضا تشکیل می‌دهند.

۲ مجموعه‌ی نقاطی که از یک خط مفروض در فضا، متساوی‌الفاصله‌اند، روی سطح یک کره قرار می‌گیرند.

۳ مجموعه‌ی نقاطی که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه‌ی ثابت در فضا، به یک اندازه باشند، روی محیط یک بیضی قرار می‌گیرند.

۴ مجموعه‌ی خطوط گذرا از یک نقطه که با محور گذرا از آن نقطه، زاویه‌ی یکسان می‌سازند، روی سطح یک مخروط قرار می‌گیرند.

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۶۱ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $AA^T B = 52I$. اگر $|B| = 104$ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a ، کدام است؟

۱ -۲ ۲ صفر ۳ ۱ ۴ ۲

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۶۲ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، مجموع عناصر روی قطر اصلی ماتریس A ، کدام است؟

۱ ۱۲ ۲ ۱۷ ۳ ۱۹ ۴ ۲۱

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۶۳ اگر ماتریس ناصفر $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ چنان باشد که $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4b_1 \\ 4b_2 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه مقدار a ، کدام است؟

۱ -۴ ۲ صفر ۳ ۴ ۴ ۱۲

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۶۴ بردارهای $\vec{a} = (-1, \alpha, 2)$ و $\vec{b} = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 2\right)$ در فضا مفروض‌اند. اگر بردار $(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b})$ موازی بردار

$\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ باشد، مقدار α ، کدام است؟

۱ صفر ۲ ۱ ۳ ۳ ۴ هیچ مقداری برای α به دست نمی‌آید.

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۶۵ دایره‌های $x^2 + y^2 + 2y = 3$ و $x^2 + y^2 + 2x = 3$ متقاطع‌اند. معادله‌ی وتر مشترک این دو دایره، کدام است؟

$x = 1 - y$ (۴)

$x = -y$ (۳)

$x = 1 + y$ (۲)

$x = y$ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۰

۶۶ فرض کنید خطوط $x + y = 1$ و $x - y = 3$ قطرهای یک دایره و خط $4x + 3y + 5 = 0$ مماس بر آن باشد. نزدیک‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی $M(4, -2)$ از دایره، کدام است؟

$\sqrt{5} - 2$ (۴)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

$\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (۲)

$\sqrt{3} - 1$ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۶۷ سهمی $6 - 12y = (x - 1)^2$ با رأس F و کانون F' مفروض است. یک بیضی با کانون‌های F و F' و خروج از مرکز $6/5$ می‌سازیم. فاصله‌ی مرکز بیضی از مبدأ مختصات، کدام است؟

۲ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۶۸ کدام عبارت درست است؟

(۱) مجموعه نقاطی از فضا که از دو خط موازی به یک فاصله باشند، در تعداد نامتناهی صفحه قرار می‌گیرند.

(۲) مجموعه نقاطی از فضا که از دو خط موازی به یک فاصله باشند، در صفحه‌ی عمود بر آن دو خط قرار می‌گیرند.

(۳) مجموعه نقاطی از فضا که از یک نقطه و یک خط که از آن نقطه نمی‌گذرد، به یک فاصله باشد، روی منحنی سهمی شکل قرار دارند.

(۴) مجموعه نقاطی از فضا که مجموع فاصله‌های هر نقطه‌ی آن از دو نقطه‌ی ثابت در فضا، به یک اندازه باشند، روی محیط یک بیضی قرار می‌گیرند.

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۶۹ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. اگر $BA^T A = 53I$ باشد، ماکزیمم مقدار درایه‌های ماتریس B ، کدام است؟

۲۸ (۴)

۲۴ (۳)

۱۸ (۲)

۱۴ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۷۰ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس A ، کدام است؟

۱۳ (۴)

۱۲ (۳)

۵ (۲)

۳ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۷۱ بردار $\vec{a} = (-1, \alpha, 1)$ با محور z در فضا زاویه‌ی 45° درجه می‌سازد. اگر $\vec{b} = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 2\right)$ و زاویه‌ی بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ با

محور z ها، θ باشد، مقدار $\cos \theta$ ، کدام است؟

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)

$\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۳)

$-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۲)

$-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰



۷۲ فرض کنید $\log_{\frac{5}{2}}(3x-2) = 1$ ، مقدار x ، کدام است؟

۴ $\frac{7}{3}$

۳ ۴

۲ $\frac{17}{3}$

۱ ۹

سراسری-ریاضی-۱۴۰۰

۷۳ فرض کنید $A(-1, 9)$ رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ گذرا بر نقطه‌ی $(3, 1)$ باشد. این سهمی از کدام یک از نقاط زیر، می‌گذرد؟

۴ $(1, 5)$

۳ $(2, 5)$

۲ $(5, -9)$

۱ $(5, -7)$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۷۴ جواب‌های معادله‌ی $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & x+5 \\ x-1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0$ ، کدام است؟

۴ $-3, 8$

۳ $-4, 9$

۲ $3, -8$

۱ $4, -9$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۵ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ و ماتریس X ، جواب معادله‌ی $AX = A^{-1}$ ، باشد. ماتریس X ، کدام است؟

۴ $\begin{bmatrix} 16 & -7 \\ -25 & 14 \end{bmatrix}$

۳ $\begin{bmatrix} 16 & -7 \\ -28 & 21 \end{bmatrix}$

۲ $\begin{bmatrix} 32 & -14 \\ -56 & 25 \end{bmatrix}$

۱ $\begin{bmatrix} -32 & 14 \\ 48 & -25 \end{bmatrix}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۶ اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس A^T ، کدام است؟

۴ $[1 \ 0 \ 1]$

۳ $[0 \ 0 \ 1]$

۲ $[1 \ 0 \ 0]$

۱ $[0 \ 1 \ 0]$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۷ در سهمی به معادله‌ی $y^2 + ay + bx - 9 = 0$ ، معادله‌ی خط هادی، $x = \frac{13}{4}$ و محور تقارن آن $y = 1$ است. مقدارهای b ، کدام‌اند؟

۴ $3, 7$

۳ $4, 8$

۲ $5, 7$

۱ $5, 8$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۸ یک بیضی به قطرهای $AA' = 14$ و $BB' = 4\sqrt{6}$ و کانون F نزدیک به نقطه‌ی A ، مفروض است. خط عمود بر قطر AA' از نقطه‌ی F دایره به قطر AA' را در نقطه‌ی M قطع می‌کند. اندازه‌ی پاره‌خط AM ، کدام است؟

۴ $2\sqrt{3}$

۳ $2\sqrt{6}$

۲ $2\sqrt{7}$

۱ ۷

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۹ از میان دایره‌های گذرا از نقطه‌ی $A(3, 2)$ و مماس بر خطوط $3x - 4y = 0$ و $y = 0$ ، کوچک‌ترین شعاع دایره کدام است؟

۴ $\frac{13}{9}$

۳ $\frac{4}{3}$

۲ $\frac{3}{2}$

۱ ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی



۸۰ دایره‌ای به مرکز $(1, 3)$ بر روی خط راست $5x + 12y = 15$ ، وترى به طول $2\sqrt{21}$ ، جدا می‌کند. این دایره بر روی محور x ها، وترى با کدام اندازه جدا می‌کند؟

۸ (۴)

$2\sqrt{15}$ (۳)

۶ (۲)

$2\sqrt{6}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۸۱ جواب‌های معادله‌ی $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 3 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0$ ، کدام است؟

۲، ۵ (۴)

۱، ۵ (۳)

۱، ۴ (۲)

۱، -۴ (۱)

سراسری - ریاضی - ۹۹

۸۲ از رابطه‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ ، ماتریس X ، کدام است؟

$\begin{bmatrix} -9 & -7 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ (۴)

$\begin{bmatrix} 9 & 7 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$ (۳)

$\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ (۲)

$\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ (۱)

سراسری - ریاضی - ۹۹

۸۳ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 ، کدام است؟

$[30 \ 6 \ 86]$ (۴)

$[24 \ 8 \ 86]$ (۳)

$[30 \ 6 \ 78]$ (۲)

$[30 \ 6 \ 64]$ (۱)

سراسری - ریاضی - ۹۹

۸۴ اگر نقطه‌ی $F(-2, -25)$ کانون سهمی $y^2 + ay + bx + 1 = 0$ باشد، کوچک‌ترین مقدار b ، کدام است؟

۲ (۴)

-۲ (۳)

-۳ (۲)

-۴ (۱)

سراسری - ریاضی - ۹۹

۸۵ در یک بیضی به قطرهای ۸ و $2\sqrt{7}$ واحد و کانون‌های F و F' ، دایره‌ای به قطر $F'F$ بیضی را در نقطه‌ی M ، قطع می‌کند. فاصله‌ی نقطه‌ی M تا نزدیک‌ترین کانون، کدام است؟

۳ (۴)

$4 - 2\sqrt{2}$ (۳)

$2/5$ (۲)

$4 - 2\sqrt{2}$ (۱)

سراسری - ریاضی - ۹۹

۸۶ از بین دایره‌های گذرا از نقطه‌ی $A(1, -4)$ و مماس بر خط‌های $4x + 3y = 0$ و محور y ها، بزرگ‌ترین شعاع دایره، کدام است؟

$\frac{22}{9}$ (۴)

$\frac{7}{3}$ (۳)

$\frac{17}{9}$ (۲)

$\frac{5}{3}$ (۱)

سراسری - ریاضی - ۹۹

۸۷ کوچک‌ترین دایره‌ی گذرا بر دو نقطه‌ی $A(2, 5)$ و $B(-4, 1)$ ، محور x ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۳ و -۲ (۴)

۲ و -۱ (۳)

۰ و -۳ (۲)

۱ و -۳ (۱)

سراسری - ریاضی - ۹۹

۸۸ در یک بیضی با خروج از مرکز $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ، دو سر قطر بزرگ از انتهای قطر کوچک، با کدام زاویه رؤیت می‌شود؟

150° (۴)

120° (۳)

90° (۲)

60° (۱)

ناج از کشور - سراسری - ریاضی

www.sejall.ir

تست‌های طبقه‌بندی شده و فصل به فصل کنکور سراسری همراه با پاسخ کامل تشریحی



۸۹) مختصات کانون سهمی به معادله $2x^2 - 4x + 3y = 4$ ، کدام است؟

۴ $\left(\frac{5}{8}, 2\right)$

۳ $\left(\frac{1}{4}, 2\right)$

۲ $\left(1, \frac{13}{8}\right)$

۱ $\left(1, \frac{5}{4}\right)$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۰) دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ ، کدام است؟

۴ ۲۵

۳ ۲۲

۲ ۱۵

۱ ۱۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۱) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ، از رابطه $AX = B$ ، ماتریس X ، کدام است؟

۴ $\begin{bmatrix} -1 & -12 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

۳ $\begin{bmatrix} 1 & 13 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$

۲ $\begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$

۱ $\begin{bmatrix} 2 & 13 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۲) به ازای کدام مقدار x و y ماتریس $\begin{bmatrix} x-1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$ ، یک ماتریس قطری است؟

۴ $x = 1, y = -5$

۳ $x = 2, y = -5$

۲ $x = 2, y = -7$

۱ $x = 1, y = -7$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۳) اگر $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{k}$ باشند، حجم متوازی السطوحی که بر روی سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a} \times \vec{b}$ ساخته شود، کدام است؟

۴ ۱۸۹

۳ ۱۷۴

۲ ۱۶۹

۱ ۱۵۶

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۴) وتر مشترک دایره به معادله $x^2 + y^2 = 17$ ، با دایره C گذرا بر نقطه $(-1, 6)$ ، بر خط به معادله $2x - y = 3$ منطبق است. شعاع دایره C ، کدام است؟

۴ ۴

۳ $2\sqrt{2}$

۲ $2\sqrt{2}$

۱ ۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۵) نقطه $A(-1, 4)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $2x - 3y + 1 = 0$ وتری به طول $2\sqrt{7}$ جدا می‌کند. این دایره خط $y = 2$ را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۴ $-1 \pm \sqrt{3}$

۳ $-1 \pm \sqrt{2}$

۲ ۲، -۴

۱ ۲، -۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۹۶) در سهمی به معادله $5y^2 - 10y + 4x - 3 = 0$ ، فاصله کانون تا نقطه تلاقی سهمی با محور x ها، کدام است؟

۴ $1/25$

۳ $1/3$

۲ $1/25$

۱ $1/2$

سراسری-تجربی-۹۸

۹۷) در یک بیضی به کانون‌های $(2, -1)$ و $(2, 7)$ ، اندازه قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی، کدام است؟

۴ $0/8$

۳ $0/75$

۲ $0/64$

۱ $0/6$

سراسری-تجربی-۹۸



۹۸ به ازای کدام مقدار m ، سه بردار $\vec{a} = (-1, 2, 3)$ ، $\vec{b} = (2, 0, 1)$ و $\vec{c} = (-4, m, 5)$ در یک صفحه‌اند؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

-۲ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۸

۹۹ در یک بیضی به اقطار $2\sqrt{5}$ و ۲ واحد، دایره‌ای هم مرکز با بیضی و شعاع ۲ واحد، بیضی را در نقطه‌ی M قطع می‌کند. مجموع مربعات فواصل M از دو کانون بیضی، کدام است؟

۲۰ (۴)

۱۸ (۳)

۱۶ (۲)

۱۲ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۸

۱۰۰ معادله‌ی یک سهمی با کانون $F(2, 1)$ و خط هادی به معادله‌ی $x = 4$ ، کدام است؟

$y^2 - 2y + 2x = 5$ (۲)

$y^2 - 2y + 4x = 11$ (۱)

$x^2 - 6x + 2y = -5$ (۴)

$x^2 - 4x + 4y = 0$ (۳)

سراسری-ریاضی-۹۸

۱۰۱ وتر مشترک دایره‌ی C با دایره به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 4x = 6$ منطبق بر نیمساز ناحیه اول است. اگر دایره‌ی C از نقطه‌ی $(-1, 4)$ بگذرد، معادله‌ی آن کدام است؟

$x^2 + y^2 - 3y - x = 6$ (۴) $x^2 + y^2 - 2y + x = 6$ (۳) $x^2 + y^2 + 2y - x = 6$ (۲) $x^2 + y^2 - y + 3x = 6$ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۸

۱۰۲ اگر A ماتریس 3×3 باشد و $|A| = 4$ ، آنگاه دترمینان ماتریس $|A|$ ، کدام است؟

۲۵۶ (۴)

۱۲۸ (۳)

۹۶ (۲)

۶۴ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۸

۱۰۳ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، از رابطه‌ی ماتریسی $AX = A - 2I$ ، ماتریس X ، کدام است؟

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ (۴)

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (۳)

$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ (۲)

$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۸

۱۰۴ از رابطه‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = 0$ ، عدد غیر صفر x ، کدام است؟

$\frac{3}{5}$ (۴)

$\frac{4}{9}$ (۳)

$\frac{3}{8}$ (۲)

$\frac{2}{9}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۹۸

۱۰۵ اگر خط به معادله‌ی $x = -1$ خط هادی سهمی $2y^2 - 4y = ax$ باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی $A(3, 4)$ از کانون سهمی کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

$2\sqrt{6}$ (۲)

$3\sqrt{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۰۶ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ ، ماتریس $A^{-1}(A + 2I)$ ، کدام است؟ (۱ ماتریس واحد است.)

$\begin{bmatrix} -13 & 10 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$ (۴)

$\begin{bmatrix} -11 & 9 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$ (۳)

$\begin{bmatrix} -13 & 6 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$ (۲)

$\begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$ (۱)

نارج از کشور-سراسری-تجربی

www.sejall.ir

تست های طبقه بندی شده و فصل به فصل کنکور سراسری همراه با پاسخ کامل تشریحی



۱۰۷ اگر $A = \begin{bmatrix} ۷ & ۳ \\ -۴ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $(۲A^{-1}) \cdot B$ ، کدام است؟

$\begin{bmatrix} -۸ & ۱۵ \\ ۱۴ & -۲۵ \end{bmatrix}$ (۴)

$\begin{bmatrix} -۷ & -۱۲ \\ -۹ & -۱۰ \end{bmatrix}$ (۳)

$\begin{bmatrix} ۸ & -۱۵ \\ ۱۴ & -۲۵ \end{bmatrix}$ (۲)

$\begin{bmatrix} -۸ & -۱۵ \\ -۱۴ & -۲۵ \end{bmatrix}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۰۸ اگر $a + b + c = ۵$ باشد، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} ۴+a & b & c \\ a & ۴+b & c \\ a & b & ۴+c \end{vmatrix}$ ، کدام است؟

۱۴۴ (۴)

۱۳۵ (۳)

۱۲۴ (۲)

۱۲۰ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۰۹ ماتریس $A = [a_{ij}]_{۳ \times ۳}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} ۱ & ; i = j \\ ۲ & ; i \neq j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A^۲ - ۴A$ کدام است؟

۲۱ (۴)

۱۸ (۳)

۱۵ (۲)

۱۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۱۰ دایره‌ی C بر دایره به معادله $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y = ۴$ مماس خارج است. هر خط قائم بر دایره‌ی C از نقطه‌ی (۸, ۷) می‌گذرد. شعاع دایره‌ی C کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۱۱ به ازای کدام مقدار m، بردار $a = (-۳, ۱۰, m)$ برابر مجموع دو بردار هم‌راستا با بردارهای (۳, ۱, ۲) و (۱, ۴, -۲) است؟

۱۱ (۴)

۹ (۳)

-۸ (۲)

-۱۰ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۱۲ اگر $A = \begin{bmatrix} a & -۳ \\ ۵ & a+۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشند، به‌ازای کدام مقدار a ماتریس $A + ۲B$ ، وارون‌پذیر نیست؟

-۳، ۵ (۴)

-۷، ۴ (۳)

-۵، ۷ (۲)

-۷، ۵ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۱۳ دایره‌ی گذرا بر مبدأ مختصات، بر دو خط به معادلات $y = ۲x$ و $y = ۲x + ۱۰$ مماس است. مختصات مرکز این دایره، کدام است؟

(-۱, ۲) (۴)

(-۲, ۱) (۳)

(-۳, ۱) (۲)

(-۳, ۲) (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۱۴ دو بردار a و b با معلومات $|a| = ۵$ و $|b| = ۷$ و $a - b = ۲i + j - ۳k$ مفروض‌اند. تصویر قائم بردار b بر روی بردار a، چند برابر بردار a است؟

$۱/۴$ (۴)

$۱/۲$ (۳)

$۰/۸$ (۲)

$۰/۷$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۱۵ در ماتریس $A = [a_{ij}]_{۳ \times ۳}$ اگر $a_{ij} = \begin{cases} ۲ & ; i \neq j \\ ۱ & ; i = j \end{cases}$ باشد، ماتریس $A^۲ - ۴A$ ، برابر کدام است؟

۵I (۴)

۳I (۳)

$۵A^t$ (۲)

$۳A^t$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی



۱۱۶ فاصله‌ی کانون تا خط هادی یک سهمی ۲ واحد است. این سهمی محور y ها را در دو نقطه به عرض‌های ۱ و ۵- قطع می‌کند. طول رأس آن با علامت مثبت کدام است؟

۴ $\frac{5}{2}$

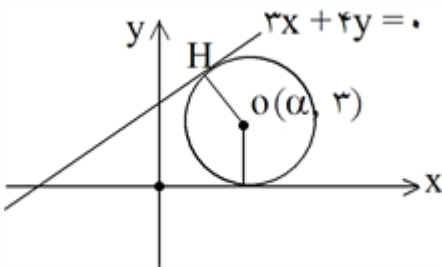
۳ $\frac{9}{4}$

۲ $\frac{3}{2}$

۱ $\frac{5}{4}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱۷ دایره‌ای بر محور x ها و خط به معادله‌ی $3x + 4y = 0$ مماس است. اگر مرکز این دایره در ناحیه‌ی اول و شعاع آن ۳ واحد باشد، نقطه‌ی مشترک آن با محور x ها با کدام طول است؟



۴ $\frac{2}{5}$

۳ ۲

۲ $\frac{1}{5}$

۱ ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱۸ نقطه‌ی O مبدأ مختصات و $\vec{OA} = 2i + j$ و $\vec{OB} = -i + 5j + 4k$ مفروض هستند. اگر $\vec{AM} = -\frac{3}{4}\vec{AB}$ باشد، کسینوس زاویه‌ی برابر $\vec{OM}$ با محور y ها کدام است؟

۴ $\frac{3}{7}$

۳ $\frac{2}{5}$

۲ $-\frac{2}{7}$

۱ $-\frac{2}{5}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱۹ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس $(A \times B)^{-1}$ ، کدام است؟

۴ $\begin{bmatrix} 0/5 & 0/5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

۳ $\begin{bmatrix} 0/5 & 0 \\ -0/5 & 1 \end{bmatrix}$

۲ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0/5 & 1 \end{bmatrix}$

۱ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0/5 & 0/5 \end{bmatrix}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۲۰ اگر دترمینان $D = \begin{vmatrix} 6 & 3x & 2x \\ 3x & 2x & 6 \\ 2x & 6 & 3x \end{vmatrix}$ باشد، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} x^2 & x^2 & 6 \\ 9 & 2x & 9 \\ 3x & 4 & 4 \end{vmatrix}$ ، کدام است؟

۴ D

۳ $\frac{1}{2}D$

۲ $-D$

۱ $-2D$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲۱ دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. درایه‌ی واقع در سطر اول و ستون اول وارون ماتریس $B \times A$ کدام است؟

۴ $0/9$

۳ $0/1$

۲ $-0/1$

۱ $-0/9$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۲۲ شعاع دایره به مرکز $(-2, 2)$ و مماس خارج بر دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ کدام است؟

۴ ۴

۳ $2\sqrt{2}$

۲ ۳

۱ $2\sqrt{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی



۱۲۳

چهار بردار a, b, c و d در دو رابطه $a \times c = d \times b$ و $a \times d = c \times b$ صدق می‌کنند، الزاماً دو بردار غیر صفر $a + b$ و $c + d$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

۱ مساوی

۲ قرینه

۳ عمود

۴ موازی

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲۴

سه بردار $V_1 = (1, -1, a)$ ، $V_2 = (2, b, 1)$ و $V_3 = (c, 2, 2)$ دو به دو عمود برهم هستند. $a + b + c$ کدام است؟

۱ ۵

۲ ۶

۳ ۷

۴ ۸

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۲۵

نزدیک‌ترین نقطه روی منحنی $(x-9)^2 + (y-7)^2 = 4$ از محور x به چه فاصله‌ای قرار دارد؟

۱ ۶

۲ ۷

۳ ۸

۴ ۵

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-تجربی

۱۲۶

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، جمع درایه‌های A^3 کدام است؟

۱ ۹

۲ ۷

۳ صفر

۴ ۱۱

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-تجربی

۱۲۷

حاصل $\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ کدام است؟

۱ a ۲ $4a$

۳ صفر

۴ ۱

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۱۲۸

تصویر نقطه $A(-2, 1, 3)$ روی محور y ها کدام است؟

۱ $(-2, -1, 3)$ ۲ $(-2, 0, 3)$ ۳ $(0, 1, 0)$ ۴ $(0, -1, 0)$

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۱۲۹

اگر $\vec{a} = (1, 1, 2)$ ، $\vec{b} = (-1, 2, 1)$ باشد، حاصل ضرب داخلی $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ کدام است؟

۱ -۳

۲ ۳

۳ -۱

۴ صفر

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی

۱۳۰

به ازای کدام مقدار a ، خط هادی سهمی به معادله $y^2 - 6y + 2x + a = 0$ از نقطه $(1, 2)$ می‌گذرد؟

۱ ۵

۲ ۶

۳ ۷

۴ ۸

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۳۱

دایره‌ای از دو نقطه $(2, 0)$ و $(-2, 0)$ گذشته و بر خط $y = 1$ مماس است. شعاع این دایره کدام است؟

۱ $\frac{3}{2}$ ۲ $\sqrt{4}$ ۳ $\frac{5}{2}$

۴ ۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۳۲

اگر $\vec{AB} + \vec{BC} + 3\vec{MP} + 3\vec{PN} = \vec{0}$ ، آنگاه زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{AC}$ و $\vec{MN}$ چند درجه است؟

۱ صفر

۲ ۶۰

۳ ۹۰

۴ ۱۸۰

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی



۱۳۳ به ازای کدام مقدار m ، معادله‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} m & 2 \\ 3 & m+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+2 \\ 2 \end{bmatrix}$ جواب ندارد؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۳ (۲)

-۶ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۳۴ از رابطه‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، سطر اول ماتریس A کدام است؟

[۳۱ ۱۹] (۴)

[۳۱ ۱۷] (۳)

[۲۱ ۱۹] (۲)

[۲۱ ۱۷] (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۳۵ در سهمی به معادله‌ی $3x^2 + 4y - 6x + 11 = 0$ ، معادله‌ی خط هادی کدام است؟

$y = -\frac{1}{3}$ (۴)

$y = -\frac{2}{3}$ (۳)

$y = -\frac{4}{3}$ (۲)

$y = -\frac{5}{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۳۶ اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس A کدام است؟

$-\frac{1}{2}$ (۴)

۲ (۳)

-۲ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - آزاد - تجربی

۱۳۷ وتری از سهمی به معادله‌ی $y^2 = 4(x+y)$ که از کانون آن گذشته و بر محور آن عمود باشد، قطری از یک دایره است. معادله‌ی این دایره کدام است؟

$x^2 + y^2 + 4y = 0$ (۲)

$x^2 + y^2 - 4y = 0$ (۱)

$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$ (۴)

$x^2 + y^2 - 2y = 2$ (۳)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۳۸ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ، دترمینان ماتریس $(2A) \cdot (2A^{-1})$ کدام است؟

۳۶ (۴)

۱۸ (۳)

۱۶ (۲)

۱۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۳۹ دایره‌ای از دو نقطه‌ی $(0,0)$ و $(3,1)$ گذشته و مرکز آن برخط به معادله‌ی $y = 2x$ قرار دارد. شعاع این دایره کدام است؟

۳ (۴)

$\sqrt{5}$ (۳)

۲ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۴۰ اگر $|\vec{a}| = 2$ ، $|\vec{b}| = 2$ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ، آن‌گاه $|\vec{a} + \vec{b}| - |\vec{a} - \vec{b}|$ کدام است؟

$\sqrt{5}$ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۴۱ اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، از رابطه‌ی $AX = 2I$ ماتریس X کدام است؟

$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ (۴)

$2 \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (۳)

$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ (۲)

$\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

www.sejall.ir

تست‌های طبقه‌بندی شده و فصل به فصل کنکور سراسری همراه با پاسخ کامل تشریحی



۱۴۲ به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a ، منحنی به معادله‌ی $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0$ یک دایره است؟

- ۱ $\{-3\}$ ۲ $\{3\}$ ۳ $\{-3, 3\}$ ۴ $\emptyset$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۴۳ در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax - 2y = 5 \\ bx + 3y = 12 \end{cases}$ ، اگر دترمینان ضرایب مجهولات برابر ۲۶ باشد، مقدار x کدام است؟

- ۱ $-\frac{7}{13}$ ۲ $\frac{15}{13}$ ۳ $\frac{3}{2}$ ۴ 2

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۴۴ یک سهمی محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۵ قطع کرده و خط هادی آن به معادله‌ی $y = -2$ است. عرض رأس این سهمی کدام است؟

- ۱ -1 ۲ $-\frac{3}{2}$ ۳ $-\frac{1}{2}$ ۴ $\frac{1}{2}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۴۵ در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax - 3y = 7 \\ bx + 4y = 2 \end{cases}$ اگر دترمینان ماتریس ضرایب برابر ۱۷ باشد، مقدار x کدام است؟

- ۱ 1 ۲ -1 ۳ 2 ۴ -2

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۴۶ چند دایره به شعاع ۲ وجود دارد که بر محور x ها و دایره‌ی $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$ مماس باشد؟

- ۱ صفر ۲ 2 ۳ 1 ۴ بی‌شمار

کنکورهای خارج از کشور - آزاد - ریاضی

۱۴۷ حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} a & a & a \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ کدام است؟

- ۱ صفر ۲ a^2 ۳ a ۴ $5a^2$

کنکورهای خارج از کشور - آزاد - ریاضی

۱۴۸ اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ، A مجموع درایه‌های ماتریس A^{10} کدام است؟

- ۱ 4 ۲ 2^{10} ۳ 2^{11} ۴ 2^{12}

کنکورهای خارج از کشور - آزاد - ریاضی

۱۴۹ سطح دایره‌ی $x^2 + 2x + y^2 - 2y = -\frac{1}{4}$ در کدام ربع‌های محورهای مختصات قرار دارد؟

- ۱ فقط دوم ۲ فقط دوم و سوم ۳ اول و دوم و سوم ۴ چهار ربع

کنکورهای خارج از کشور - آزاد - ریاضی

۱۵۰ اگر $\vec{V}_1(1, 2, 3)$ و $\vec{V}_2(2, 1, 3)$ باشد، اندازه‌ی بردار $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ کدام است؟

- ۱ $3\sqrt{3}$ ۲ $\sqrt{3}$ ۳ 3 ۴ 9

کنکورهای خارج از کشور - آزاد - ریاضی



۱۵۱ به ازای کدام مقدار b ، دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 + 4\sqrt{6}y + b = 0$ و $x^2 + y^2 - 2x = 3$ مماس خارج‌اند؟

۲۰ (۴)

۱۵ (۳)

۱۳ (۲)

۸ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۵۲ سه بردار a و b و c با اندازه‌ی ۳ و ۴ و ۷ واحد در رابطه‌ی $a + b + c = 0$ صدق می‌کنند، مقدار $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$ کدام است؟

۳۷ (۴)

۱۹ (۳)

-۱۹ (۲)

-۳۷ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۵۳ نقطه‌ی $A(3, 6)$ روی دایره‌ای است که بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع این دایره کدام است؟

۳ و ۱۵ (۴)

۳ و ۹ (۳)

۲ و ۱۵ (۲)

۲ و ۱۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۵۴ بردار $a = i + 2j - 4k$ به صورت ترکیبی از بردارهای واحد محورهای مختصات داده شده است. مساحت متوازی‌الاضلاعی که بر روی دو بردار a و $a \times k$ ساخته شود، کدام است؟

$\sqrt{10.5}$ (۴)

$\sqrt{10.2}$ (۳)

$\sqrt{96}$ (۲)

$\sqrt{84}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۵۵ دایره‌ای بر دو نقطه‌ی $(0, 2)$ و $(4, 0)$ گذشته و بر محور x ها مماس است. این دایره محورهای را در نقطه‌ی دیگر، با کدام عرض قطع می‌کند؟

۸ (۴)

۷ (۳)

۶ (۲)

۵ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۵۶ اگر بردار $a = (1, -1, m)$ با محور z ها زاویه‌ی 45° درجه بسازد، کسینوس زاویه‌ی این بردار با محور x ها کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۵۷ اگر a, b, c و d چهار بردار دلخواه باشند، آن‌گاه سه بردار $a \times d, b \times d, c \times d$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

موازی هم‌اند (۲)

موازی یک صفحه‌اند (۱)

مجموع آن‌ها برابر صفر است. (۴)

دو به دو عمود بر هم‌اند (۳)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۵۸ معادله‌ی دایره‌ای که مرکز آن کانون سهمی به معادله‌ی $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$ و مماس بر خط هادی این سهمی باشد، کدام است؟

$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ (۲)

$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$ (۱)

$x^2 + y^2 - 6x + 3y + 9 = 0$ (۴)

$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 5 = 0$ (۳)

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۵۹ به ازای کدام مقدار m ، بردار $a = (1, 2, m)$ را می‌توان به صورت مجموع دو بردار در راستاهای $(0, -1, 2)$ و $(2, 3, -1)$ نوشت؟

$-\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$-\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

تاریخ از کشور-سراسری-ریاضی

www.sejall.ir

تست‌های طبقه‌بندی شده و فصل به فصل کنکور سراسری همراه با پاسخ کامل تشریحی



۱۶۰ حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار واقع بر نیمسازهای سه صفحه‌ی xOy ، yOz و zOx به ترتیب با طول‌های $\sqrt{2}$ ، $2\sqrt{2}$ و $3\sqrt{2}$ با مولفه‌های غیر منفی ساخته می‌شود، چند واحد مکعب است؟

۱۲ $\sqrt{2}$ (۴)

۸ $\sqrt{2}$ (۳)

۱۶ (۲)

۱۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۶۱ اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس A^t کدام است؟

همانی (۴)

قطری غیرهمانی (۳)

پایین مثلثی (۲)

بالا مثلثی (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۶۲ اگر $A = \begin{bmatrix} 5+a & b & c \\ a & 5+b & c \\ a & b & 5+c \end{bmatrix}$ با شرط $a+b+c=7$ ، دترمینان ماتریس $(5A^{-1})$ کدام است؟

$\frac{25}{7}$ (۴)

$\frac{25}{12}$ (۳)

$\frac{5}{7}$ (۲)

$\frac{5}{12}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۶۳ یک سهمی محور l ها را در دو نقطه به عرض‌های ۱ و ۵ قطع می‌کند، رأس آن بر روی نیمساز ناحیه‌ی اول است، فاصله‌ی کانون سهمی تا خط هادی، کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{4}{3}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۶۴ نقطه‌ی $M(2\sqrt{5}, b)$ مرکز دایره‌ای است که بر دو خط به معادلات $y=2x$ و $x=2y$ مماس است، شعاع دایره کوچک‌تر، کدام است؟

$2/5$ (۴)

۲ (۳)

$1/5$ (۲)

۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۶۵ بر روی دو بردار $a = 3i + 3j$ و $b = i - j - 2k$ متوازی‌الاضلاع ساخته شده است. کسینوس زاویه‌ی بین دو قطر این متوازی‌الاضلاع، کدام است؟

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۶۶ عمق یک آینه‌ی سهموی در مرکز آن ۹ واحد و قطر قاعده‌ی آن ۶۰ واحد است. فاصله‌ی کانون تا رأس آن، کدام است؟

۲۵ (۴)

$22/5$ (۳)

۲۰ (۲)

۱۵ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۶۷ سهمی به کانون $(1, 2)$ و خط هادی به معادله‌ی $x = -3$ محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

$-\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی



۱۶۸) بردارهای a, b و c با شرط $(a - c) \times b = a \times c$ مفروض‌اند، الزاماً کدام نتیجه حاصل می‌شود؟

- ۱) $a \cdot (b \cdot c) = 0$ ۲) $a \cdot (b \times c) = 0$ ۳) $a \times (b \times c) = 0$ ۴) هر سه بردار موازی‌اند.

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۶۹) به ازای کدام مقدار m خط به معادله $y = mx + 2$ بر دایره $x^2 + y^2 - 2x = 3$ مماس است؟

- ۱) $0, -\frac{4}{3}$ ۲) $0, \frac{4}{3}$ ۳) $1, -\frac{2}{3}$ ۴) $1, \frac{2}{3}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۷۰) اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس B از معادله $A \cdot B = 2I$ کدام است؟

- ۱) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۷۱) دایره‌ای از دو نقطه $(0, 1)$ و $(3, 0)$ گذشته و معادله‌ی یک قطر آن به صورت $x - y = 2$ است. شعاع این دایره کدام است؟

- ۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{5}$ ۴) ۳

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۷۲) فاصله نزدیک‌ترین نقاط دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ از خط به معادله $3x + 4y = 15$ ، کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۷۳) اگر سه بردار به تصاویر $(2, a, 1)$ ، $(b, 2, 4)$ و $(2, 1, c)$ یال‌های یک مکعب مستطیل باشند، حجم آن کدام است؟

- ۱) ۳۲ ۲) ۳۶ ۳) ۴۲ ۴) ۴۵

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۷۴) اگر $A = \begin{bmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه $|A|$ کدام است؟ (علامت دترمینان است.)

- ۱) $2 \log 1/25$ ۲) $\log 2/5$ ۳) $\log 3$ ۴) $\log 6/25$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۷۵) اگر $a, b, 2$ سه عدد متمایز باشند، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4(a+b) \\ 1 & a+1 & a^2(b+2) \\ 1 & b+1 & b^2(a+2) \end{vmatrix}$ کدام است؟

- ۱) صفر ۲) $4ab$ ۳) $(a-2)(b-2)$ ۴) $2(a-2)(b-2)$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۷۶) اگر به هر درایه در سطر دوم دترمینان $\begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 4 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ یک واحد افزوده شود، به مقدار دترمینان ۶ واحد اضافه می‌شود. a کدام است؟

- ۱) -۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی



۱۷۷

دایره‌ای بر خط به معادله $y = 2x - 1$ مماس است و تمام قائم‌های بر دایره از نقطه $(-1, 2)$ می‌گذرند. بیش‌ترین فاصله نقاط این دایره از محور x ها کدام است؟

۱ $2 + \sqrt{5}$

۲ $3 + \sqrt{2}$

۳ ۵

۴ ۶

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۷۸

بر روی سه بردار $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{j} + 3\vec{k}$, و $\vec{c} = 4\vec{i} - \vec{k}$ یک متوازی‌السطوح ساخته شده‌است. اگر قاعده این متوازی‌السطوح را بردارهای a و b تشکیل دهند، ارتفاع متوازی‌السطوح کدام است؟

۱ ۱

۲ $1/5$

۳ $\sqrt{3}$

۴ ۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۷۹

در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۸ حاصل $\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{AC}$ چقدر است؟

۱ ۳۲

۲ ۳۶

۳ -۲۴

۴ -۱۲

کنکورهای خارج از کشور-آزاد-ریاضی



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا حرف a را به m تغییر می‌دهیم تا با نصف قطر بزرگ بیضی آن را اشتباه نگیریم. پس کانون‌های بیضی $F'(0, m)$ و $F(0, 0)$ هستند. پس:

$$FF' = 2c \Rightarrow |m| = 2c \Rightarrow c = \frac{|m|}{2} \quad (1)$$

$$A \in \text{بیضی} \Rightarrow AF + AF' = 2a \Rightarrow 2 + \sqrt{9 + m^2} = 2a \quad (2)$$

از طرف دیگر:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{c}{a} \Rightarrow 2a = 2\sqrt{2}c \xrightarrow{\text{از (1) و (2)}} 2 + \sqrt{9 + m^2} = \sqrt{2}|m|$$

$$\Rightarrow \sqrt{9 + m^2} = \sqrt{2}|m| - 2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 9 + m^2 = 2m^2 + 4 - 4\sqrt{2}|m| \Rightarrow m^2 - 4\sqrt{2}|m| = -5$$

اکنون دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$m > 0 \xrightarrow{|m|=m} m^2 - 4\sqrt{2}m = 0 \Rightarrow m(m - 4\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } m = 4\sqrt{2}$$

$$m < 0 \xrightarrow{|m|=-m} m^2 + 4\sqrt{2}m = 0 \Rightarrow m(m + 4\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } m = -4\sqrt{2}$$

مسلماً $m = 0$ قابل قبول نیست زیرا به‌ازای $m = 0$ به کانون $F'(0, 0)$ می‌رسیم که همان کانون F است. پس $m = \pm 4\sqrt{2}$ بنا براین $c = 2\sqrt{2}$ و چون $2a = 2\sqrt{2}c$ پس $a = 4$ در نتیجه:

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - (2\sqrt{2})^2 = 8 \Rightarrow b = 2\sqrt{2} \Rightarrow \text{قطر کوچک} = 2b = 4\sqrt{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقاط A و B و C وسط اضلاع مثلث MNE به مساحت ۱۶ هستند. چون $\triangle ABC \sim \triangle MNE$ متشابه با نسبت $\frac{1}{2}$ است. داریم:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNE}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{S_{MNE}=16} S_{ABC} = 4$$

اکنون با استفاده از ضرب خارجی مساحت مثلث ABC را پیدا می‌کنیم.

$$A = (a, 4, 1), B = (a, b, 3), C = (a, 9, b)$$

$$\vec{AB} = B - A = (0, b-4, 2)$$

$$\vec{AC} = C - A = (0, 5, b-1)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & b-4 & 2 \\ 0 & 5 & b-1 \end{vmatrix} = (b^2 - 5b + 4 - 10)i = (b^2 - 5b - 6)i$$

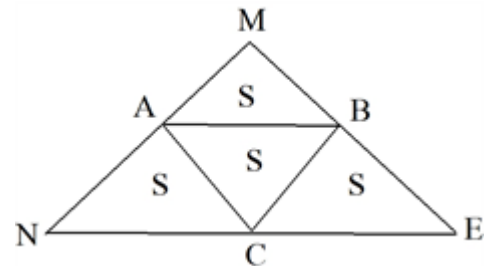
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| \Rightarrow 4 = \frac{1}{2} \sqrt{(b^2 - 5b - 6)^2} \Rightarrow |b^2 - 5b - 6| = 8$$

بنابراین:

$$b^2 - 5b - 6 = 8 \Rightarrow b^2 - 5b - 14 = 0 \Rightarrow \text{مجموع مقادیر } b = 5$$

$$b^2 - 5b - 6 = -8 \Rightarrow b^2 - 5b + 2 = 0 \Rightarrow \text{مجموع مقادیر } b = 5$$

پس مجموع مقادیر ممکن برابر b مساوی ۱۰ است.



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا در معادله سهمی حرف a را به m تغییر می‌دهیم تا a با پارامتر سهمی اشتباه گرفته نشود. پس معادله سهمی به صورت $y^2 - 2y + 4x = m$ است. اکنون معادله سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$y^2 - 2y + 4x = m \Rightarrow (y-1)^2 - 1 + 4x = m \Rightarrow (y-1)^2 = -4x + m + 1$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = -4\left(x - \frac{m}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

پس این سهمی افقی رو به چپ با رأس $S\left(\frac{m}{4} + \frac{1}{4}, 1\right)$ است به طوری که $4a = 4$ است. معادله خط هادی این نوع

سهمی به صورت زیر است.

$$x = a + \alpha \Rightarrow x = 1 + \frac{m}{4} + \frac{1}{4} \xrightarrow{x=3} 3 = \frac{5}{4} + \frac{m}{4} \xrightarrow{4 \times} 12 = 5 + m \Rightarrow m = 7$$



۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

$$\frac{\text{حاصل ضرب درایه ها}}{\text{حاصل ضرب درایه های } A^2} = 1$$

پس:

۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس B^{-1} را به دست می‌آوریم.

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2-3} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

اکنون طرفین تساوی داده شده را از سمت راست در B^{-1} ضرب می‌کنیم.

$$3I - 2A^{-1}B = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -12 & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times B^{-1}} 3B^{-1} - 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -12 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3B^{-1} - 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -11 \\ -1 & 14 \end{bmatrix}$$

پس کوچکترین درایه‌های این ماتریس ۱۱- است.

۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقطه A روی سهمی قرار دارد پس فاصله نقطه A تا کانون سهمی برابر فاصله نقطه A تا خط هادی سهمی است.

با استاندارد کردن معادله سهمی معادله خط هادی آن را پیدا می‌کنیم:

$$x = -y^2 + 5y - 6 \Rightarrow y^2 - 5y = -x - 6 \Rightarrow \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = -x - 6 \Rightarrow \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = -x + \frac{1}{4}$$

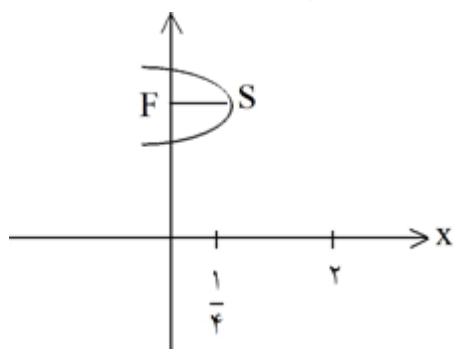
$$\Rightarrow \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = -\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

پس سهمی افقی رو به چپ با رأس $S\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{2}\right)$ و $a = \frac{1}{4}$ است. $4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

$$\text{بنابراین: معادله خط هادی: } x = a + h \xrightarrow{h=\frac{1}{4}} x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x - \frac{1}{2} = 0$$

بنابراین:

$$\text{فاصله } A \text{ تا خط هادی} = 1/5 \Rightarrow \left|\alpha - \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = 2 \\ \alpha - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = -1 \end{cases}$$

با توجه به نمودار سهمی نقطه A به طول ۲ نمی‌تواند روی سهمی باشد پس $\alpha = -1$ قابل قبول است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس D را پیدا می‌کنیم. بنابر فرض سؤال می‌نویسیم:

$$D = B \times C \times A = B \times A \times B \times A = (BA)(BA) = (BA)^T \quad (۱)$$

اکنون ماتریس BA را به دست می‌آوریم.

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |BA| = 2$$

$$(۱) \Rightarrow |D| = |(BA)^T| = |BA|^2 = 2^2 = 4 \quad \text{بنابراین:}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اگر ماتریس‌های A و B مربعی باشند آنگاه $|AB| = |A||B|$ پس:

$$|D| = |BA^T B| = |B||A|^T |B| = |B|^2 |A|^T$$

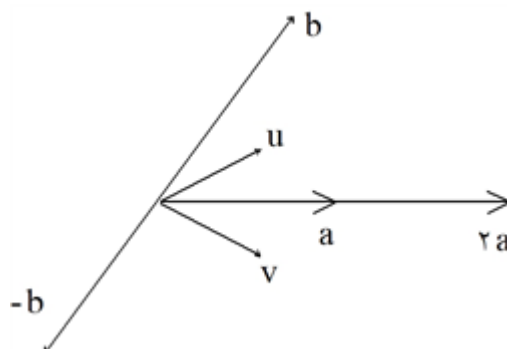
$$\text{از طرف دیگر } |A| = (-1) \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{6} \text{ و } |B| = (-2)(3)(4) = -24 \text{ بنابراین:}$$

$$|D| = |B|^2 |A|^T = (-24)^2 \left(-\frac{1}{6} \right)^T = 24 \times 24 \times \frac{-1}{6 \times 6 \times 6} = \frac{-16}{6} = -\frac{8}{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در شکل بردار یکۀ $\vec{u}$ در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است و بردار یکۀ $\vec{v}$ در راستای نیمساز زاویه بین بردارهای $2a$ و $-b$ است.

چون دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ در راستای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هستند پس بر هم عمودند. بنابراین مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ساخته می‌شود برابر است با:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} |\vec{u}| |\vec{v}| \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا معادله سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$y^2 + 2x + 2y + 2 = 0 \Rightarrow \left(y + \frac{2}{2}\right)^2 - \frac{4}{4} + 2x + 2 = 0 \Rightarrow \left(y + \frac{2}{2}\right)^2 = -2x + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \left(y + \frac{2}{2}\right)^2 = -2\left(x - \frac{1}{8}\right)$$

پس سهمی افقی رو به چپ با رأس $S\left(\frac{1}{8}, -\frac{2}{2}\right)$ و $4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$ است. مسلماً فاصله نقطه $A(\alpha, \beta)$ روی سهمی از کانون و خط هادی آن برابر است. اکنون خط هادی این سهمی را پیدا می‌کنیم.

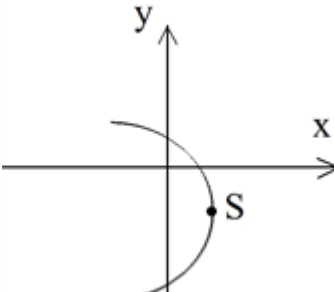
$$\text{خط هادی} : x = a + h \Rightarrow x = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \Rightarrow x - \frac{5}{8} = 0$$

$$\text{فاصله } A \text{ تا خط هادی} = 2/5 \Rightarrow \left|\alpha - \frac{5}{8}\right| = \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \frac{5}{8} = \frac{5}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{25}{8} \\ \alpha - \frac{5}{8} = -\frac{5}{2} \Rightarrow \alpha = -\frac{15}{8} \end{cases}$$

با توجه به شکل به ازای $\alpha = \frac{25}{8}$ نقطه $A(\alpha, \beta)$ نمی‌تواند روی این سهمی باشد پس $\alpha = -\frac{15}{8}$ قابل قبول می‌باشد.

مسلماً نقطه $A\left(-\frac{15}{8}, \beta\right)$ در معادله سهمی صدق می‌کند داریم:

$$\beta^2 + 2\left(-\frac{15}{8}\right) + 2\beta + 2 = 0 \Rightarrow \beta^2 + 2\beta - \frac{5}{4} = 0$$

$$\beta = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 5}}{2} \Rightarrow \beta = \frac{-2 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$


بنابراین اختلاف مقادیر β برابر $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$A = B \times C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اکنون ماتریس A^2 را پیدا می‌کنیم:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$(A^2) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - 4 \\ 0 \\ -4 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۱۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دترمینان ماتریس‌های A و B برابرند با:

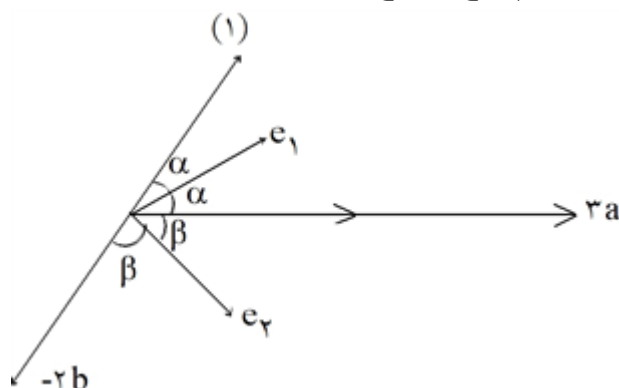
$$|A| = (-2)(-3)(-1) = -6, |B| = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)(-5) = -\frac{5}{6}$$

$$|(AB)^T| = |AB|^T = (|A||B|)^T = \left(-6 \times -\frac{5}{6}\right)^T = 5^T = 25$$

از طرف دیگر:

۱۳

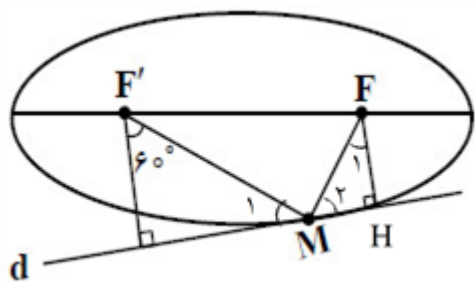
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



e_1 در راستای نیمساز داخلی زاویه بین بردارهای a و b و e_2 در راستای نیمساز خارجی این دو بردار است. پس: $e_1 \perp e_2$. بنابراین متوازی‌الاضلاع ساخته شده توسط بردارهای واحد e_1 و e_2 مربع به ضلع ۱ می‌باشد. در نتیجه طول قطر این مربع $\sqrt{2}$ است.

۱۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال $HH' = 2\sqrt{3}$ است. بنابر خاصیت بازتابندگی بیضی نتیجه می‌گیریم $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ پس $\widehat{F}_1 = 60^\circ$ در نتیجه:



$$\left. \begin{aligned} \triangle MFH : \widehat{F}_1 &= 60^\circ \Rightarrow MH = \frac{\sqrt{r}}{r} MF \\ \triangle MF'H' : \widehat{F}'_1 &= 60^\circ \Rightarrow MH' = \frac{\sqrt{r}}{r} MF' \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$MH + MH' = \frac{\sqrt{r}}{r} (MF + MF') \Rightarrow HH' = \frac{\sqrt{r}}{r} (2a) \Rightarrow 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{r}}{r} (2a) \Rightarrow 2a = 4$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به داده‌های مسئله شکلی رسم می‌کنیم. در این صورت مرکز دایره در ناحیه چهارم قرار دارد پس گزینه‌های ۱ و ۲ نادرست‌اند. اکنون گزینه‌های ۳ و ۴ را امتحان می‌کنیم.

اگر $O(4, -3/5)$ را مرکز دایره در نظر بگیریم آنگاه شیب OB باید عکس قرینه شیب خط $3x - 2y = 6$ باشد.

$$m_{OB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3/5 - 0}{4 - 2} = \frac{-3/5}{2} = -\frac{3}{10}, \text{ شیب خط } = \frac{3}{2}$$

دیده می‌شود حاصلضرب این دو شیب برابر -۱ نیست. پس گزینه ۳ هم نادرست است پس گزینه ۴ درست است. راه حل دوم:

مرکز دایره روی عمودمنصف وتر AB و روی خط OB است. معادله هر دو خط را نوشته با هم قطع می‌دهیم تا مرکز دایره به دست آید.

مسئلاً شیب خط OB عکس و قرینه شیب خط $3x - 2y = 6$ و برابر $-\frac{3}{2}$ است. و شیب خط عمودمنصف AB عکس و

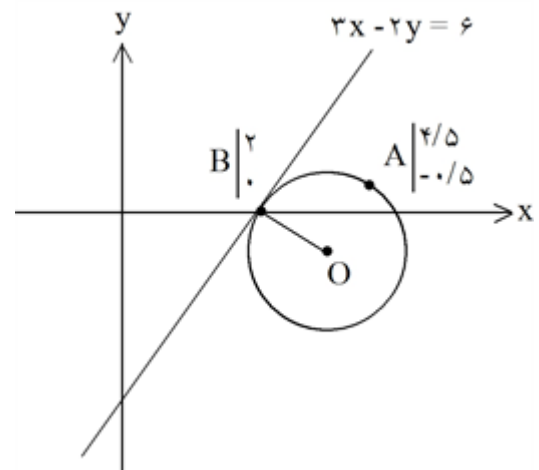
قرینه شیب AB است و خط عمودمنصف از نقطه $M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{12}{2}, \frac{1}{2} \right)$ می‌گذرد.

$$m_{OB} = -\frac{3}{2} \text{ و شیب عمودمنصف } = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{\frac{3/5}{2/5}} = -5$$

$$\text{OB خط: } y - 0 = -\frac{3}{2}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{6}{2} \Rightarrow 2x + 3y = 6$$

$$\text{AB عمودمنصف: } y - \frac{1}{2} = -5\left(x - \frac{12}{2}\right) \Rightarrow 20x + 4y = 66 \Rightarrow 10x + 2y = 33$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 10x + 2y = 33 \end{cases} \Rightarrow x = 3/5, y = -1 \Rightarrow O(3/5, -1)$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از فرض‌های مسئله مقادیر صحیح d, c, b, a را به دست می‌آوریم.

$$B^r = rI \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & . & a \\ . & \sqrt{r}b & . \\ c & . & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & . & a \\ . & \sqrt{r}b & . \\ c & . & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & . & . \\ . & 2 & . \\ . & . & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1+ac & . & a+ad \\ . & 2b^r & . \\ c+dc & . & ac+d^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & . & . \\ . & 2 & . \\ . & . & 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} 1+ac=2 \Rightarrow ac=1 \Rightarrow a \neq 0, c \neq 0 \\ 2b^r=2 \Rightarrow b^r=1 \Rightarrow b=\pm 1 \\ c+dc=0 \Rightarrow c(1+d)=0 \xrightarrow{c \neq 0} 1+d=0 \Rightarrow d=-1 \end{cases}$$

حالت اول $|A|=2 \Rightarrow ad-bc=2 \xrightarrow[b=-1]{d=-1} -a-c=2 \Rightarrow a+c=-2$

$\xrightarrow{ac=1} a=-1, c=-1$

حالت دوم $|A|=2 \Rightarrow ad-bc=2 \xrightarrow[b=-1]{d=-1} -a+c=2 \xrightarrow{c=\frac{1}{a}} -a+\frac{1}{a}=2$

$\Rightarrow -a^r+1=2a \Rightarrow a^r+2a-1=0 \Rightarrow a=\frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2}$

این مقدار برای a قابل قبول نیست چون a صحیح است. پس $a=-1$ و $c=-1$ و $d=-1$ و $b=1$ می‌باشد. داریم:

$$B^r = B^r \times B = rI \times B = rB = 2 \begin{bmatrix} 1 & . & a \\ . & \sqrt{r}b & . \\ c & . & d \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & . & -1 \\ . & \sqrt{2} & . \\ -1 & . & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & . & -2 \\ . & 2\sqrt{2} & . \\ -2 & . & -2 \end{bmatrix}$$

در نتیجه حاصلضرب درایه‌های غیرصفر ماتریس B^r برابر $2(-2)(2\sqrt{2})(-2)(-2) = -32\sqrt{2}$ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا دترمینان ماتریس A را پیدا می‌کنیم.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

از طرف دیگر:

$$|A^2 + kA - A| = 125 \Rightarrow |A(A + (k-1)I)| = 125 \Rightarrow |A| |A + (k-1)I| = 125$$

$$\xrightarrow{|A|=5} |A + (k-1)I| = 25$$

اکنون ماتریس $A + (k-1)I$ را به دست می‌آوریم.

$$A + (k-1)I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & 2 \\ 2 & 2 & k \end{bmatrix}$$

$$|A + (k-1)I| = \begin{vmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & 2 \\ 2 & 2 & k \end{vmatrix} = k(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} + 2(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & k \end{vmatrix} + 2(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & k \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = k^3 - 12k + 96$$

$$k^3 - 12k + 96 = 25 \Rightarrow k^3 - 12k - 9 = 0 \Rightarrow k = -3$$

بنابراین:

$$|(kH)I_3| = (kH)^3 |I| = (k+1)^3 = (-3+1)^3 = -8$$

(توجه کنید جواب معادله $k^3 - 12k - 9 = 0$ را با امتحان کردن مقادیر $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ پیدا کرده‌ایم.)

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اندازه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$ برابر $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$ است. پس اندازه تصویر بردار

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

روی بردار $\vec{a}$ برابر است با:

$$\frac{\left| \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \cdot \vec{a} \right|}{|\vec{a}|} = \frac{\left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \right|}{|\vec{a}|} = \frac{\frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|} + \frac{|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \phi}{|\vec{b}|}}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a}| + |\vec{a}| \left(\frac{1}{2} \right)}{|\vec{a}|}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. حاصل دترمینان را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \log(3x+1) &= \left| \begin{array}{cc} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{array} \right| \Rightarrow \log(3x+1) = \log_5 2 - \log_2 5 \Rightarrow \log(3x+1) \\ &= (\log 5 - \log 2)(\log 5 + \log 2) \Rightarrow \log(3x+1) = \log \frac{5}{2} \log 10. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \log(3x+1) = \log \frac{5}{2} \Rightarrow 3x+1 = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\log \frac{x}{\sqrt{2}} = \log \frac{1}{\sqrt{2}} = \log \frac{2^{-1}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} \log 2 = -1 \quad \text{پس:}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. سهمی $y = 2ax^2 - 5x + 18a$ بر نیمساز سوم یعنی خط $y = x$ مماس است. پس معادله تلاقی این دو شکل باید ریشه مضاعف داشته باشد.

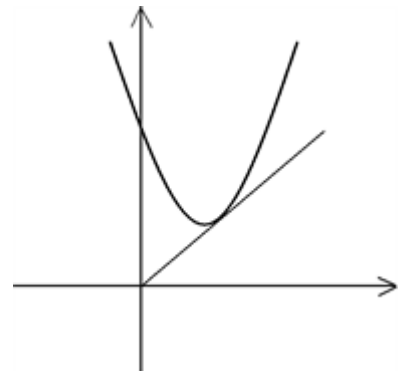
$$\begin{cases} y = 2ax^2 - 5x + 18a \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 2ax^2 - 5x + 18a = x \Rightarrow 2ax^2 - 6x + 18a = 0$$

$$\div 2 \Rightarrow ax^2 - 3x + 9a = 0$$

$$\text{شرط ریشه مضاعف} \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow 9 - 4(a)(9a) = 0 \Rightarrow 4a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

به ازای $a = \frac{1}{2}$ معادله سهمی به صورت $y = x^2 - 5x + 9$ درمی‌آید که معادله استاندارد آن به صورت

$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = y - \frac{11}{4}$ است پس سهمی قائم رو به بالا با رأس $\left(\frac{5}{2}, \frac{11}{4}\right)$ است و این سهمی بر نیمساز ربع اول مماس است پس $a = \frac{1}{2}$ قابل قبول نیست.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا حرف a را به m تغییر می‌دهیم تا با نصف قطر بزرگ بیضی آن را اشتباه نگیریم. پس کانون‌های بیضی $F(0,0)$ و $F'(m,0)$ هستند. پس:

$$FF' = 2c \Rightarrow |m| = 2c \Rightarrow c = \frac{|m|}{2} \quad (1)$$

$$A \in \text{بیضی} \Rightarrow AF + AF' = 2a \Rightarrow 1 + \sqrt{m^2 + 1} = 2a \quad (2)$$

از طرف دیگر:

$$e = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow 2a = \sqrt{5}c \xrightarrow{\text{از (1)}} 1 + \sqrt{m^2 + 1} = \sqrt{5} \times \frac{|m|}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{m^2 + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}|m| - 1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} m^2 + 1 = \frac{5}{4}m^2 + 1 - \sqrt{5}|m| \xrightarrow{\times}$$

$$4m^2 = 5m^2 - 4\sqrt{5}|m| = 0$$

اکنون دو حالت در نظر می‌گیریم:

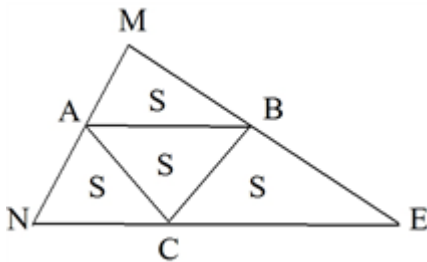
$$m > 0 \xrightarrow{|m|=m} m^2 - 4\sqrt{5}m = 0 \Rightarrow m(m - 4\sqrt{5}) = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } m = 4\sqrt{5}$$

$$m < 0 \xrightarrow{|m|=-m} m^2 + 4\sqrt{5}m = 0 \Rightarrow m(m + 4\sqrt{5}) = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } m = -4\sqrt{5}$$

مسلماً $m = 0$ قابل قبول نیست. زیرا به ازای $m = 0$ به کانون $F'(0,0)$ می‌رسیم که همان کانون F است. پس:

$$m = \pm 4\sqrt{5}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقاط A و B و C وسط اضلاع مثلث MNE به مساحت ۶۴ است. چون $\triangle ABC$ با $\triangle MNE$ متشابه با نسبت $\frac{1}{2}$ است داریم:



$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNE}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{S_{MNE}=64} S_{ABC} = 16$$

اکنون با استفاده از ضرب خارجی مساحت مثلث ABC را پیدا می‌کنیم.

$$\vec{AB} = B - A = (-2, -2a, 0)$$

$$\vec{AC} = C - A = (2, -2 - a, 0)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -2a & 0 \\ 2 & -2 - a & 0 \end{vmatrix} = (16 + 2a + 2a)k = (16 + 4a)k$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| \Rightarrow 16 = \frac{1}{2} \sqrt{(16 + 4a)^2} \Rightarrow |16 + 4a| = 32$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16 + 4a = 32 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow \vec{AB} = (-2, -4, 0) \Rightarrow |\vec{AB}| = 4\sqrt{2} \\ 16 + 4a = -32 \Rightarrow a = -6 \Rightarrow \vec{AB} = (-2, 12, 0) \Rightarrow |\vec{AB}| = 4\sqrt{10} \end{cases}$$

۲۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا در معادله سهمی حرف a را به m تغییر می‌دهیم تا a با پارامتر سهمی اشتباه گرفته نشود. پس معادله سهمی به صورت $3y^2 - 2x - my = 0$ است. اکنون معادله سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$3y^2 - my = 2x \Rightarrow 3\left(y^2 - \frac{m}{3}y\right) = 2x \Rightarrow \left(y - \frac{m}{6}\right)^2 - \frac{m^2}{36} = x \Rightarrow \left(y - \frac{m}{6}\right)^2 = x + \frac{m^2}{36}$$

پس این سهمی افقی روبه راست با رأس $\left(-\frac{m^2}{36}, \frac{m}{6}\right)$ است به طوری که $4a = 1$ است. معادله خط هادی این نوع

سهمی به صورت زیر است:

$$x = -a + \alpha \Rightarrow x = -\frac{1}{4} - \frac{m^2}{36} \xrightarrow{x = -\frac{5}{4}} -\frac{5}{4} = -\frac{1}{4} - \frac{m^2}{36} \xrightarrow{\times(-4)} 5 = 1 + \frac{m^2}{9} \\ \Rightarrow m^2 = 36 \Rightarrow m = \pm 6$$

بنابراین اختلاف مقادیر m برابر ۱۲ است.

۲۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\text{مجموع درایه های } A^2}{\text{مجموع درایه های } A} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{بنابراین:}$$

۲۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس A را به دست می‌آوریم.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{وارون میگیریم}} (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{-2+1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

اکنون طرفین تساوی داده شده را از سمت چپ در ماتریس A ضرب می‌کنیم.

$$2I - 2A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{A \times} 2A - 2B^{-1} = A \times \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2A - 2B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A - 2B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های قطر اصلی این ماتریس برابر ۲- است.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حجم متوازی السطوح و مساحت قاعده متوازی السطوح که متوازی الاضلاع به ضلع های $\vec{b}$ و

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8i + 10j - 4k$$

$\vec{c}$ است را پیدا می کنیم.

$$S = |\vec{b} \times \vec{c}| = \sqrt{8^2 + 10^2 + 4^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

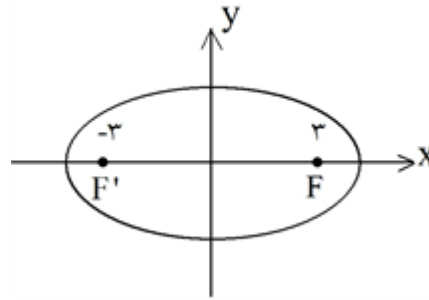
$$a \cdot (b \times c) = (2, -3, 4) \cdot (8, 10, -4) = 16 - 30 - 16 = -30$$

$$V = |a \cdot (b \times c)| = 30$$

$$V = Sh \Rightarrow 30 = 6\sqrt{5}h \Rightarrow h = \sqrt{5}$$

بنابراین:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت.



$$2c = FF' = 6 \Rightarrow c = 3$$

$$\frac{1}{r} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \xrightarrow{c=3} a = 9$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 9^2 - 3^2 = 72 \Rightarrow b = 6\sqrt{2}$$

$$\text{قطر کوچک} = 2b = 12\sqrt{2}$$

پس:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا سطر سوم ماتریس A^2 را پیدا می کنیم.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

اکنون سطر سوم ماتریس A^3 را به دست می آوریم.

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

پس سطر سوم ماتریس A^3 برابر $[-10 \ 1 \ 7]$ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از ماتریس A از چپ و از ماتریس B از راست فاکتور می گیریم.

$$A \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} B - \frac{3}{2} A \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} B = A \left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & -1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \right) B$$

$$= A \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} B = A(-3I)B = -3AB = -3 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -6 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

بنابراین حاصلضرب درایه های غیرواقع بر قطر اصلی این ماتریس برابر ۹ است.

مرکز دایره بزرگتر $x^2 + y^2 + 6x - 2y = a$ به مختصات $O = (-3, 1)$ است. چون خط $y + 2x = 0$ عمود منصف خط‌المركزين دو دایره است. پس اگر O' مرکز دایره کوچکتر باشد آنگاه پای عمود H وسط OO' خواهد بود:

شیب خط $y + 2x = 0$ برابر -2 است، پس شیب خط OO' برابر $\frac{1}{2}$ است داریم.

$$OO' \text{ خط } (y-1) = \frac{1}{2}(x+3) \Rightarrow x-2y = -5$$

$$\begin{cases} x-2y = -5 \\ y+2x = 0 \end{cases} \Rightarrow 5x = -5 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow H = (-1, 2)$$

$$OO' \text{ وسط } H \Rightarrow H = \frac{O+O'}{2} \Rightarrow O' = 2H - O \Rightarrow O' = 2(-1, 2) - (-3, 1) = (1, 3)$$

بنابراین معادله دایره کوچکتر به صورت زیر است:

$$R' = O'H = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$C': (x-1)^2 + (y-3)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$$

از طرف دیگر شعاع دایره بزرگتر چون دو برابر R' است پس شعاع دایره $C: x^2 + y^2 + 6x - 2y = a$ برابر $2\sqrt{5}$ است پس:

$$2\sqrt{5} = \frac{\sqrt{36+4+4a}}{2} \Rightarrow 2\sqrt{5} = \sqrt{10+a} \Rightarrow 20 = 10+a \Rightarrow a = 10$$

اکنون وتر مشترک دو دایره C و C' را به دست می‌آوریم تا برخورد این وتر مشترک با یکی از دایره‌ها نقاط تلاقی A و B را ایجاد کند.

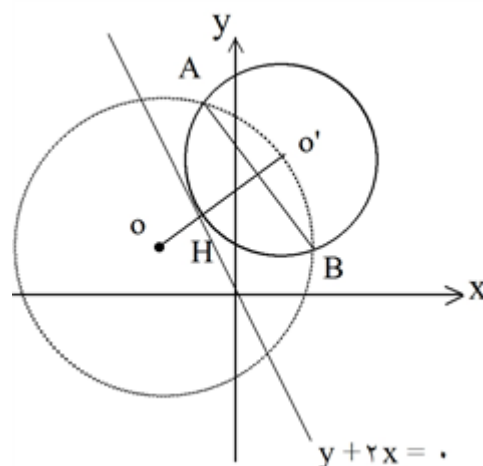
$$\begin{aligned} C: & \begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 2y - 10 = 0 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2y - 10 \end{cases} \\ C': & \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 \end{cases} \end{aligned}$$

$$= x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 \Rightarrow 8x + 4y = 15 \Rightarrow y = \frac{15-8x}{4}$$

$$C: x^2 + \left(\frac{15-8x}{4}\right)^2 + 6x - 2\left(\frac{15-8x}{4}\right) - 10 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{225 + 64x^2 - 240x}{16} + 6x - \frac{15-8x}{2} - 10 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 5x - \frac{55}{16} = 0$$

$$\Rightarrow \text{جمع ریشه ها} = S = \frac{5}{5} = 1$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ضرب داخلی دو بردار عمود بر هم برابر صفر است. در صورتی که θ زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد

داریم.

$$\left(\frac{9\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{7\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \cdot \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) = 0 \Rightarrow \frac{9\vec{a} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} - \frac{27\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} + \frac{7\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} - \frac{21\vec{b} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} = 0$$

$$\frac{9|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2} - \frac{20|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}||\vec{b}|} - \frac{21|\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2} = 0 \Rightarrow 9 - 20\cos\theta - 21 = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{5}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$S = \left| \left(\frac{9\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{7\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \times \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{2\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \right|$$

بنابراین:

$$= \left| \frac{9\vec{a} \times \vec{a}}{|\vec{a}|^2} - \frac{18\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} + \frac{7\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{a}||\vec{b}|} - \frac{14\vec{b} \times \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right|$$

$$= \left| \frac{9\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \right| = \frac{9}{|\vec{a}||\vec{b}|} |\vec{b} \times \vec{a}| = \frac{9}{|\vec{a}||\vec{b}|} (|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta) = 9\sin\theta = 9 \times \frac{\sqrt{21}}{5} = \frac{9\sqrt{21}}{5}$$

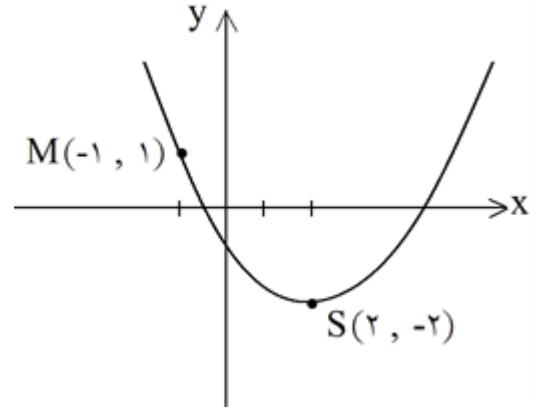
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طول وتری که از کانون بر محور سهمی عمود می‌شود برابر $4a$ است. در این سؤال نوع سهمی مشخص نیست. فرض کنیم $S(2, -2)$ رأس سهمی قائم رو به بالا باشد که از نقطه $M(-1, 1)$ عبور می‌کند داریم.

$$\Rightarrow (x - \alpha)^2 = 4a(y - \beta) \Rightarrow \text{معادله سهمی قائم رو به بالا}$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 = 4a(y + 2) \xrightarrow{M \in \text{سهمی}}$$

$$(-1 - 2)^2 = 4a(1 + 2) \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$4a = 4\left(\frac{3}{4}\right) = 3 \quad \text{بنابراین:}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \cdot \frac{a}{r} & 2 \cdot \frac{a}{r} \\ 5 \cdot \frac{a}{r} & 1 \cdot \frac{a}{r} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{دترمینان میگیریم}} |A| = \begin{bmatrix} 1 \cdot \frac{a}{r} & 2 \cdot \frac{a}{r} \\ 5 \cdot \frac{a}{r} & 1 \cdot \frac{a}{r} \end{bmatrix}$$

$$= 1 \cdot \frac{a}{r} \times 1 \cdot \frac{a}{r} - 5 \cdot \frac{a}{r} \times 2 \cdot \frac{a}{r} = 1 \cdot \frac{a}{r} + \frac{a}{r} - (5 \times 2) \cdot \frac{a}{r} = 1 \cdot \frac{2a}{r} - 10 \cdot \frac{a}{r}$$

از طرف دیگر بنابر فرض داریم:

$$a = (\text{Log } 25)^r - (\text{Log } 4)^r = (\text{Log } 25 - \text{Log } 4)(\text{Log } 25 + \text{Log } 4) = \left(\text{Log } \frac{25}{4}\right)(\text{Log } 100)$$

$$= \left(\text{Log } \frac{25}{4}\right)(2) = 2 \text{Log } \frac{25}{4} \quad (1)$$

بنابراین:

$$|A| = 1 \cdot \frac{2a}{r} - 10 \cdot \frac{a}{r} \xrightarrow{\text{از ۱}} |A| = 1 \cdot \frac{2}{r} \text{Log } \frac{25}{4} - 10 \cdot \frac{2}{r} \text{Log } \frac{25}{4} \Rightarrow |A| = 1 \cdot \text{Log } \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{2}{r}} - 10 \cdot \text{Log } \frac{25}{4}$$

$$= \left(\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{2}{r}}\right)^{\text{Log } 10} - \left(\frac{25}{4}\right)^{\text{Log } 10} = \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{2}{r}} - \frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^r - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{125}{8} - \frac{25}{4}$$

$$= \frac{125 - 50}{8} = \frac{75}{8}$$

$$\left|\frac{1}{3}A\right| = \left(\frac{1}{3}\right)^r |A| = \frac{1}{9} \times \frac{75}{8} = \frac{25}{24}$$

در نتیجه:

تذکر: از روابط $1 = \text{Log } 10$ و $\text{Log } \frac{a}{b} = \text{Log } a - \text{Log } b$ و $\text{Log } a + \text{Log } b = \text{Log } ab$ و $a^{\text{Log } b} = b^{\text{Log } a}$ و $\sqrt[r]{a} = a^{\frac{1}{r}}$ در حل سؤال استفاده شده است.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. خط $y - x = 0$ بر دایره $x^2 + y^2 + 6x - 2y = r$ مماس است. پس فاصله مرکز این دایره تا خط مماس برابر شعاع دایره است.

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y - r = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} o = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (-3, 1) \\ R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{36 + 4 - 4r}}{2} \\ = \sqrt{10 + r} \end{cases}$$

$$\text{فاصله } o \text{ تا خط مماس} = R \Rightarrow \frac{|1 + 3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{10 + r} \Rightarrow r = -2$$

پس معادله دایره به صورت $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2 = 0$ است و $R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. اگر o' مرکز دایره دوم باشد. چون خط $y = x$ عمودمنصف oo' است پس o' قرینه o نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم است. پس $o' = (1, -3)$ و شعاع دایره دوم برابر $2R = 4\sqrt{2}$ است.

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 32 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 6y - 22 = 0$$

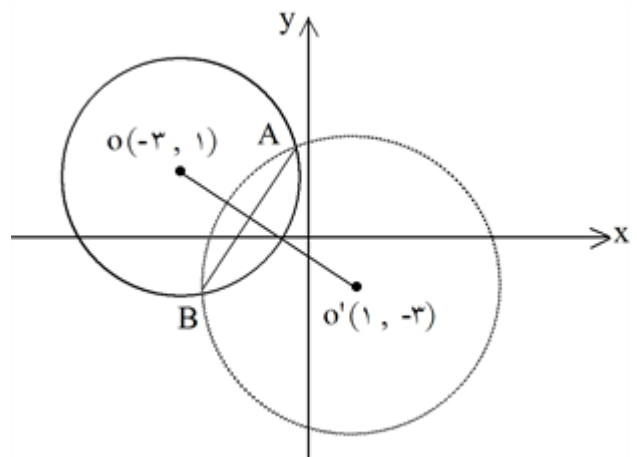
در صورتی که A و B نقاط تلاقی دو دایره باشند. آنگاه تلاقی وتر مشترک دو دایره با یکی از دایره‌ها مختصات این نقاط را ایجاد می‌کند.

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2 = 0 & \text{وتر} \\ x^2 + y^2 - 2x + 6y - 22 = 0 & \text{مشترک} \end{cases} \xrightarrow{\quad} x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2$$

$$= x^2 + y^2 - 2x + 6y - 22 = 0 \Rightarrow 8x - 8y + 24 = 0 \xrightarrow{\div 8} x - y + 3 = 0 \Rightarrow y = x + 3(2)$$

$$(2) \text{ و } (1) \Rightarrow x^2 + (x+3)^2 + 6x - 2(x+3) + 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 10x + 5 = 0$$

$$B \text{ و } A \text{ حاصل ضرب طول نقاط } P = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم θ زاویه بین بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد بنابر فرض سؤال می‌نویسیم.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{r}{5} |\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = -\frac{r}{5} |\vec{a}| |\vec{b}| \Rightarrow \cos \theta = -\frac{r}{5}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} - \frac{r\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \times \left(\frac{r\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{r\vec{b}}{|\vec{a}|} \right) \right|$$

بنابراین:

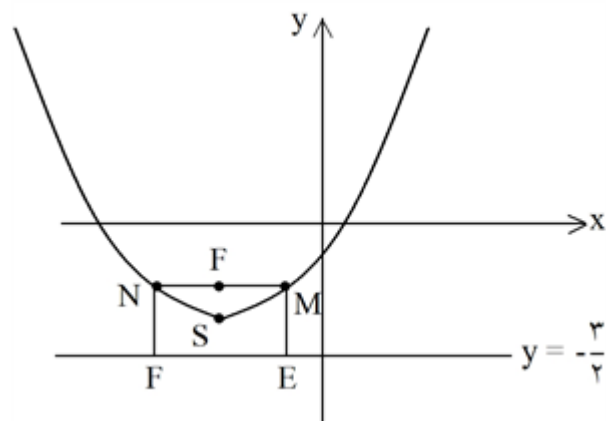
$$= \frac{1}{2} \left| \frac{r\vec{a} \times \vec{a}}{|\vec{a}|^2} + \frac{r\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} - \frac{r\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{b}| |\vec{a}|} - \frac{r\vec{b} \times \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{r\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right|$$

$$= \frac{r}{|\vec{a}| |\vec{b}|} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{r}{|\vec{a}| |\vec{b}|} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = r \sin \theta = r \times \frac{4}{5} = \frac{16}{5} = 3.2$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در صورت سؤال مشخص نشده است که سهمی افقی یا قائم است. فرض کنیم سهمی قائم رو به بالا با رأس $(-1, -1)$ باشد داریم.

$$(x - \alpha)^r = ra(y - \beta) \xrightarrow{\alpha=\beta=-1} (x+1)^r = ra(y+1)$$

نقطه $(1, 1)$ در این سهمی صدق می‌کند. پس:



$$(x+1)^r = ra(y+1) \Rightarrow (1+1)^r = ra(1+1)$$

$$= 2ra \Rightarrow a = \frac{1}{r}$$

اگر $MN = ra = 2$ باشد آنگاه NF و ME عمود بر خط هادی باشند و $NF = 2a = 1$ است.

$$MNFE \text{ قطر مستطیل} = \sqrt{MN^2 + NF^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$A = \begin{bmatrix} \log_6 3 & \log_6 2 \\ \log_6 2 & \log_6 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{می گیریم}]{\text{دترمینان}} |A| = \begin{vmatrix} \log_6 3 & \log_6 2 \\ \log_6 2 & \log_6 3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = \left(\log_6 3\right)^2 - \left(\log_6 2\right)^2 = \left(\log_6 3 - \log_6 2\right) \left(\log_6 3 + \log_6 2\right)$$

$$= \left(\log_6 \frac{3}{2}\right) \left(\log_6 6\right) = \left(\log_6 \frac{3}{2}\right) (1) = \log_6 \frac{3}{2}$$

بنابراین:

$$B = \begin{bmatrix} 6^{|A|} & 2^{|A|} \\ 2^{|A|} & 3 \cdot 6^{|A|} \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 6^{|A|} & 2^{|A|} \\ 2^{|A|} & 3 \cdot 6^{|A|} \end{vmatrix} \Rightarrow |B| = 6^{|A|} \times 6^{|A|} - 2^{|A|} \times 2^{|A|}$$

$$= 6^{2|A|} - 2^{2|A|} = 6^{2 \log_6 \frac{3}{2}} - 2^{2 \log_6 \frac{3}{2}} = 6^{\log_6 \left(\frac{3}{2}\right)^2} - 2^{\log_6 \left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{27}{16} - \frac{9}{16} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$$

نکته: می‌دانیم $\log_a a = 1$ و $n \log_a a = \log_a a^n$ و $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ و $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$

$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. معادله سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$2 \left(y^2 - \frac{b}{2} y + \frac{b^2}{16} \right) = 32x - a + \frac{b^2}{4} \Rightarrow \left(y - \frac{b}{4} \right)^2 = 8 \left(x - \frac{a}{32} + \frac{b^2}{128} \right)$$

بنابراین رأس این سهمی $\left(\frac{a}{32} - \frac{b^2}{128}, \frac{b}{4} \right)$ است. بنابراین:

$$\text{رأس سهمی} \left(\frac{1}{2}, -2 \right) \Rightarrow \begin{cases} \beta = -2 = \frac{b}{4} \Rightarrow b = -8 \\ \alpha = \frac{1}{2} = \frac{a}{32} - \frac{b^2}{128} \xrightarrow{b=-8} a = 32 \end{cases} \Rightarrow a - b = 40$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقطه $(1, -1)$ روی هر دو خط مماس و قائم قرار دارد. پس:

$$L_1 : x + ay = 3 \xrightarrow{(1, -1) \in L_1} a = -2; L_2 : x + by = c \xrightarrow{(1, -1) \in L_2} 1 - b = c(1)$$

از طرف دیگر می‌دانیم خط مماس بر خط قائم عمود است پس:

$$L_1 : x + (-2)y = 3 \Rightarrow m_1 = \frac{1}{2}; L_2 : x + by = c \Rightarrow m_2 = \frac{-1}{b}; L_1 \perp L_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{-1}{b} = -1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \xrightarrow{(1) \text{ از (1)}} c = \frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$O \left(\frac{-\alpha}{2}, \frac{-1}{2} \right) \xrightarrow{O \in L_2} \frac{-\alpha}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{2} \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{-3}{2}; (1, -1) \in C$$

دایره $\Rightarrow 1 + 1 - \frac{3}{2} - 1 = \beta \Rightarrow \beta = \frac{-1}{2}$

$\alpha + \beta = -2$



۴۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حاصل دترمینان A را نسبت به ستون سوم به دست می‌آوریم.

$$|A| = -(-5)(-1+6) = 25$$

از طرف دیگر اگر $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ آنگاه رابطه ماتریس داده شده به صورت $BXC = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ درمی‌آید. بنابراین $X = B^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} C^{-1}$ داریم:

$$X = \frac{1}{-8+3} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \times \frac{1}{2-4} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{5}{10} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4/5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۴۱

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+y & 0 & y+yz \\ 0 & x^2 & 0 \\ 1+z & 0 & y+yz \end{bmatrix}$$

در ماتریس اسکالر، درایه‌های روی قطر اصلی برابرند و درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند. پس:

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+z=0 \Rightarrow z=-1 \\ x^2=1+y \Rightarrow x^2-y=1 \end{cases} \xrightarrow{+} x^2-y+z=0$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۴۲

$$\begin{cases} 2y-3x=3 \xrightarrow{\times 2} 4y-6x=6 \\ 3y+2x=11 \xrightarrow{\times 2} 6y+4x=22 \end{cases} \Rightarrow 12y=39 \Rightarrow y=3 \Rightarrow x=1 \Rightarrow O'(1,3)$$

$$OO' = \sqrt{1+9} \Rightarrow OO' = \sqrt{10}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های 3×3 داریم:

۴۳

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (8+9+0) - (12+6+0) = -1$$

$$||A|A| = |-A| = (-1)^T |A| = (-1)(-1) = 1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۴۴

$$D = ABC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x-1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & x+1 & x-1 \\ x & -x+2 & x \\ -x-2 & -3 & -2x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+5 & 0 & x+1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2x-7 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های قطر اصلی = مجموع درایه‌های قطر فرعی $\Rightarrow x+2 = -x-6 \Rightarrow 2x = -8 \Rightarrow x = -4$ 

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا معادله سهمی را استاندارد می‌کنیم:

$$y^2 - 4y = x - 2 \xrightarrow{+4} y^2 - 4y + 4 = x + 2$$

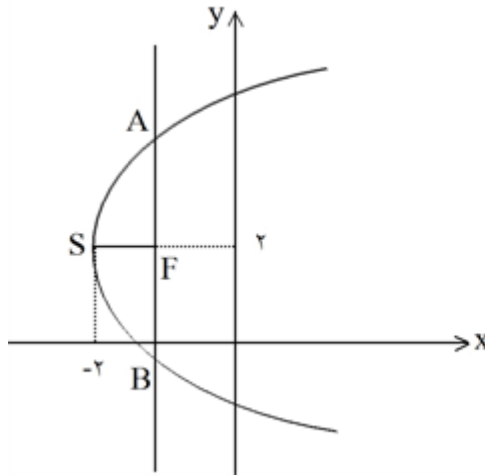
$$\Rightarrow (y - 2)^2 = x + 2$$

سهمی افقی و دهانه آن به سمت راست است. نقطه $S(-2, 2)$ رأس سهمی و $a = \frac{1}{4}$ فاصله کانونی آن است. مطابق

شکل AB وتر کانونی سهمی و طول آن ۴ برابر فاصله کانونی سهمی است، پس داریم:

$$AB = 4 \times \frac{1}{4} = 1$$

$$S_{SAB} = \frac{1}{2} SF \times AB = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{8}$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم طول تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی امتداد بردار $\vec{b}$ از رابطه $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$ به دست می‌آید،

بنابراین با فرض $\vec{b} = (1, 0, a)$, $\vec{a} = (2, -a, 3)$ داریم:

$$\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{|2 + 0 + 3a|}{\sqrt{1 + 0 + a^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{|2 + 3a|}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$$

$$\frac{(2 + 3a)^2}{1 + a^2} = \frac{25}{2} \Rightarrow 2(4 + 12a + 9a^2) = 25(1 + a^2) \Rightarrow 7a^2 - 24a + 17 = 0$$

$$\xrightarrow[\text{صفر است}]{\text{جمع ضرایب}} \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{17}{7} \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف مقادیر } a = \frac{17}{7} - 1 = \frac{10}{7}$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم خط مرکزین دو دایره متقاطع، عمودمنصف وتر مشترک این دو دایره است. پس اگر نقطه M وسط پاره خط AB باشد، آن‌گاه داریم:

$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(1,4) + (3,2)}{2} = (2,3)$$

$$m_{AB} = \frac{2-4}{3-1} = -1 \Rightarrow m_d = 1$$

$$(خط\ مرکزین\ d) : y - 3 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x + 1$$

طول خط مرکزین دو دایره، دو برابر طول پاره خط AB است:

$$AB = \sqrt{(2-4)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow OO' = 4\sqrt{2}$$

چون شعاع دو دایره برابر است، پس فاصله نقاط O و O' از وتر مشترک یکسان است، یعنی $OM = O'M = 2\sqrt{2}$. با توجه به اینکه نقطه O روی خط $y = x + 1$ واقع است، مختصات O از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$OM = 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{(2-x)^2 + (3-y)^2} = 2\sqrt{2} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (2-x)^2 + (3-y)^2 = 8$$

$$\xrightarrow{y=x+1} (2-x)^2 + (2-x)^2 = 8 \Rightarrow (2-x)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} 2-x = 2 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow O(0,1) \\ 2-x = -2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow O'(4,5) \end{cases}$$

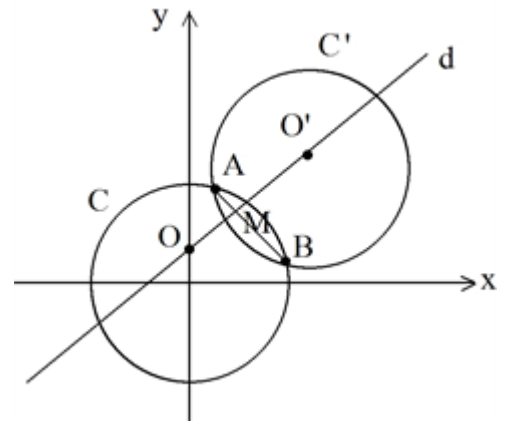
دایره به مرکز $O'(4,5)$ ، محور xها را قطع نمی‌کند. برای دایره به مرکز $O(0,1)$ داریم:

$$R = OA = \sqrt{(1-0)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{دایره} : x^2 + (y-1)^2 = 10 \xrightarrow{y=0} x^2 + 1 = 10 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

تقاطع با محور xها

یعنی دایره در دو نقطه به طول‌های ۳ و -۳، محور xها را قطع می‌کند که فاصله آنها برابر ۶ واحد است.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا معادله بیضی را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$x^2 + 4y^2 - 16y - 2x + 16 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x) + 4(y^2 - 4y) + 16 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 - 1 + 4[(y-2)^2 - 4] + 16 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 1$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{\frac{1}{4}} = 1$$

بنابراین بیضی افقی با مقادیر $a^2 = 1$ و $b^2 = \frac{1}{4}$ است پس:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین فاصله دو کانون برابر $2c = \sqrt{3}$ است.

(توجه کنید معادله بیضی از کتاب درسی هندسه ۳ حذف شده است.)

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای مشخص شدن راه حل هر دو دایره را ترسیم می‌کنیم برای این کار مرکز و شعاع دایره‌ها را پیدا می‌کنیم.

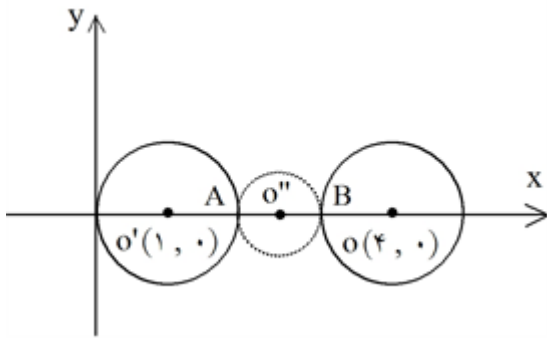
$$x^2 - 8x + y^2 + 15 = 0 \Rightarrow o \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \right) = (4, 0), R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{64 - 60}}{2} = 1$$

$$x^2 - 2x + y^2 = 0 \Rightarrow o' \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2} \right) = (1, 0), R' = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

مطابق شکل دایره خط چین به مرکز o'' و شعاع R'' مرکزش روی محور x ها قرار دارد و بر هر دو دایره مماس خارج است.

در شکل AB قطر دایره خط چین است چون $A(2, 0)$ و $B(4, 0)$ است. پس $o'' = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{5}{2}, 0 \right)$ و $R'' = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}$

بنابراین معادله این دایره به صورت زیر است:



$$\left(x - \frac{5}{2} \right)^2 + (y - 0)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + \frac{25}{4} - 5x + y^2 = \frac{1}{4} \\ \Rightarrow x^2 + y^2 - 5x + 6 = 0$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا درایه‌های ماتریس A^2 را به دست آورید:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

اکنون فقط درایه‌های سطر اول ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم:

$$A^2 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

بنابراین درایه‌های سطر اول ماتریس A^2 به صورت $[1 \ -1 \ 0]$ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ برابر $A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ است. پس:

$$\alpha A + \beta I = A^{-1} \Rightarrow \alpha \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\alpha + \beta & 2\alpha \\ 4\alpha & -3\alpha + \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = \frac{3}{5} \Rightarrow -\frac{1}{5} + \beta = \frac{3}{5} \Rightarrow \beta = \frac{4}{5} \\ 4\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5} \end{cases}$$

بنابراین:

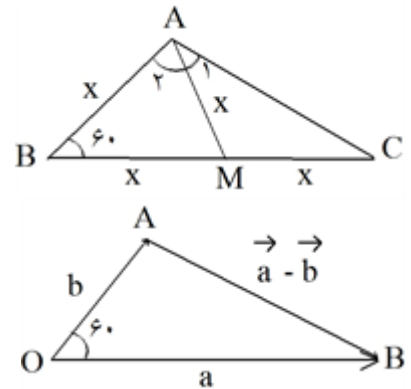
$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = 4 \text{ در نتیجه}$$

۵۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در نظر بگیرید $\vec{a} = 2\vec{b}$ در این صورت بردار $\vec{a} - \vec{b}$ مطابق شکل مقابل خواهد بود.

در مثلث OAB یک زاویه 60° و اندازه‌ی دو ضلع این زاویه‌ی 60° به نسبت ۱ به ۲ هستند پس مثلث OAB قائم الزاویه است و $\hat{A} = 90^\circ$ پس $\hat{B} = 30^\circ$ در نتیجه زاویه‌ی بین بردار $\vec{a}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ برابر 30° است.

نکته: توجه کنید اگر در مثلث ABC زاویه $\hat{B}$ مساوی 60° و $AB = x$ و $BC = 2x$ آنگاه $\hat{A} = 90^\circ$. زیرا اگر میانه AM وارد بر BC را رسم کنید آنگاه مثلث ABM متساوی الاضلاع و مثلث AMC متساوی الساقین است. پس $\hat{A}_1 = 60^\circ$ و $\hat{A}_2 = 30^\circ$ نتیجه $\hat{A} = 90^\circ$.



۵۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ارتفاع بردار $\vec{h}$ برابر ۴ است پس انتهای بردار $\vec{h}$ روی صفحه‌ی $z = 4$ قرار دارد. در ضمن بردار h بر بردارهای a و b عمود نیست زیرا $\vec{a} \cdot \vec{h} \neq 0$ و $\vec{b} \cdot \vec{h} \neq 0$ بنابراین بردار h روی صفحه $z = 4$ قرار دارد. در نتیجه انتهای بردار $\vec{c}$ روی صفحه $z = 4$ واقع است در نتیجه مختصات بردار c به صورت $(x, y, 4)$ است بنابر فرض سؤال داریم. در نتیجه انتهای بردار $\vec{c}$ روی صفحه $z = 4$ واقع است در نتیجه مختصات بردار c به صورت $(x, y, 4)$ است بنابر فرض سؤال داریم:

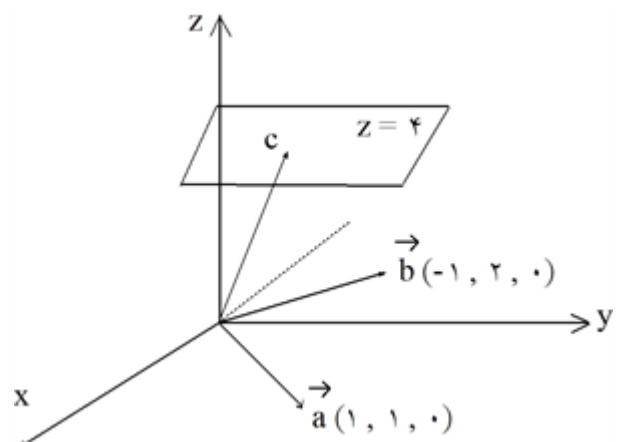
$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \Rightarrow (1, 1, 0) \cdot (x, y, 4) = 1 \Rightarrow x + y = 1$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 5 \Rightarrow (-1, 2, 0) \cdot (x, y, 4) = 5 \Rightarrow -x + 2y = 5$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -x + 2y = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} 3y = 6 \Rightarrow y = 2, x = -1$$

بنابراین:

$$|\vec{c}| = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21} \text{ پس } \vec{c} = (-1, 2, 4)$$



۵۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر در سهمی افقی از معادله‌ی سهمی نسبت به y مشتق گرفته مساوی صفر قرار دهیم آنگاه عرض رأس سهمی بدست می‌آید پس:

$$f'_y = 0 \Rightarrow 4y - 2a = 0 \xrightarrow{y=1} 4 - 2a = 0 \Rightarrow a = 2$$

در ضمن رأس سهمی در معادله‌ی سهمی صدق می‌کند پس:

$$2 - 2a - 8 + b = 0 \xrightarrow{a=2} 2 - 4 - 8 + b = 0 \Rightarrow b = 10$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با انتخاب دو مقدار دلخواه برای m دو قطر دایره را بدست آورده از تلاقی این دو قطر مرکز دایره بدست می‌آید.

$$\left. \begin{aligned} m = 2 &\Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2 \\ m = -1 &\Rightarrow -3x = 6 \Rightarrow x = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مرکز دایره } O(-2, 2)$$

$$R = OA = \sqrt{(-1+2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\text{بنابراین: } 2\pi R = 2\sqrt{2}\pi$$

چون A روی دایره است پس:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا دترمینان A را بدست می‌آوریم.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(3-2) + 1(12-4) - 3(4-2) = 1 + 8 - 6 = 3$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix} 2|A| & |A| \\ 1 & \frac{2}{|A|} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

اکنون طرفین تساوی ماتریسی بالا را در وارون ماتریس $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ یعنی ماتریس $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ از قسمت چپ ضرب

$$x = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -15 & 6 \end{bmatrix}$$

می‌کنیم. در نتیجه:

پس کوچکترین درایه‌ی قطر اصلی ماتریس X برابر ۶ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس AB را پیدا می‌کنیم.

$$AB = \begin{bmatrix} x & -1 & -x \\ . & . & 4 \\ y & z & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2z & \frac{1}{z} & 2 \\ 2z & . & -4y \\ . & \frac{1}{z} & . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xz - 2z & . & 2x + 4y \\ . & 2 & . \\ 2yz + 2z^2 & \frac{y}{z} + \frac{z}{z} & 2y - 4yz \end{bmatrix}$$

ماتریس AB ماتریس اسکار است پس درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر و درایه‌های روی قطر اصلی همگی برابر یکدیگرند. بنابراین:

$$\begin{cases} 2xz - 2z = 2 \Rightarrow xz + z = 1 \xrightarrow{(1)(\frac{1}{z})} -xy + y = 1 \\ 2y - 4yz = 2 \Rightarrow y - 2yz = 1 \xrightarrow{(1)(\frac{1}{z})} y + 2y^2 = 1 \\ 2x + 4y = . \Rightarrow x = -2y \\ 2yz + 2z^2 = . \xrightarrow{z \neq 0} y = -z \quad (1) \\ \frac{y}{z} + \frac{z}{z} = . \Rightarrow y = -z \end{cases}$$

در نتیجه:

$$2y^2 + y - 1 = . \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

$$-xy + y = 1 \xrightarrow{y=-1} -xy - 1 = 1 \Rightarrow xy = -2 \quad \text{بنابراین:}$$

دقت کنید $z \neq 0$ زیرا در غیر این صورت مقدار $2xz - 2z$ برابر صفر است و با اسکار بودن ماتریس AB در تناقض است.

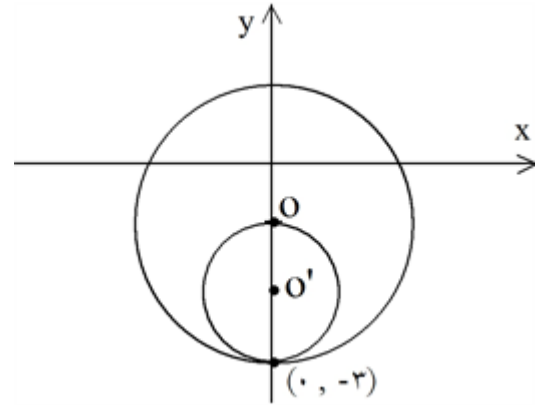


$$x^2 + (y+1)^2 = 2^2 \Rightarrow R=2, O(0, -1)$$

مطابق شکل اگر دایره جدید بخواهد با دایره فعلی مماس داخل باشد و از نقطه $(0, -3)$ نیز عبور کند تنها حالت آن است که دایره مذکور تنها نقطه تماسش (نقطه مماس) همان نقطه $(0, -3)$ باشد. پس مرکز دایره جدید به فرم $O'(0, y)$ است.

شعاع دایره جدید نصف شعاع دایره داده شده $\rightarrow R'=1, O'=(0, -2)$

$$x^2 + (y+2)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$$



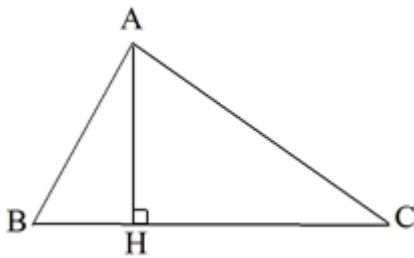
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راه حل اول: BH اندازه‌ی تصویر بردار $\overrightarrow{BA}$ روی بردار $\overrightarrow{B}$ است.

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (-2, 2, 1)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (-1, -1, 2)$$

$$|\overrightarrow{BH}| = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{2-2+2}{\sqrt{1+1+2}} = \frac{2}{\sqrt{4}}$$

$$= \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} = \frac{\sqrt{4+4+1}}{2} = \frac{3}{2}$$



بنابراین:

$$\triangle ABH : AH^2 = AB^2 - BH^2 \Rightarrow AH^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{27}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

راه حل دوم: مساحت مثلث ABC را به دست می‌آوریم.

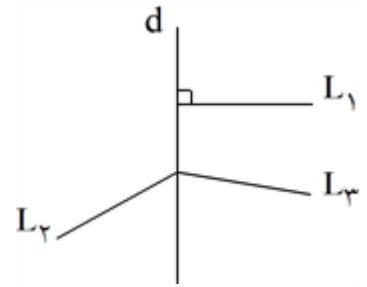
$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} &= A - B = (-2, 2, 1) \Rightarrow \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5i + 3j + 4k \\ \overrightarrow{BC} &= C - B = (-1, -1, 2) \\ S_{ABC} &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \sqrt{25 + 9 + 16} = \frac{5\sqrt{2}}{2}, |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \\ S_{ABC} &= \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} AH \times \sqrt{6} \Rightarrow AH = \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

بنابراین:



۶۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مجموعه خط هایی که بر خط مفروض d (در فضا) عمود هستند یا موازیند که در صفحه های مختلف شامل خط d قرار می گیرند. یا متقاطع اند که در صفحات عمود بر خط d قرار می گیرند، یا متناظرند که هر کدام از آن ها در صفحات مختلف گذرنده از خط d قرار می گیرند. به نادرستی سایر گزینه ها توجه کنید. مخصوصاً گزینه ی ۴ که آنچه مطرح شده یک سطح مخروطی را ایجاد می کند نه یک مخروط.



۶۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: ماتریس A^T (ترانهای ماتریس A) ماتریسی است که از تعویض جای سطرها و ستون های ماتریس A حاصل می شود. (این تعریف در کتاب هندسه ۳ نظام جدید وجود ندارد)

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + 10 & a + 2 \\ a + 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AA^TB = 52I \Rightarrow |AA^TB| = |52I| \Rightarrow |AA^T||B| = 52^2 \times 1 \Rightarrow [3(a^2 + 10) - (a + 2)^2] \times 104$$

$$= 52^2 \Rightarrow 3a^2 + 30 - a^2 - 4a - 4 = 26 \Rightarrow 2a^2 - 4a = 0 \Rightarrow 2a(a - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a ، برابر ۲ است.

۶۲

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فقط درایه های قطر اصلی A را محاسبه می کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & ? & ? \\ ? & 7 & ? \\ ? & ? & 5 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه های قطر اصلی A برابر $9 + 7 + 5 = 21$ است.

۶۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از تساوی ماتریسی داده شده یک دستگاه می سازیم و آن را حل می کنیم.

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4b_1 \\ 4b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5b_1 - 2b_2 \\ 2b_1 + ab_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4b_1 \\ 4b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5b_1 - 2b_2 = 4b_1 \\ 2b_1 + ab_2 = 4b_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = 2b_2 \\ 2b_1 + ab_2 = 4b_2 \end{cases} \xrightarrow{b_1 = 2b_2} 4b_2 + ab_2 = 4b_2 \Rightarrow a = -4$$

۶۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون $a \cdot b$ یک عدد است پس بردار $(a \cdot b)(a \times b)$ مضرب $a \times b$ است پس $(a \cdot b)(a \times b)$ موازی

بردار $\vec{c}$ است، اگر و فقط اگر موازی آن $\vec{a} \times \vec{b}$ موازی $\vec{c}$ باشد پس ابتدا $a \times b$ را به دست می آوریم.

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & \alpha & 2 \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 2 \end{vmatrix} = \left(2\alpha - \frac{4}{3}\right)i - \left(-2 + \frac{8}{3}\right)j + \left(-\frac{2}{3} + \frac{4\alpha}{3}\right)k$$

چون $(\vec{a} \times \vec{b}) \parallel \vec{c}$ است پس مختصات آن ها نظیر به نظیر متناسبند.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(2\alpha - \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3} + \frac{4\alpha}{3}\right), \vec{c} = (-1, 1, -1)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \parallel \vec{c} \Rightarrow \frac{2\alpha - \frac{4}{3}}{-1} = \frac{-\frac{2}{3}}{1} = \frac{-\frac{2}{3} + \frac{4\alpha}{3}}{-1} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 1 \\ \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{4\alpha}{3} \Rightarrow \frac{4\alpha}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = 1 \end{cases}$$

بنابراین به ازای $\alpha = 1$ شرط سؤال برقرار است.

۶۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر معادلات دایره ها را در یک دستگاه بنویسیم، با حذف x^2 و y^2 از دستگاه هر آنچه بماند

معادله وتر مشترک است.

$$2y - 2x = 0 \Rightarrow x = y$$

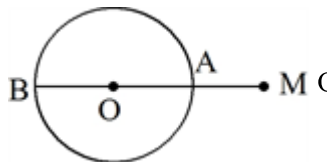
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نقطه تلاقی قطرهای $x + y = 1$ و $x - y = 3$ مرکز دایره است.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \xrightarrow{+} 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -1$$

پس مرکز دایره $O(2, -1)$ است. در ضمن فاصله O تا خط مماس $4x + 3y + 5 = 0$ برابر شعاع دایره است.

$$R = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|8 - 3 + 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{10}{5} = 2$$

نزدیکترین فاصله $M(4, -2)$ از دایره مساوی $|OM - R|$ است. بنابراین:



$$OM = \sqrt{(4-2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{5}$$

$$MA = \text{نزدیکترین فاصله} = |OM - R| = \sqrt{5} - 2$$

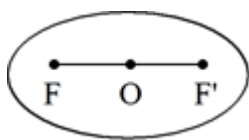
گزینه ۲ پاسخ صحیح است. معادله سهمی را به صورت استاندارد می نویسیم.

$$(x-1)^2 = 12y + 6 \Rightarrow (x-1)^2 = 12\left(y + \frac{1}{2}\right)$$

پس این سهمی قائم رو به بالا است و رأس آن $F\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ است و $a = 3$ و $4a = 12 \Rightarrow a = 3$ بنابراین کانون این سهمی

$F'(\alpha, a + \beta) = \left(1, 3 - \frac{1}{2}\right) = \left(1, \frac{5}{2}\right)$ است. (توجه کنید α و β مختصات رأس سهمی هستند).

با توجه به فرض سؤال نقاط $F\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ و $F'\left(1, \frac{5}{2}\right)$ کانونهای بیضی با خروج از مرکز $0/6$ می باشند.



مسلاً مرکز این بیضی وسط FF' است پس داریم.

$$O = \frac{F + F'}{2} = (1, 1) \Rightarrow \text{فاصله } O \text{ تا مبدا مختصات} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: ماتریس A^T (ترانژاده ماتریس A)، ماتریسی است که از تعویض جای سطرها و ستونهای ماتریس A حاصل می شود. (این تعریف در کتاب هندسه ۳ نظام جدید وجود ندارد).

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$BA^T A = 52I \Rightarrow B \times \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 52I \Rightarrow B \times \frac{1}{52} \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = I$$

بنابراین ماتریس B ، وارون ماتریس $\frac{1}{52} \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ است و در نتیجه داریم:

$$B = 52 \times \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -8 & 28 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماکزیمم درایه های ماتریس B ، برابر ۲۸ است.

تذکر: وارون ماتریس kA به صورت $\frac{1}{k}A^{-1}$ است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنیم $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ در این صورت برای به

دست آوردن سطر سوم ماتریس A کافیهست سطر سوم ماتریس BC را پیدا کرده در ماتریس D ضرب کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه های سطح سوم ماتریس A برابر ۲۸ - ۵ = ۲۳ است.



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زاویه بین بردار a و محور z ها همان زاویه بین a و بردار k است.

$$\cos 45^\circ = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| |\vec{k}|} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(-1, \alpha, 1) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{1 + \alpha^2 + 1} \sqrt{1}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \sqrt{\alpha^2 + 2} = 2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} \alpha^2 + 2 = 2 \Rightarrow \alpha = 0$$

پس $a = (-1, 0, 1)$ بنابراین:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 2 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}i - \frac{2}{3}j - \frac{2}{3}k$$

$$\cos \theta = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{k}}{|\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{k}|} = \frac{-\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} \times 1} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} \sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\begin{vmatrix} \log 5 & \log 2 \\ \log 2 & \log 5 \end{vmatrix} \log \frac{5}{2}^{(3x-2)}}{(\log 5)^2 - (\log 2)^2} = 1$$

$$\frac{(\log 5 + \log 2)(\log 5 - \log 2)}{\log 10} \cdot \log \frac{5}{2}^{(3x-2)} = 1$$

$$\log \frac{5}{2} \times \log \frac{5}{2}^{(3x-2)} = 1 \Rightarrow \log \frac{5}{2} \times \frac{\log (3x-2)}{\log \frac{5}{2}} = \log (3x-2) = 1 \Rightarrow 3x-2 = 10 \Rightarrow x = 4$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از معادله سهمی $y = ax^2 + bx + c$ نسبت به x مشتق می‌گیریم. ریشه‌ی این مشتق طول رأس سهمی را به وجود می‌آورد.

$$f'_x = 0 \Rightarrow 2ax + b = 0 \xrightarrow{x=-1} -2a + b = 0$$

از طرف دیگر رأس سهمی در معادله آن صدق می‌کند.

$$A(-1, 9) \in \text{سهمی} \Rightarrow 9 = a - b + c$$

$$(3, 1) \in \text{سهمی} \Rightarrow 1 = 9a + 3b + c$$

در ضمن سهمی از نقطه‌ی $(3, 1)$ نیز می‌گذرد.

بنابراین:

$$\begin{cases} -2a + b = 0 \Rightarrow b = 2a \\ a - b + c = 9 \\ 9a + 3b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 2a + c = 9 \\ 9a + 6a + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + c = 9 \\ 15a + c = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, c = \frac{17}{2}, b = -1$$

پس معادله سهمی به صورت $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{17}{2}$ است و در بین گزینه‌ها تنها نقطه‌ی $(5, -9)$ در این معادله صدق می‌کند.

می‌کند.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دترمینان را برحسب سطر اول باز می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & x+5 \\ x-1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & x+5 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} + 2(-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & x+5 \\ x-1 & -1 \end{vmatrix} + 3(-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ x-1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-4 - 6x - 30) + (-2)(2 - x^2 - 4x + 5) + 3(-12 - 4x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow -6x - 34 + 2x^2 + 8x - 14 - 24 - 12x = 0 \Rightarrow 2x^2 - 10x - 72 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 5x - 36 = 0 \Rightarrow (x-9)(x+4) = 0 \Rightarrow x = 9, x = -4$$



۷۵ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طرفین تساوی $AX = A^{-1}$ را از سمت چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم تا ماتریس X به دست

$$AX = A^{-1} \Rightarrow X = (A^{-1})^T \quad (1) \quad \text{آید.}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{r}{\gamma} & \frac{1}{\gamma} \\ \gamma & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\frac{r}{\gamma} - 1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\gamma} \\ -\gamma & \frac{r}{\gamma} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\gamma \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\gamma} \\ -\gamma & \frac{r}{\gamma} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -\gamma & \gamma \\ \lambda & -\gamma \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^T = \begin{bmatrix} -\gamma & \gamma \\ \lambda & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\gamma & \gamma \\ \lambda & -\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\gamma & -\gamma\gamma \\ -\lambda\gamma & \gamma\lambda \end{bmatrix}$$

۷۶ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم.

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} \Upsilon & -\Upsilon & \Upsilon \\ \Upsilon & -\Upsilon & \Upsilon \\ \cdot & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Upsilon & -\Upsilon & \Upsilon \\ \Upsilon & -\Upsilon & \Upsilon \\ \cdot & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Upsilon & -\Upsilon & \Upsilon \\ \cdot & -1 & \cdot \\ -\Upsilon & \Upsilon & -\Upsilon \end{bmatrix}$$

حال فقط درایه‌های سطر اول A^* را پیدا می‌کنیم.

$$A^{\mathfrak{r}} = A^{\mathfrak{r}} \times A^{\mathfrak{r}} = \begin{bmatrix} \mathfrak{r} - \mathfrak{r} & \mathfrak{r} \\ . & -\mathfrak{r} & . \\ -\mathfrak{r} & \mathfrak{r} & -\mathfrak{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{r} - \mathfrak{r} & \mathfrak{r} \\ . & -\mathfrak{r} & . \\ -\mathfrak{r} & \mathfrak{r} & -\mathfrak{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{r} & . & . \\ \mathfrak{r} & \mathfrak{r} & \mathfrak{r} \\ \mathfrak{r} & \mathfrak{r} & \mathfrak{r} \end{bmatrix}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اگر از معادله $y^2 + ay + bx - 9 = 0$ نسبت به y مشتق گرفته، مشتق را مساوی

صفر قرار دھیم معادلہ ی محور سہمی بہ دست می آید.

$$f'_y = \cdot \Rightarrow \Upsilon y + a = \cdot \xrightarrow{y=1} \Upsilon + a = \cdot \Rightarrow a = -\Upsilon$$

پس معادله‌ی سهمی به صورت $y^2 - 2y + bx - 9 = 0$ درمی‌آید. آنرا استاندارد می‌کنیم:

$$(y-1)^r - 1 + bx - a = 0 \Rightarrow (y-1)^r = -bx + 1 \Rightarrow (y-1)^r = -b\left(x - \frac{1}{b}\right)$$

پس این سهمی افقی است و رأس آن $S\left(\frac{1}{b}, 1\right)$ است و چون علامت b مشخص نیست دهانه سهمی یا به چپ یا به راست باز می‌شود.

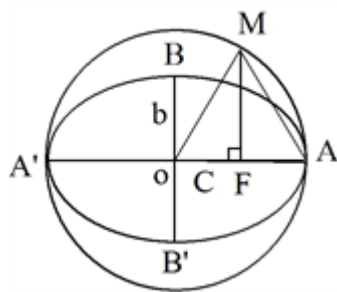
اگر $b > 0$ آن‌گاه دهانه سهمی به چپ باز می‌شود $4a = b$ پس $a = \frac{b}{4}$ است داریم.

$$\text{هادی خط معادله ی } x = a + \alpha \xrightarrow{x=\frac{13}{4}} \frac{13}{4} = \frac{b}{4} + \frac{1}{b} \xrightarrow[\text{ضرب می کنیم}]{\text{در } 4b} 13b = b^r + 4.$$

$$\Rightarrow b^2 - 13b + 30 = 0 \Rightarrow (b - 10)(b - 3) = 0 \Rightarrow b = 10, b = 3$$

چون این مقادیر در گزینه ۱ وجود دارند پس حالت $b < 0$ لزومی به بررسی ندارد.

۷۸ گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال $a = 7 \Rightarrow a = 14$ و $b = 2\sqrt{6} \Rightarrow b = 2\sqrt{6}$ پس:



$$c^r = a^r - b^r = 49 - 49 = 0 \Rightarrow c = 0$$

نقطه‌ی O مرکز بیضی و در نتیجه مرکز دایره به قطر AA' است پس $OM = OA = r$.

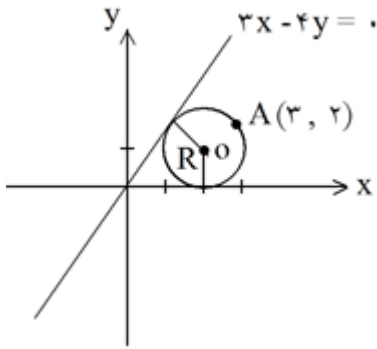
$$OMF : MF^r = OM^r - OF^r \Rightarrow MF^r = a^r - c^r = b^r \Rightarrow MF = b$$

$$\overset{\Delta}{AMF} : AM^r = MF^r + AF^r \xrightarrow[\text{MF}=b]{\text{AF}=a-c} AM^r = b^r + (a-c)^r$$

$$\Rightarrow AM^r = (r\sqrt{\epsilon})^r + (v - \omega)^r = r^r + r = r\lambda \Rightarrow AM = r\sqrt{v}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق شکل مرکز دایره $O \left(\frac{\alpha}{R} \right)$ است. در واقع عرض مرکز برابر شعاع دایره است. در ضمن فاصله مرکز O از دو خط $3x - 4y = 0$ و $y = 0$ برابر است.



فاصله O تا $(3x - 4y = 0)$ = فاصله O تا $(y = 0)$

$$\Rightarrow |R| = \frac{|\frac{3\alpha}{R} - \frac{4}{R}|}{\sqrt{9+16}} \Rightarrow R = \frac{|\frac{3\alpha - 4}{R}|}{5}$$

چون O در ناحیه‌ی اول مختصات قرار دارد پس باید α مثبت باشد، داریم:

$$5R = 3\alpha - 4R \Rightarrow 3\alpha = 9R \Rightarrow \alpha = 3R \Rightarrow O = (3R, R)$$

از طرف دیگر:

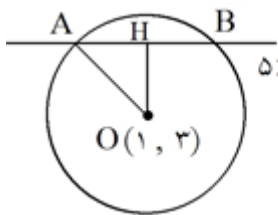
$$OA = R \Rightarrow \sqrt{(3R - 3)^2 + (R - 2)^2} = R \xrightarrow{\text{توان}} 9R^2 + 9 - 12R + R^2 + 4 - 4R = R^2$$

$$\Rightarrow 9R^2 - 22R + 13 = 0$$

معادله‌ی به دست آمده را با فرمول b' حل می‌کنیم.

$$R = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 117}}{9} = \frac{11 \pm 2}{9} \Rightarrow R = \frac{13}{9} \text{ یا } R = 1$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال وتر AB به طول $2\sqrt{21}$ است پس $AH = \sqrt{21}$ با به دست آوردن OH شعاع OA را پیدا می‌کنیم.



$$OH = \frac{|5 + 36 - 15|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{26}{13} = 2$$

$$\triangle OAH : OA^2 = OH^2 + AH^2 = 4 + 21 = 25 \\ \Rightarrow OA = 5 \Rightarrow R = 5$$

$$\text{معادله دایره : } (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

حال نقاط برخورد این دایره با محور x را تعیین می‌کنیم.

$$y = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + 9 = 25 \Rightarrow (x - 1)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5 \\ x - 1 = -4 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

نقاط تلاقی دایره با محور x ها نقطه‌های $M(5, 0)$ و $N(-3, 0)$ است و فاصله‌ی این دو نقطه مساوی $MN = 8$ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حاصل دترمینان را برحسب سطر اول بسط می‌دهیم.

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 3 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4(-1)^2 \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix} + 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3-x \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2-x \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -4(6 + x^2 - 5x = 2) - 1(3 - x - 3) + 1(2 - 6 + 3x) = 0$$

$$\Rightarrow -16 - 4x^2 + 20x + x - 4 + 3x = 0 \Rightarrow -4x^2 + 24x - 20 = 0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } -4}$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = 5$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با فرض $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ نتیجه می‌گیریم $B^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ و با فرض $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ نتیجه

$$\text{می‌گیریم } C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

حال طرفین رابطه‌ی ماتریسی داده شده را از چپ در B^{-1} و از راست در C^{-1} ضرب می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X = B^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} C^{-1}$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 20 & -24 \\ 24 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 12 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا سطر اول ماتریس A^2 و سپس سطر اول A^3 را پیدا می‌کنیم.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 24 \\ U & & \\ U & & \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 24 \\ U & & \\ U & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 6 & 86 \\ U & & \\ U & & \end{bmatrix}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. سهمی $y^2 + ay + bx + 1 = 0$ افقی است پس عرض رأس سهمی با عرض کانون آن برابر و

$$\text{مساوی ۲- است. پس: } f'y = 0 \Rightarrow 2y + a = 0 \xrightarrow{y=-2} a = 4$$

در نتیجه معادله‌ی سهمی به صورت $y^2 + 4y + bx + 1 = 0$ درمی‌آید. حال این معادله را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$(y+2)^2 - 4 + bx + 1 = 0 \Rightarrow (y+2)^2 = -bx + 3 \Rightarrow (y+2)^2 = -b\left(x - \frac{3}{b}\right)$$

با فرض $b < 0$ نتیجه می‌گیریم سهمی افقی و دهانه‌ی آن رو به راست باز می‌شود و رأس آن $S\left(\frac{3}{b}, -2\right)$ است و

$4a = -b$ پس $a = -\frac{b}{4}$ است. مختصات کانون این نوع سهمی به صورت زیر است.

$$F \begin{vmatrix} a + \alpha \\ \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{b}{4} + \frac{3}{b} \\ -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} \\ -2 \end{vmatrix}$$

$$-\frac{b}{4} + \frac{3}{b} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-b^2 + 12}{4b} = -\frac{1}{4}$$

بنابراین:

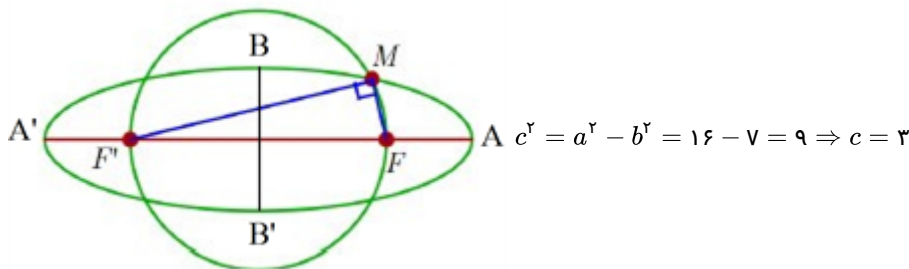
$$\Rightarrow 4b^2 - 4b - 48 = 0 \Rightarrow b^2 - b - 12 = 0 \Rightarrow (b-4)(b+3) = 0 \Rightarrow b = 4 \text{ یا } b = -3$$

کمترین مقدار b برابر ۳- است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دایره به قطر FF' بیضی را در نقطه‌ی M قطع کرده است پس زاویه‌ی M محاطی روبه‌رو به

قطر FF' است. پس $\widehat{M} = 90^\circ$ یعنی مثلث $\triangle MFF'$ قائم‌الزاویه است.

از طرف دیگر بنابر فرض $a = 4 \Rightarrow 2a = 8$ و $2b = 2\sqrt{7} \Rightarrow b = \sqrt{7}$ است. پس:



$$\triangle MFF': MF^2 + MF'^2 = FF'^2 = (2c)^2 = 36 \quad (1)$$

بنابراین:

در ضمن $MF + MF' = 2a = 8$ پس داریم:

$$(MF + MF')^2 = 64 \Rightarrow MF^2 + MF'^2 + 2MF \times MF' = 64 \xrightarrow{\text{از 1}} 36 + 2MF \times MF' = 64$$

$$\Rightarrow MF \times MF' = 14$$

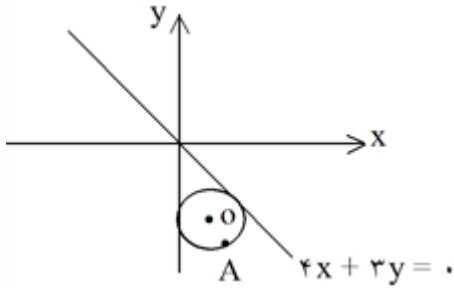
در نتیجه $MF \times MF' = 14$ و $MF + MF' = 8$ با فرض $S = 8$ و $P = 14$ داریم:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 14 = 0$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - 4ac}}{a} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 14}}{1} = 4 \pm \sqrt{2}$$

بنابراین فاصله M از یک کانون $4 + \sqrt{2}$ و از کانون دیگر $4 - \sqrt{2}$ است پس فاصله تا کانون نزدیک‌تر $4 - \sqrt{2}$ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل دایره به مرکز $O(\alpha, \beta)$ و گذرنده از نقطه‌ی $A(1, -4)$ بر خط $4x + 3y = 0$ و محور y مماس است. چون دایره بر محور y مماس است پس طول مرکز آن برابر R است. بنابراین $O(R, \beta)$ است. داریم:



$$\begin{aligned} \text{فاصله } O \text{ تا خط } (4x + 3y = 0) &= \text{فاصله } O \text{ تا } y \\ \Rightarrow R &= \frac{|4R + 3\beta|}{5} \Rightarrow 5R = |4R + 3\beta| \end{aligned}$$

مرکز O در ناحیه چهارم قرار دارد پس β باید منفی باشد داریم:

$$5R = -4R - 3\beta \Rightarrow \beta = -9R \Rightarrow O(R, -9R)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} OA = R &\Rightarrow \sqrt{(R-1)^2 + (-9R+4)^2} = R \Rightarrow R^2 + 1 - 2R + 81R^2 + 16 - 72R = R^2 \\ \Rightarrow 80R^2 - 74R + 17 &= 0 \end{aligned}$$

معادله‌ی به دست آمده را با فرمول b' حل می‌کنیم:

$$R = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - 4ac}}{a} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 152}}{80} = \frac{13 \pm 4}{80} \Rightarrow \begin{cases} R = \frac{17}{80} \\ R = \frac{1}{10} \end{cases}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. کوچک‌ترین دایره‌ی گذرا از دو نقطه‌ی A و B دایره به قطر AB است. پس مرکز دایره وسط AB و شعاع آن نصف طول پاره‌خط AB است.

$$O = \frac{A+B}{2} = (-1, 3), R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{36+16}}{2} = \frac{\sqrt{52}}{2}$$

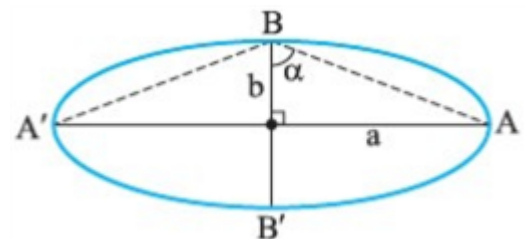
بنابراین معادله دایره به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} (x+1)^2 + (y-3)^2 &= \frac{52}{4} \xrightarrow{y=0} (x+1)^2 + 9 = \frac{52}{4} \Rightarrow (x+1)^2 = 4 \\ \Rightarrow x+1 &= 2 \text{ یا } x+1 = -2 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -3 \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به کمک فرمول خروج از مرکز بیضی یعنی $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ داریم:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \Rightarrow \frac{2}{3} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ یا } \frac{a}{b} = \sqrt{3}$$

به شکل دقت کنید:



به کمک روابط مثلثاتی، زاویه α به راحتی به دست می‌آید.

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

بنابراین از انتهای قطر کوچک، دو سر قطر بزرگ با زاویه 2α یعنی 120° رؤیت می‌شود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مختصات رأس سهمی به کمک مشتق نسبت به عامل درجه ۲ یعنی x به دست می‌آید.

$$2x^2 - 4x + 3y = 4 \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} 4x - 4 = 0 \Rightarrow x_{\text{راس}} = 1$$

مختصات رأس در معادله سهمی صدق می‌کند، پس:

$$x = 1 \xrightarrow{2x^2 - 4x + 3y = 4} y_{\text{راس}} = 2 \Rightarrow S(1, 2)$$

از روی معادله، a به راحتی به دست می‌آید.

$$a = -\frac{3}{4 \times 2} = -\frac{3}{8}$$

سهمی، قائم است و چون a منفی است، دهانه سهمی به سمت منفی محور y ها باز می‌شود. یعنی اگر از رأس به اندازه a در جهت منفی محور y ها حرکت کنیم، کانون به دست می‌آید.

$S(1, 2)$

$$\downarrow -\frac{3}{8}$$

$$F\left(1, \frac{13}{8}\right)$$

دقت کنید:

اگر معادله سهمی به شکل $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$ باشد، پارامتر سهمی یعنی a از رابطه $a = \frac{-C}{4A}$ به دست می‌آید.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نسبت به سطر دوم که یک درایه صفر دارد، دترمینان می‌گیریم.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 0 - 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 75 - 50 = 25$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با ضرب کردن طرفین رابطه $AX = B$ در A^{-1} از چپ، ماتریس X تنها می‌شود.

$$AX = B \xrightarrow{A^{-1} \times} X = A^{-1}B$$

با داشتن A^{-1} ، X به راحتی به دست می‌آید.

$$A^{-1} = \frac{1}{-4+3} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

ماتریس قطری، ماتریسی است مربعی که درایه‌های طرفین قطر اصلی آن همگی صفرند، یعنی $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$.

دو ماتریس را در هم ضرب می‌کنیم و درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی را برابر صفر قرار می‌دهیم تا x و y به دست آیند.

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 1 + 4y & -2x + 0 + 4 \\ 4 + 3 + y & -4 + 0 + 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 4 + 3 + y = 0 \Rightarrow y = -7 \end{cases}$$

پس:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. حجم متوازی‌السطوح بنا شده بر روی بردارهای a و b و $a \times b$ مساوی است با:

$$|(a \times b) \cdot (a \times b)| = |a \times b|^2$$

پس لازم است $a \times b$ را به دست آوریم.

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3i - 6j - 12k$$

$$\text{حجم} = |a \times b|^2 = 9 + 36 + 144 = 189$$



ابتدا نقطه تلاقی دایره‌ی $x^2 + y^2 = 17$ و خط $2x - y = 3$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ 2x - y = 3 \Rightarrow y = 2x - 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + (2x - 3)^2 = 17 \Rightarrow 5x^2 - 12x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 12x = 8 \quad (1)$$

نقطه‌ی A روی هر دو دایره و همچنین روی خط $2x - y = 3$ است. فرض کنیم $A(x, 2x - 3)$ و مرکز دایره‌ی C نقطه‌ی $O'(\alpha, \beta)$ باشد پس باید داشته باشیم:

$$O'A = O'B = \sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - 2x + 3)^2} = \sqrt{(\alpha - 6)^2 + (\beta + 1)^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{\alpha^2} + x^2 - 2\alpha x + \cancel{\beta^2} + 4x^2 + 9 - 4\beta x + 6\beta - 12x = \cancel{\alpha^2} + 36 - 12\alpha + \cancel{\beta^2} + 1 + 2\beta$$

$$\Rightarrow \underbrace{5x^2 - 12x - 2\alpha x - 4\beta x + 9 + 6\beta}_{=8} = 37 - 12\alpha + 2\beta \xrightarrow{(1)} x(-2\alpha - 4\beta) + 12\alpha + 4\beta = 20$$

تساوی به دست آمده در صورتی برقرار است که $-2\alpha - 4\beta = 0$ و $12\alpha + 4\beta = 20$ پس:

$$\begin{cases} -2\alpha - 4\beta = 0 \\ 12\alpha + 4\beta = 20 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2, \beta = -1 \Rightarrow O'(2, -1) \Rightarrow R = dB = 4$$

روش دوم: فرض کنید معادله‌ی دایره‌ی موردنظر به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ باشد. برای یافتن معادله‌ی وتر مشترک دو دایره، معادلات دو دایره را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = x^2 + y^2 - 17 \Rightarrow ax + by = -c - 17$$

وتر مشترک دو دایره بر خط $2x - y = 3$ منطبق است، پس داریم:

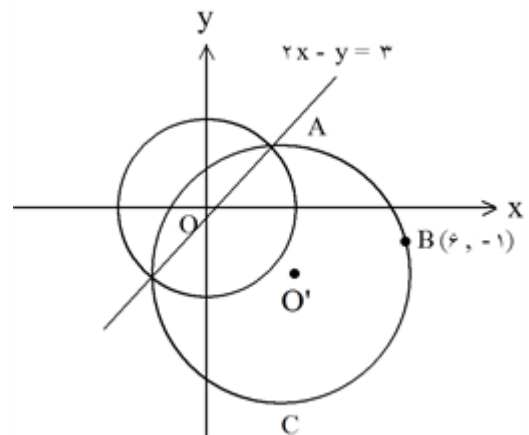
$$\frac{a}{2} = \frac{b}{-1} = \frac{-c-17}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = -2b \\ c = 3b - 17 \end{cases}$$

نقطه‌ی $(6, -1)$ روی دایره است، پس مختصات آن در معادله‌ی دایره صدق می‌کند:

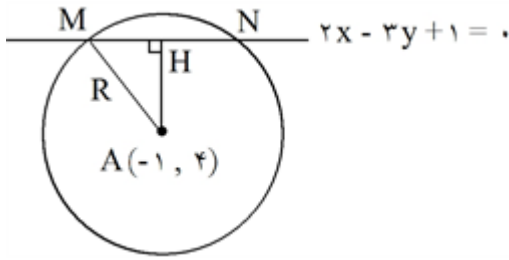
$$x^2 + y^2 + (-2b)x + by + 3b - 17 = 0 \xrightarrow{(6, -1)} 36 + 1 - 12b - b + 3b - 17 = 0$$

$$\Rightarrow 10 - 10b = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ c = -11 \end{cases}$$

$$\text{شعاع دایره } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} = \frac{\sqrt{16 + 1 + 44}}{2} = \frac{\sqrt{61}}{2} = \frac{\sqrt{61}}{2}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل و فرض $MN = 2\sqrt{7}$ نتیجه می‌گیریم $MH = \sqrt{7}$.



$$AH = \frac{|-2-12+1|}{\sqrt{4+9}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$\triangle AMH : AM^2 = AH^2 + MH^2 \Rightarrow R^2 = 13 + 7 = 20.$$

بنابراین معادله دایره به صورت $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 20$ است. حال دایره را با خط $y=2$ قطع می‌دهیم.

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-4)^2 = 20 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow (x+1)^2 + (2-4)^2 = 20 \Rightarrow (x+1)^2 = 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=4 \Rightarrow x=3 \\ x+1=-4 \Rightarrow x=-5 \end{cases}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم فاصله‌ی هر نقطه روی سهمی از کانون و خط هادی یکسان است. بنابراین کافی

است فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی سهمی با محور x ها را تا خط هادی به دست آوریم.

ابتدا معادله‌ی سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$5y^2 - 10y + 4x - 3 = 0 \Rightarrow 5(y^2 - 2y) = -4x + 3 \Rightarrow 5\left[(y-1)^2 - 1\right] = -4x + 3$$

$$\Rightarrow 5(y-1)^2 = -4x + 8 = 5(y-1)^2 = -4(x-2) \Rightarrow (y-1)^2 = -\frac{4}{5}(x-2)$$

پس دهانه‌ی این سهمی رو به چپ است و رأس آن $S(2, 1)$ و $a = \frac{1}{5} \Rightarrow a = \frac{1}{5}$ و $4a = \frac{4}{5}$ بنابراین خط هادی سهمی به صورت زیر

$$x = a + \alpha \Rightarrow x = \frac{1}{5} + 2 = \frac{11}{5} \text{ است.}$$

$$5y^2 - 10y + 4x - 3 = 0 \xrightarrow{y=0} 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow A\left(\frac{3}{4}, 0\right)$$

بنابراین:

$$\text{فاصله } A \text{ تا هادی} = \left| \frac{11}{5} - \frac{3}{4} \right| = \left| \frac{44}{20} - \frac{15}{20} \right| = \frac{29}{20} = 1 \frac{9}{20}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در بیضی فاصله‌ی دو کانون برابر $2c$ است.

$$2c = FF' = \sqrt{(2-2)^2 + (7+1)^2} = 8 \Rightarrow c = 4$$

$$\text{قطر کوچک بیضی} = 2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow a = 5$$

بنابراین:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ضرب مختلط این سه بردار صفر است پس:

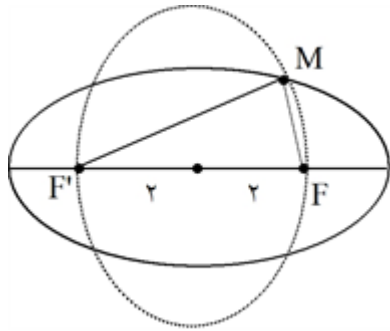
$$a \cdot (b \times c) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & m & 5 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow[\text{ستون دوم}]{\text{بسط بر حسب}} -2(10+4) - m(-1-6) = 0$$

$$\Rightarrow -28 = -7m \Rightarrow m = 4$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال $2a = 2\sqrt{5}$ پس $a = \sqrt{5}$ و $2b = 2$ پس $b = 1$ بنابراین:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 5 - 1 = 4 \Rightarrow c = 2$$

پس دایره به مرکز بیضی و شعاع ۲ از کانون‌های بیضی عبور می‌کند. پس زاویه‌ی M روبرو به قطر FF' است بنابراین قائمه است به عبارت دیگر مثلث MFF' قائم‌الزاویه است در نتیجه:



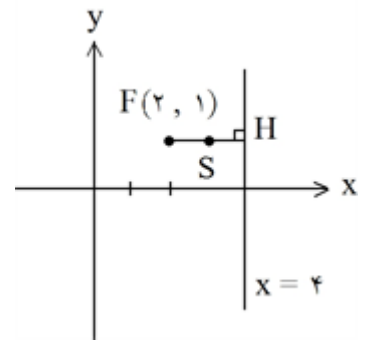
$$MF^2 + MF'^2 = FF'^2 = 4^2 = 16$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به جایگاه کانون و خط هادی دهانه‌ی سهمی رو به چپ است. اگر عمود FH را بر خط هادی وارد کنیم آن‌گاه $H = (4, 1)$ پس رأس S به صورت زیر است.

$$S = \frac{F + H}{2} = \frac{(2, 1) + (4, 1)}{2} = (3, 1), a = SF = 1$$

معادله این سهمی در حالت کلی به صورت زیر است.

$$(y - \beta)^2 = -4a(x - \alpha) \Rightarrow (y - 1)^2 = -4(x - 3) \Rightarrow y^2 + 1 - 2y = -4x + 12 \Rightarrow y^2 - 2y + 4x = 11$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

راه حل اول: نقطه‌ی $(-1, 4)$ فقط در گزینه‌ی ۴ صدق می‌کند پس گزینه‌ی ۴ درست است.

راه حل دوم: ابتدا مختصات نقاط تلاقی خط $y = x$ (نیمساز ناحیه اول) با دایره‌ی $x^2 + y^2 - 4x = 6$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = 6 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 4x = 6 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = -1$$

پس نقاط $A(3, 3)$ و $B(-1, -1)$ نقاط تلاقی دایره با خط نیمساز هستند و این نقاط روی دایره‌ی C هم قرار دارد بنابراین

دایره‌ی C از نقاط $A(3, 3)$ و $B(-1, -1)$ و $C(-1, 4)$ عبور می‌کند. فرض کنیم معادله‌ی دایره‌ی C به صورت

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{ باشد داریم:}$$

$$\begin{aligned} A \in C &\Rightarrow 9 + 9 + 3a + 3b + c = 0 \\ B \in C &\Rightarrow 1 + 1 - a - b + c = 0 \Rightarrow c = -6, a = -1, b = -3 \\ C \in C &\Rightarrow 1 + 16 - a + 4b + c = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 - x - 3y - 6 = 0 \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$||A|A| = |A|^2 |A| = |A|^3 = 3^3 = 27$$

۱۰۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طرفین تساوی داده شده را در A^{-1} از سمت چپ ضرب می‌کنیم.

$$AX = A - 2I \xrightarrow{A^{-1} \times} X = I - 2A^{-1} \quad (1)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6-4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

حال از تساوی‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم:

۱۰۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا حاصل ضرب داده شده را به دست می‌آوریم.

$$[x \ 2x \ -1]_{1 \times 3} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = [11x - 1 - x - 2 - 3x]_{1 \times 3}$$

$$[x \ 2x \ -1] \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow [11x - 1 - x - 2 - 3x]_{1 \times 3} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = 0$$

$$\Rightarrow [11x^2 - x - 2x^2 - 4x + 3x]_{1 \times 1} = 0 \Rightarrow 9x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = \frac{2}{9}$$

۱۰۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. یعنی معادله سهمی چنین است:

$$y^2 - 2y = \frac{ax}{2} \Rightarrow (y-1)^2 = \frac{a}{2}(x+2a)$$

$$P = \frac{|a|}{\lambda} \text{ مرکز (رأس) سهمی } \left(-\frac{2}{a}, 1\right) \text{ است. در ضمن}$$

حال a چه مثبت باشد چه منفی، با توجه به این که خط هادی $x = -1$ است، داریم.

$$-\frac{2}{a} - \frac{a}{\lambda} = -1 \Rightarrow a = 2$$

یعنی سهمی $(y-1)^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$ است که کانون آن $F(0, 1)$ است. فاصله این کانون از $A(3, 4)$ می‌شود.

$$|\overrightarrow{AF}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

۱۰۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A^{-1} = - \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}(A + 2I) = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 10 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 2+2 & 5+0 \\ 3+0 & 7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

۱۰۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$|A| = -14 + 12 = -2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \times \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -2 & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$2A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot (2A^{-1}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -15 \\ -14 & -25 \end{bmatrix}$$

۱۰۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر ستون اول ماتریس را همزمان با دو ستون دیگر ماتریس جمع کنیم، آن‌گاه داریم:

$$\begin{vmatrix} a+b+c+4 & b & c \\ a+b+c+4 & b+4 & c \\ a+b+c+4 & b & c+4 \end{vmatrix} = (a+b+c+4) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b+4 & c \\ 1 & b & c+4 \end{vmatrix}$$

حال اگر سطرهای دوم و سوم را منهای سطر اول کنیم، خواهیم داشت:

$$(a+b+c+4) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16(a+b+c+4) = 16 \times 9 = 144$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شعاع و مرکز دایره به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ عبارتند از: $O(2, -1)$ مرکز $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$A^T - 4A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 5I$

شعاع $R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - 4} = \frac{1}{2} \sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

بنابراین مجموعه مراکز دایره‌های قائم‌الزاویه بر خط AB از آن عبور می‌کنند، مرکز این دایره است، پس $O(1, 7)$ مرکز دایره C است.

$d = OO' = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-7)^2} = 10$

چون دو دایره مماس خارج هستند، پس داریم:

$$d = R + R' \Rightarrow 10 = R + 3 \Rightarrow R = 7$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر بردار a به صورت مجموع دو بردار در راستاهای دو بردار b و c نوشته شود، آن‌گاه سه بردار a ، b و c قطعاً هم‌صفحه‌اند، یعنی $a \cdot (b \times c) = 0$ است. داریم:

$$\begin{vmatrix} -3 & 10 & m \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (6 + 20 + 12m) - (m - 24 - 60) = 0 \Rightarrow 11m + 110 = 0$$

$$\Rightarrow 11m = -110 \Rightarrow m = -10$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۱۲

$$A + 2B = \begin{bmatrix} a & -3 \\ 5 & a+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-2 & 3 \\ 9 & a+4 \end{bmatrix} \rightarrow |A + 2B| = 0 \rightarrow (a-2)(a+4) - 27 = 0$$

$$a^2 + 2a - 25 = 0 \rightarrow (a+7)(a-5) = 0 \rightarrow a = -7, 5$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دو خط $y = 2x$ و $y = 2x + 10$ موازیند بنابراین مرکز دایره روی خط بین آن‌ها به معادله ۱۱۳

$y = 2x + 5$ قرار دارد. اگر $o(\alpha, \beta)$ مرکز دایره باشد آن‌گاه $o(\alpha, 2\alpha + 5)$ و چون دایره از مبدأ مختصات می‌گذرد پس فاصله‌ی مرکز O از مبدأ با فاصله O تا خط $y = 2x$ برابر است نتیجه می‌گیریم:

فاصله O تا خط $(y = 2x)$ = فاصله O تا مبدأ مختصات

$$\sqrt{\alpha^2 + (2\alpha + 5)^2} = \frac{|2\alpha + 5 - 2\alpha|}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha^2 + 20 + 20\alpha = \frac{25}{5}$$

$$\Rightarrow 5\alpha^2 + 20\alpha + 20 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha + 4 = 0 \Rightarrow (\alpha + 2)^2 = 0 \Rightarrow \alpha = -2$$

بنابراین مرکز دایره $o(-2, 1)$ می‌باشد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر b' تصویر قائم b روی a باشد آن‌گاه $b' = \frac{a \cdot b}{|a|^2} a$ بنابراین $\frac{a \cdot b}{|a|^2}$ را باید به دست آوریم. ۱۱۴

$$|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b \Rightarrow 4 + 1 + 9 = 25 + 49 - 2a \cdot b \Rightarrow a \cdot b = 30$$

$$\frac{a \cdot b}{|a|^2} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا درایه‌های ماتریس A را به دست می‌آوریم. ۱۱۵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^T - 4A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 5I$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به فرض تست شکل سهمی به صورت مقابل می شود در ضمن در این سهمی $a = -1$ است و سهمی افقی می باشد. فرض کنیم رأس سهمی باشد. در این صورت معادله سهمی به صورت زیر است:

$$(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha) \xrightarrow{a=-1} (y - \beta)^2 = -4(x - \alpha)$$

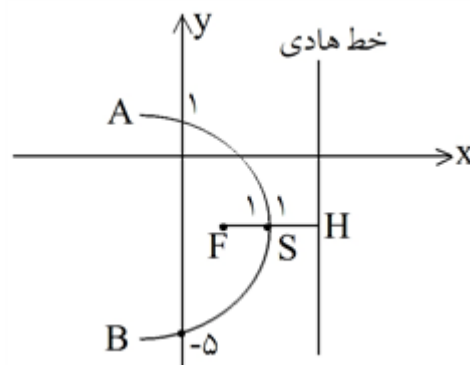
$$A(0, 1) \in \text{سهمی} \Rightarrow (1 - \beta)^2 = -4(0 - \alpha) \Rightarrow (1 - \beta)^2 = 4\alpha$$

$$B(0, -5) \in \text{سهمی} \Rightarrow (-5 - \beta)^2 = -4(0 - \alpha) \Rightarrow (-5 - \beta)^2 = 4\alpha$$

$$\Rightarrow (1 - \beta)^2 = (-5 - \beta)^2$$

$$\Rightarrow 1 - \beta = \pm(-5 - \beta) \Rightarrow \begin{cases} 1 - \beta = -5 - \beta \\ 1 - \beta = 5 + \beta \end{cases} \Rightarrow \beta = -2$$

$$(1 - \beta)^2 = 4\alpha \Rightarrow (1 + 2)^2 = 4\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{9}{4}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دایره بر محور x مماس و شعاع آن برابر ۳ می باشد پس $\alpha(3, 3)$ مرکز دایره است. مسلماناً فاصله α از خط $3x + 4y = 0$ برابر شعاع است.

$$OH = \frac{|3\alpha + 12|}{\sqrt{9 + 16}} = 3 \Rightarrow |3\alpha + 12| = 15 \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 12 = 15 \Rightarrow \alpha = 1 \\ 3\alpha + 12 = -15 \Rightarrow \alpha = -9 \end{cases}$$

چون مرکز O در ناحیه اول قرار دارد پس $\alpha = 1$ قابل قبول است. بنابراین مرکز دایره $O(1, 3)$ می باشد. بنابراین طول نقطه‌ی تماس دایره با محور x برابر ۱ می باشد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به رابطه $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ و $\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA}$ داریم:

$$\vec{AM} = -\frac{2}{3}\vec{AB} \Rightarrow 3(\vec{OM} - \vec{OA}) = -2(\vec{OB} - \vec{OA}) \Rightarrow$$

$$3\vec{OM} - 3\vec{OA} = -2\vec{OB} + 2\vec{OA} \Rightarrow 3\vec{OM} = -2\vec{OB} + 5\vec{OA} \Rightarrow$$

$$3\vec{OM} = -2(-i + 5j + 2k) + 5(2i + j) = 2i - 10j - 4k + 10i + 5j = 12i - 5j - 4k \Rightarrow \vec{OM} = 4i - \frac{5}{3}j - \frac{4}{3}k$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{OM} \cdot \vec{j}}{|\vec{OM}| |\vec{j}|} = \frac{-5}{\sqrt{16 + \frac{25}{9} + \frac{16}{9}}} = -\frac{2}{3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |AB| = 2 \Rightarrow (AB)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. روش اول: ۱۲۰

$$\text{فرض: } \begin{vmatrix} 6 & 3x & 2x \\ 3x & 2x & 6x \\ 2x & 6 & 3x \end{vmatrix} = D \xrightarrow[\text{عددگذاری}]{x=1} \begin{vmatrix} + & - & + \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 6(-30) - 3(-3) + 2(14) = 180 + 9 + 28 = -143$$

$$\text{کم: } \begin{vmatrix} x^2 & x^2 & 6 \\ 9 & 2x & 9 \\ 3x & 4 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{x=1} \begin{vmatrix} + & - & + \\ 1 & 1 & 6 \\ 9 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times (-28) - 1 \times (-9) + 6 \times (30) = -28 - 9 + 180 = +143$$

روش دوم: با انتخاب $x = 0$ نتیجه می‌گیریم.

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = D \Rightarrow 6(-6^2) = D \Rightarrow D = -6^3$$

حالا مقدار دترمینان خواسته شده را به‌ازای $x = 0$ به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 9 & 0 & 9 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 6(36) = 6^3$$

بنابراین این دترمینان برابر $-D$ می‌باشد.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۲۱

$$B \times A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -9 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} = C$$

$$\Rightarrow (B \times A)^{-1} = C^{-1} = \frac{1}{-10} \times \begin{bmatrix} 1 & +9 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. شرط مماس خارج بودن دو دایره $d = R + R'$ است. ۱۲۲

$$O(-2, 2), O' = (1, -2), R' = \frac{\sqrt{4 + 16 - 4}}{2} = 2$$

$$d = OO' = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$d = R + R' \Rightarrow 5 = R + 2 \Rightarrow R = 3$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۲۳

$$\left. \begin{matrix} a \times d = c \times b \\ a \times c = d \times b \end{matrix} \right\} \Rightarrow a \times d - d \times b = c \times b - a \times c \Rightarrow a \times d + b \times d = c \times b + c \times a$$

$$\Rightarrow (a + b) \times d = c \times (b + a) \Rightarrow (a + b) \times d - c \times (b + a) = 0$$

$$\Rightarrow (a + b) \times d + (a + b) \times c = 0 \Rightarrow (a + b) \times (d + c) = 0 \Rightarrow a + b \parallel d + c$$

پس دو بردار موازیند و گزینه ۴ درست است.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۲۴

$$\begin{matrix} V_1 \cdot V_2 = 0 \Rightarrow 2 - b + a = 0 \\ V_1 \cdot V_3 = 0 \Rightarrow c - 3 + 2a = 0 \\ V_2 \cdot V_3 = 0 \Rightarrow 2c + 3b + 2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a - b = -2 \\ c + 2a = 3 \\ 2c + 3b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = -2 \\ 3b - 4a = -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -a = -2 \Rightarrow a = 2, b = 4, c = -1$$

پس $a + b + c = 5$ و گزینه ۱ درست است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. منحنی به معادله $(x - 9)^2 + (y - 7)^2 = 4$ ، معادله‌ی یک دایره به مرکز $O(9, 7)$ و شعاع ۲ است. ۱۲۵

$R = 2$ است. با رسم شکل دایره در دستگاه مختصات به راحتی پی می‌بریم نزدیک‌ترین نقطه‌ی منحنی از محور x ها چه

فاصله‌ای دارد. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم نزدیک‌ترین نقطه‌ی دایره از محور x ها، نقطه‌ی A است. فاصله‌ی نقطه‌ی A

از محور x ها برابر است با:



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای به توان رساندن ماتریس‌های قطری، کافی است تک تک درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس A را به توان برسانیم. داریم:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^7 = \begin{bmatrix} 1^7 & 0 \\ 0 & 2^7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 128 \end{bmatrix} \Rightarrow A^7 \text{ مجموع درایه های ماتریس } = 1 + 128 = 129$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. روش اول: با قرار دادن $a = -1$ ، داریم:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1(2 \times 2 - 1 \times 3) - 0 + 1(1 \times 1 - 2 \times 0) = -1 + 1 = 0$$

تنها گزینه ۳ می‌تواند پاسخ باشد.

$$\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{از ستون سوم}]{\text{کم کردن ستون دوم}} \begin{vmatrix} a & a+1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{از ستون دوم}]{\text{کم کردن ستون اول}} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

با توجه به این که دو ستون برابرند، در نتیجه حاصل دترمینان صفر می‌شود.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم تصویر هر نقطه مانند $A(x, y, z)$ روی محور xها به صورت $A'(x, 0, 0)$ ، روی محور yها به صورت $A(0, y, 0)$ و روی محور zها به صورت $A(0, 0, z)$ است. لذا تصویر نقطه‌ی $A(-2, 1, 3)$ روی محور yها به صورت $(0, 1, 0)$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\vec{a} = (1, 1, 2) \text{ و } \vec{b} = (-1, 2, 1) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (0, 3, 3), \vec{a} - \vec{b} = (2, -1, 1)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = (0, 3, 3) \cdot (2, -1, 1) = 0 \times 2 + 3 \times (-1) + 3 \times 1 = 0$$

روش دوم:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = (\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2})^2 - (\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2})^2 = 6 - 6 = 0$$

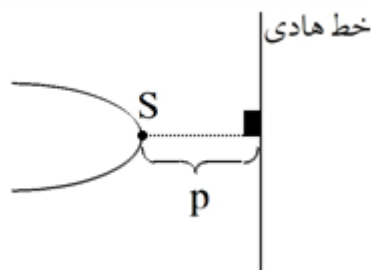


گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای تعیین معادله خط هادی سهمی را استاندارد می‌کنیم. داریم:

$$y^2 - 6y + 2x + a = 0 \Rightarrow y^2 - 6y = -2x - a \Rightarrow (y - 3)^2 - 9 = -2x - a$$

$$\Rightarrow (y - 3)^2 = -2x - a + 9 \Rightarrow (y - 3)^2 = -2\left(x + \frac{a - 9}{2}\right) \xrightarrow{\text{سهمی افقی و روبه چپ است}} \begin{cases} S = \left(\frac{9-a}{2}, 3\right) \\ 2p = -2 \Rightarrow p = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

حال با داشتن مختصات رأس سهمی و پارامتر سهمی، معادله خط هادی را می‌نویسیم.



معادله خط هادی: $x = \alpha - p = \frac{9-a}{2} + \frac{1}{2}$

در صورت تست این موضوع مطرح شده است که خط هادی از نقطه‌ی (۱, ۲) می‌گذرد. پس داریم:

$$(1, 2) \in \text{خط هادی} \Rightarrow \frac{9-a}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow a = 8$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. روش اول: دایره‌ای از دو نقطه‌ی (۲, ۰) و (-۲, ۰) می‌گذرد، بنابراین مرکز دایره قطعاً روی

عمودمنصف این دو نقطه، یعنی محور yها به معادله‌ی $x = 0$ واقع است. با این توضیح مختصات مرکز دایره به صورت

$O(0, y)$ می‌باشد. حال برای تعیین مختصات مرکز، کافی است فاصله‌ی مرکز دایره (یعنی ۰) را از یکی از نقاط

(۲, ۰) و (-۲, ۰) محاسبه کرده و این مقدار محاسبه‌شده را برابر با فاصله‌ی مرکز دایره از خط مماس به معادله‌ی $y = 1$ قرار

دهیم. (دقت کنیم، فاصله‌ی مرکز دایره از هر خط مماس، برابر شعاع دایره است). داریم:

$$\begin{cases} OA = R = \sqrt{2^2 + y^2} = \sqrt{4 + y^2} \Rightarrow OA = OH = R \\ OH = R = |1 - y| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4 + y^2} = |1 - y| \xrightarrow{\text{به توان می‌رسانیم}} 4 + y^2 = 1 - 2y + y^2 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{مرکز دایره}} O\left(0, -\frac{3}{2}\right)$$

حال برای تعیین شعاع دایره، کافی است فاصله‌ی مرکز دایره را از خط مماس به معادله‌ی $y = 1$ به دست آوریم. داریم:

$$OH = R = |1 - y| = \left|1 - \left(-\frac{3}{2}\right)\right| = \frac{5}{2}$$

روش دوم: اگر معادله‌ی دایره را به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در نظر بگیریم، چون دایره از دو نقطه‌ی

(۲, ۰) و (-۲, ۰) می‌گذرد، لذا مختصات این دو نقطه در معادله‌ی دایره صدق می‌کند. داریم:

$$\xrightarrow{\text{را صدق می‌دهیم}} 4 + 2a + c = 0$$

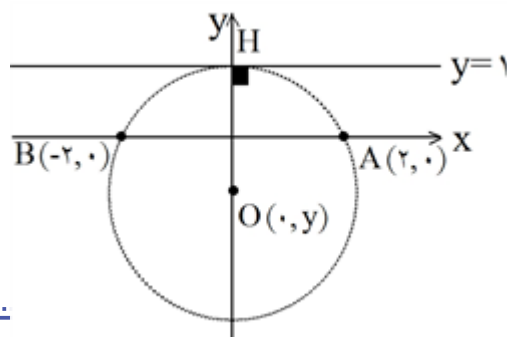
$$\Rightarrow c = -4, a = 0$$

$$\xrightarrow{\text{را صدق می‌دهیم}} 4 - 2a + c = 0$$

از طرفی چون دایره بر خط $y = 1$ مماس است، در نتیجه (۰, ۱) نیز در معادله‌ی دایره صدق می‌کند. داریم:

$$\xrightarrow{\text{را صدق می‌دهیم}} 1 + b - 4 = 0 \Rightarrow b = 3$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 3^2 - 4(-4)} = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 16} = \frac{1}{2} \sqrt{25} = \frac{5}{2}$$



$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{rMP} + \vec{rPN} = \vec{0} \Rightarrow (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{r}(\vec{MP} + \vec{PN}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{AC} + \vec{rMN} = \vec{0}$$

می‌دانیم اگر $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ باشد، دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ قرینه‌ی هم بوده و زاویه‌ی بین آن‌ها 180° درجه است. با توجه به این توضیحات چون $\vec{AC} + \vec{rMN} = \vec{0}$ است، لذا دو بردار $\vec{AC}$ و $\vec{rMN}$ قرینه‌ی هم بوده و زاویه‌ی بین آن‌ها 180° درجه است. از طرفی چون دو بردار $\vec{MN}$ و $\vec{rMN}$ موازی و هم‌جهت هم می‌باشند، بنابراین زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{AC}$ و $\vec{MN}$ نیز همان 180° درجه خواهد بود.

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. برای آن که معادله‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ جواب نداشته باشد، باید $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$.

باشد، داریم:

$$\begin{bmatrix} m & 2 \\ 2 & m+5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+2 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{جواب ندارد}} \frac{m}{2} = \frac{2}{m+5} \neq \frac{m+2}{2} \Rightarrow m(m+5) = 6$$

$$\Rightarrow m^2 + 5m - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -6 \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \\ m = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{غ ق ق} \Rightarrow \text{دستگاه بیشمار جواب دارد.}$$

به ازای $m = -6$ نسبت سوم نیز با دو نسبت اول برابر بوده و $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ می‌شود. لذا معادله‌ی ماتریسی دارای بی‌شمار جواب بوده و غیرقابل قبول است. ولی به ازای $m = 1$ نسبت سوم با دو نسبت اول برابر نبوده و دستگاه ماتریسی فوق جواب ندارد.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}_C A \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}}_D = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_E$$

$$CAD = E \Rightarrow C^{-1}CAD = C^{-1}E \Rightarrow AD = C^{-1}E$$

$$\Rightarrow ADD^{-1} = C^{-1}ED^{-1} \Rightarrow A = C^{-1}ED^{-1}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 19 \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \Rightarrow \text{سطر اول } [31 \ 19]$$

توجه: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

۱۳۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا معادله‌ی سهمی را استاندارد می‌کنیم، رأس سهمی را به دست می‌آوریم. داریم:

$$3x^2 + 4y - 6x + 11 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 3 = -4y - 8 \Rightarrow 3(x^2 - 2x + 1) = -4(y + 2)$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = 4 \times \left(\frac{-1}{3}\right)(y+2) \Rightarrow S(1, -2), a = -\frac{1}{3}$$

سهمی داده‌شده یک سهمی قائم است، بنابراین معادله‌ی خط هادی آن به صورت $y = \beta - a$ است. داریم:

$$y = -2 - \left(\frac{-1}{3}\right) = -\frac{5}{3}$$

۱۳۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = |A^{-1}| = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2 \Rightarrow |A|^{-1} = -2 \Rightarrow \frac{1}{|A|} = -2 \Rightarrow |A| = -\frac{1}{2}$$

توجه کنید که $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ است.

۱۳۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. وتر از سهمی به معادله‌ی $y^2 = 4(x+y)$ که از کانون بر محور آن عمود باشد، قطری از

یک دایره است. بنابراین کانون سهمی، مرکز دایره و طول وتر کانونی سهمی، برابر با طول قطر دایره می‌باشد. داریم:

$$y^2 = 4x + 4y \Rightarrow y^2 - 4y = 4x \Rightarrow (y-2)^2 = 4x + 4 \xrightarrow{\text{معادله ی استاندارد سهمی}}$$

$$(y-2)^2 = 4(x+1) \xrightarrow{\text{سهمی افقی بازشونده به راست}} \begin{cases} S(-1, 2) \\ 4a = 4 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} O(0, 2) : \text{مرکز دایره} \Rightarrow F(-1+a, 2) = (0, 2) : \text{کانون سهمی} \\ R = 2 : \text{شعاع دایره} \Rightarrow 2R = 4 \Rightarrow 4a = 4 : \text{طول وتر کانونی سهمی} \end{cases}$$

حال با داشتن مختصات مرکز و طول شعاع دایره، معادله‌ی دایره به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Rightarrow O(0, 2), R = 2 \xrightarrow{\text{معادله ی دایره}} (x-0)^2 + (y-2)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 - 4y = 0$$

۱۳۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $A \cdot A^{-1} = I$ و $|kA_{r \times r}| = k^r |A|$ و $|I| = 1$. بنابراین داریم:

$$|(2A) \cdot (2A^{-1})| = |6A \cdot A^{-1}| = 6^2 |A \cdot A^{-1}| = 36 |I| = 36 \times 1 = 36$$

۱۳۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم مرکز دایره روی خط $y = 2x$ قرار دارد، پس مختصات مرکز به صورت $O(\alpha, 2\alpha)$

می‌باشد. چون این دایره از دو نقطه‌ی $A(0, 0)$ و $B(3, 1)$ می‌گذرد، لذا فاصله‌ی مرکز دایره از این دو نقطه یکسان و برابر

شعاع دایره است. بنابراین داریم:

$$OA = OB \Rightarrow \sqrt{(\alpha-0)^2 + (2\alpha-0)^2} = \sqrt{(\alpha-3)^2 + (2\alpha-1)^2} \xrightarrow{\text{به توان ۲ رسانیم}}$$

$$\alpha^2 + 4\alpha^2 = (\alpha^2 - 6\alpha + 9) + (4\alpha^2 - 4\alpha + 1) \Rightarrow \cancel{\alpha^2} = \cancel{\alpha^2} - 10\alpha + 10 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\Rightarrow O(1, 2) \Rightarrow R = OA = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

۱۴۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $|\vec{a}| = 2$ و $|\vec{b}| = 1$ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. چون ضرب داخلی دو برابر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر صفر

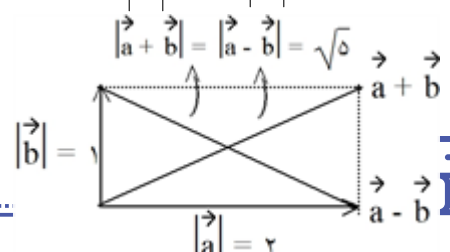
است، نتیجه می‌گیریم که این دو بردار بر هم عمود می‌باشند. حال اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را عمود برهم در نظر بگیریم،

طبق روش متوازی الاضلاع دو بردار $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ ، اقطار مستطیلی به اضلاع ۲ و ۱ می‌باشند و چون در هر مستطیل

طول دو قطر با هم برابرند، نتیجه می‌گیریم که:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| - |\vec{a} - \vec{b}| = 0$$

(در واقع $|\vec{a}| = 2$ و $|\vec{b}| = 1$ داده‌های اضافی‌اند.)



۱۴۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ، برای حل معادله‌ی ماتریسی $AX = 2I$ ، کافی است دو طرف تساوی را از سمت چپ در وارون ماتریس A (یعنی A^{-1}) ضرب می‌کنیم. چون $A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I$ است، در نتیجه داریم:

$$AX = 2I \xrightarrow{A^{-1} \times} A^{-1} \times (AX) = A^{-1} \times 2I \xrightarrow{\text{طبق خاصیت شرکت پذیری}} \underbrace{(A^{-1} \times A)}_I \times X =$$

$$2A^{-1} \times I \Rightarrow X = 2A^{-1}$$

$$X = 2A^{-1} = 2 \left(\frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \right) = - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

یادآوری: به خاطر بسپاریم که:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

۱۴۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای این که معادله‌ی مقطع مخروطی $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0$ معادله‌ی دایره باشد، باید ابتدا ضرایب x^2 و y^2 را برابر قرار دهیم:

$$a^2 - 7 = 2 \Rightarrow a^2 = 9 \begin{cases} a = 3 \\ a = -3 \end{cases}$$

حال با جایگذاری $a = \pm 3$ در معادله، آن را به شکل $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ تبدیل و شرط $a^2 + b^2 - 4c > 0$ را کنترل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a = 3 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y + 3 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 + 2y + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 0 + 4 - 4\left(\frac{3}{2}\right) = 4 - 6 = -2 < 0. \\ a = -3 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y - 3 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 + 2y - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 0 + 4 - 4\left(-\frac{3}{2}\right) = 4 + 6 = 10 > 0. \end{cases}$$

بنابراین $a = -3$ قابل قبول است.

۱۴۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در این سؤال ماتریس ضرایب برابر $A = \begin{bmatrix} a & -2 \\ b & 3 \end{bmatrix}$ و ماتریس اعداد معلوم $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$ است. در حل دستگاه به روش ماتریس وارون داریم:

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{39}{26} \\ ? \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{39}{26} = \frac{3}{2}$$

۱۴۴

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای تعیین عرض رأس سهمی که محور x ها را دو نقطه به طول‌های ۱ و ۵ قطع کرده و خط هادی آن به معادله‌ی $y = -2$ باشد، بهترین روش، رسم شکل سهمی در دستگاه مختصات است.

با توجه به نمودار مقابل، چون دو نقطه‌ی $(1, 0)$ و $(5, 0)$ دو نقطه‌ی هم عرض روی این سهمی هستند، معادله‌ی محور تقارن سهمی برابر $x = \frac{1+5}{2} = 3$ می‌باشد. در نتیجه مختصات کانون به صورت $F(3, y_F)$ است. از طرفی طبق تعریف

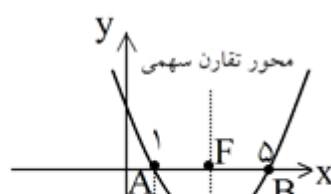
سهمی فاصله‌ی هر نقطه‌ی دلخواه روی سهمی (مانند $A(1, 0)$) از کانون و خط هادی یکسان است، پس داریم:

$$\left. \begin{aligned} \text{فاصله‌ی } A \text{ تا خط هادی} &= AH = |y_A - y_H| = 2 \\ \text{فاصله‌ی } A \text{ تا کانون} &= AF = \sqrt{(3-1)^2 + (y_F - 0)^2} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{AH=AF} 2 = \sqrt{4 + y_F^2} \Rightarrow$$

$$4 = 4 + y_F^2 \Rightarrow y_F = 0 \Rightarrow F(3, 0)$$

حال با معلوم بودن مختصات کانون و معادله‌ی خط هادی، مختصات رأس سهمی به صورت زیر می‌باشد:

$$x_s = x_f = 3, y_s = \frac{y_F + y_{\text{هادی}}}{2} = \frac{0 + (-2)}{2} = -1$$



۱۴۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

در دستگاه معادلات $\begin{cases} ax - 3y = 7 \\ bx + 4y = 2 \end{cases}$ اگر دترمینان ماتریس ضرایب ۱۷ باشد، مقدار x از روش کرامر برابر است با:

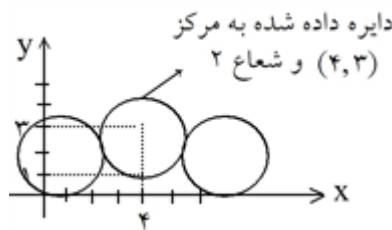
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -3 \\ b & 4 \end{vmatrix}} = \frac{7 \times 4 - 2 \times (-3)}{\text{دترمینان ماتریس ضرایب}} = \frac{28 + 6}{17} = 2$$

توجه: یادآوری می‌شود که طبق دستور کرامر داریم:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

۱۴۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به آن که پایین‌ترین نقطه‌ی $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$ کمتر از ۲ واحد با محور x ها فاصله دارد، اگر دایره‌ای به شعاع ۲ را بر روی محور x ها بغلتانیم، در دو مکان بر دایره‌ی فوق مماس می‌شود. پس ۲ دایره



با شرط مذکور وجود دارد.

۱۴۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دترمینان را حول سطر سوم بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a(3a - 2a) = a^2$$

۱۴۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ 2^2 & 2^2 \end{bmatrix} \rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ 2^2 & 2^2 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow A^{10} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ 2^{10} & 2^{10} \end{bmatrix}$$

$$A^{10} \text{ مجموع دایره های } 2^{10} + 2^{10} = 2 \times 2^{10} = 2^{11}$$

۱۴۹

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = \frac{v}{4} \Rightarrow O(-1, 1), R = \frac{\sqrt{v}}{2} \quad 1/3$$

این دایره از ربع‌های اول و دوم و سوم می‌گذرد اما از ربع چهارم نمی‌گذرد. برای تشخیص این موضوع که آیا این دایره از ربع چهارم می‌گذرد یا نه، دو روش وجود دارد. یک روش این است که $f(x, y) = 0$ را (با شرط مثبت بودن ضرایب x^2 و y^2) تشکیل داده و سپس مختصات مبدا مختصات یعنی $O'(\cdot, \cdot)$ را در $f(x, y)$ قرار دهیم. اگر $f(\cdot, \cdot) > 0$ باشد، مبدا مختصات خارج دایره است و اگر $f(\cdot, \cdot) < 0$ باشد، مبدا مختصات داخل دایره است:

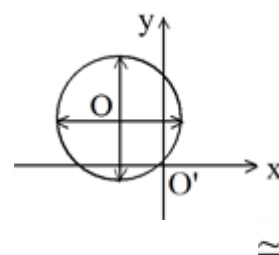
$$f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 - 2y + \frac{1}{4} \Rightarrow f(\cdot, \cdot) = \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow O' \text{ (مبدا مختصات) خارج دایره است}$$

$\Rightarrow$ دایره از ربع چهارم نمی‌گذرد.

یک روش دیگر به دست آوردن فاصله‌ی مرکز دایره از مبدا مختصات و سپس مقایسه‌ی آن با شعاع دایره است:

$$\left. \begin{array}{l} \text{مرکز دایره } O(-1, 1) \\ \text{مبدا مختصات } O'(\cdot, \cdot) \end{array} \right\} \Rightarrow OO' = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} > \sqrt{\frac{v}{4}} = R$$

$\Rightarrow O'$ (مبدا مختصات) بیرون دایره است.



۱۵۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = (1, 2, 3) \times (2, 1, 3) = (3, 3, -3) \rightarrow |\vec{V}_1 \times \vec{V}_2| = \sqrt{9+9+9} = 3\sqrt{3}$$

$$C_1 : (x-1)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow R_1 = 2, O_1(1, 0)$$

$$C_2 : x^2 + (y+2\sqrt{6})^2 = 24 - b \Rightarrow R_2 = \sqrt{24-b}, O_2(\cdot, -2\sqrt{6})$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

برای آن‌که دو دایره مماس خارج باشند، باید:

$$O_1 O_2 = R_1 + R_2 \Rightarrow \sqrt{1^2 + (2\sqrt{6})^2} = 2 + \sqrt{24-b} \Rightarrow \sqrt{24-b} = 3 \Rightarrow b = 15$$

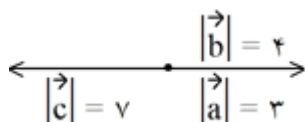
۱۵۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) \rightarrow$$

$$0 = 3^2 + 4^2 + 7^2 + 2x \rightarrow x = -37$$

روش دوم: از آن‌جا که $3 + 4 = 7$ ، بنابراین این سه بردار به شکل زیر هستند و داریم:



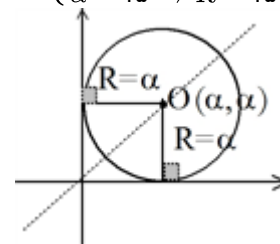
$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = 3 \times 4 \times \cos 0^\circ + 4 \times 7 \times \cos 180^\circ + 7 \times 3 \times \cos 180^\circ = 12 - 28 - 21 = -37$$

۱۵۳

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. چون نقطه‌ی A در ربع اول است. پس مرکز دایره روی خط $y = x$ قرار دارد، یعنی $O(\alpha, \alpha)$ و شعاع دایره نیز $R = \alpha$ است (به شکل نگاه کنید) بنابراین:

$$C : (x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha^2 \xrightarrow{A \in C} (3 - \alpha)^2 + (6 - \alpha)^2 = \alpha^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 18\alpha + 45 = 0 \Rightarrow (\alpha - 15)(\alpha - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \Rightarrow R = 3 \\ \alpha = 15 \Rightarrow R = 15 \end{cases}$$



۱۵۴

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$\vec{a} = (1, 2, -4) \rightarrow \vec{a} \times \vec{k} = (2, -1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

حال مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی دو بردار a و k ساخته می‌شود برابر است با اندازه‌ی حاصل ضرب خارجی این دو بردار:

$$\vec{a} = (1, 2, -4) \rightarrow \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{k}) = (-4, -8, -5) \rightarrow S = \left| \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{k}) \right| =$$

$$\vec{a} \times \vec{k} = (2, -1, 0)$$

$$= \sqrt{16 + 64 + 25} = \sqrt{105}$$

۱۵۵

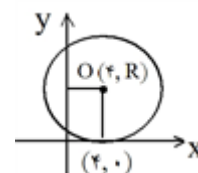
گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. عرض مرکز در این حالت برابر شعاع دایره است و معادله‌ی دایره به صورت زیر است:

$$C : (x - 4)^2 + (y - R)^2 = R^2 \xrightarrow{(0, 2) \in C} (0 - 4)^2 + (2 - R)^2 = R^2$$

$$\rightarrow 16 + 4 - 4R + R^2 = R^2 \rightarrow R = 5 \rightarrow (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$$

بنابراین محل تقاطع با محور y ها برابر است با:

$$\xrightarrow{x=0} (0 - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25 \rightarrow (y - 5)^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} y - 5 = 3 \rightarrow y = 8 \\ y - 5 = -3 \rightarrow y = 2 \end{cases}$$



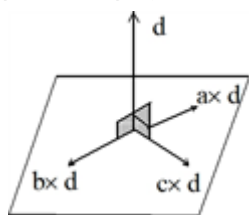
۱۵۶

گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است.

$$\cos \gamma = \frac{z_a}{|\vec{a}|} = \frac{m}{\sqrt{1 + 1 + m^2}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 2}} \rightarrow$$

$$2m^2 = m^2 + 2 \rightarrow m^2 = 2 \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 1 + 2}} = \frac{1}{2}$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. بردارهای $\vec{a} \times \vec{d}$ و $\vec{b} \times \vec{d}$ و $\vec{c} \times \vec{d}$ همگی عمود بر $\vec{d}$ هستند و در نتیجه در صفحه‌ای



عمود بر $\vec{d}$ (یا به عبارت دیگر در صفحه‌ای که بردار نرمالش $\vec{d}$ باشد) قرار می‌گیرند.

۱۵۷

۱۵۸

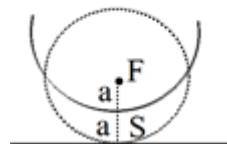
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. شعاع دایره برابر $2a$ می باشد،

$$2y = x^2 - 6x + 4 \rightarrow (x-3)^2 = 2y + 5 \rightarrow (x-3)^2 = 2\left(y + \frac{5}{2}\right)$$

بنابراین $S\left(3, -\frac{5}{2}\right)$ راس سهمی و $a = \frac{1}{2}$ است، پس مرکز دایره $F\left(3, -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\right)$ و شعاع آن $R = 2a = 1$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 1 \rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$$

می باشد:



۱۵۹

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تمام بردارهای هم راستا با بردار $\vec{V}$ به صورت $\alpha \vec{V}$ می باشند، بنابراین طبق صورت تست

$$(1, 2, m) = \underbrace{\alpha(2, 3, -1)}_{\text{هم راستا با}} + \underbrace{\beta(0, -1, 2)}_{\text{هم راستا با}} \rightarrow (1, 2, m) = (2\alpha, 3\alpha - \beta, -\alpha + 2\beta)$$

داریم:

حال مولفه ها را نظیر به نظیر برابر هم قرار می دهیم:

$$\begin{cases} 2\alpha = 1 \\ 3\alpha - \beta = 2 \\ -\alpha + 2\beta = m \end{cases} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{-1}{2} \rightarrow m = \frac{-3}{2}$$

روش دوم: بردار c را می توان به صورت یک ترکیب خطی از دو بردار a و b نوشت (یعنی $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$)، اگر و فقط اگر

سه بردار در یک صفحه باشند یا به عبارت دیگر $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ ، بنابراین داریم:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 0 + 1(2m + 1) + 2(4 - 3) = 0 \rightarrow 2m + 3 = 0 \rightarrow m = \frac{-3}{2}$$

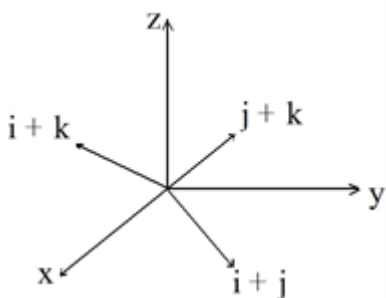
۱۶۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نیمسازهای این صفحه ها بردارهای $a_1 = i + j$ و $b_1 = j + k$ و $c_1 = i + k$ می باشند و اما طول

آن ها همگی مضرب $\sqrt{2}$ است. برای این منظور که طول آن ها $\sqrt{2}$ و $2\sqrt{2}$ و $3\sqrt{2}$ شود اولی را در ۱ و دومی را در ۲ و سومی

را در ۳ ضرب می کنیم.

$$\left. \begin{matrix} a = i + j \\ b = 2j + 2k \\ c = 3i + 3k \end{matrix} \right\} \rightarrow V = |a \cdot (b \times c)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 6 = 12$$



۱۶۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ستون دوم و سوم را به ستون اول اضافه کرده و از $b + c + 5$ فاکتور می گیریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b+c+5 & b & c \\ a+b+c+5 & b+5 & c \\ a+b+c+5 & b & c+5 \end{vmatrix} = (a+b+c+5) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b+5 & c \\ 1 & b & c+5 \end{vmatrix}$$

۱۶۲

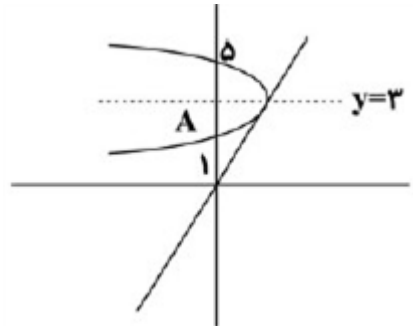


$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 1 = 1$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. معادله‌ی محور تقارن سهمی $y = \frac{5+1}{2} = 3$ می‌باشد و با توجه به این که محور تقارن از رأس سهمی می‌گذرد و با توجه به این که رأس سهمی روی $y = x$ است نتیجه می‌گیریم $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ بنابراین معادله‌ی سهمی افقی به صورت زیر است:

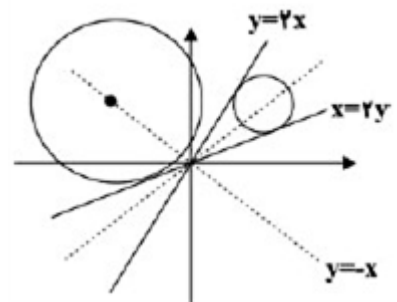
$$y - 3 = a(x - 3) \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

$$(y - 3)^2 = 4a(x - 3) \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$



گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. مرکز دایره بر روی نیمساز زاویه‌ی بین دو خط قرار دارد. با توجه به شکل مرکز دایره کوچکتر روی $y = x$ و مرکز دایره بزرگتر روی $y = -x$ قرار دارند. $O(2\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ شعاع دایره برابر با فاصله‌ی مرکز آن از خط $2y - x = 0$ می‌باشد.

$$R = \frac{|2\sqrt{5} - 2\sqrt{5}|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 2$$



گزینه‌ی ۳ پاسخ صحیح است. قطره‌های متوازی‌الاضلاع بردارهای $a+b$ و $a-b$ می‌باشند.

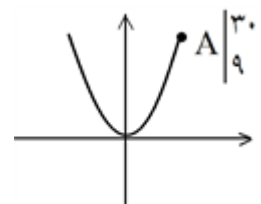
$$\vec{a} = (3, 3, 0) \Rightarrow \begin{cases} a+b = (4, 2, -2) = \vec{u} \\ a-b = (2, 4, 2) = \vec{v} \end{cases}$$

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{|u| |v|} = \frac{16 + 8 - 4}{\sqrt{24} \sqrt{24}} = \frac{1}{2}$$

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است.

$$S(.,.) \text{ سهمی قائم با رأس } x^2 = 4py \xrightarrow{A(20,9)} (20,.) = 4p(9)$$

$$\rightarrow 900 = 36p \rightarrow p = 25$$



گزینه‌ی ۲ پاسخ صحیح است. رأس سهمی وسط کانون و خط هادی است پس $S(-1, 2)$ است، در ضمن فاصله‌ی کانون تا

خط هادی برابر $2a$ یعنی ۴ است.

$$(y - \beta)^2 = 4a(x - \alpha) \Rightarrow (y - 2)^2 = 4(x + 1)$$

$$\Rightarrow 4 = 4(x + 1) \Rightarrow x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۶۸

$$(a-c) \times b = a \times c \Rightarrow a \times b - c \times b = a \times c \Rightarrow a \times b + b \times c + c \times a = .$$

$$\xrightarrow[\text{داخلی می کنیم}]{\text{در } a \text{ ضرب}} a.(b \times c) = .$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فاصله ی مرکز دایره تا خط مماس را برابر شعاع دایره قرار می دهیم. ۱۶۹

$$O \left| \begin{matrix} 1 \\ . \end{matrix} \right. \Rightarrow OH = \frac{|m+2|}{\sqrt{1+m^2}} \Rightarrow OH = R \Rightarrow \frac{|m+2|}{\sqrt{1+m^2}} = 2 \Rightarrow m = ., m = \frac{4}{3}$$

$$R = \frac{\sqrt{4+16}}{2} = 2$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۷۰

$$A \times B = 2I \xrightarrow{A^{-1} \times} \cancel{A^{-1} \times A} \times B = 2A^{-1} \times I \Rightarrow B = 2A^{-1} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad+bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2-4} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون معادله ی یک قطر دایره به صورت $x - y = 2$ است پس مختصات مرکز دایره را می توان به صورت زیر در نظر گرفت: ۱۷۱

$$x - y = 2 \Rightarrow y = x - 2 \Rightarrow C(\alpha, \alpha - 2)$$

از طرفی دایره از دو نقطه ی $A(0, 1)$ و $B(3, 0)$ می گذرد، پس داریم: $AC = BC$

$$AC = BC \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + (\alpha - 2)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (\alpha - 2)^2} \xrightarrow[\text{می رسانیم}]{\text{طرفین را به توان ۲}} \alpha^2 = (\alpha - 2)^2$$

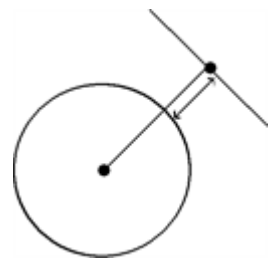
$$\alpha^2 = \alpha^2 - 4\alpha + 4 \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow C(1, -1), R = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فاصله ی مرکز دایره را از خط تعیین و طول شعاع را از آن کم می کنیم: ۱۷۲

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \Rightarrow \text{مرکز } (1, -2), R = 3$$

$$\text{فاصله ی مرکز از خط} = \frac{|3\alpha + 4\beta - 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3 - 8 - 15|}{5} = 4$$

$$\text{فاصله ی نزدیک ترین نقطه ی دایره از خط} = 4 - 3 = 1$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۷۳

$$\vec{V}_1 = (2, a, 1), \vec{V}_2 = (b, 2, 4), \vec{V}_3 = (2, 1, c)$$

اولاً باید این سه بردار دو به دو بر هم عمود باشند (یال های مکعب مستطیل).

$$\begin{cases} \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = . \\ \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3 = . \\ \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_3 = . \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b + 2a + 4 = . \\ 4 + a + c = . \\ 2b + 2 + 4c = . \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \\ c = -1 \end{cases}$$

ثانیاً: حجم مکعب مستطیل (متوازی السطوح) قدرمطلق حاصلضرب مختلط سه بردار است.

$$\Rightarrow \left| \vec{V}_1 \cdot (\vec{V}_2 \times \vec{V}_3) \right| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 42$$



۱۷۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، دترمینان A برابر است با: $|A| = ad - bc$

پس در ماتریس $A = \begin{bmatrix} \text{Log } 5 & \text{Log } 2 \\ \text{Log } 2 & \text{Log } 5 \end{bmatrix}$ داریم:

$$|A| = (\text{Log } 5)^2 - (\text{Log } 2)^2 = (\text{Log } 5 - \text{Log } 2)(\text{Log } 5 + \text{Log } 2)$$

از آنجا که $\text{Log } a + \text{Log } b = \text{Log } (ab)$ ، $\text{Log } a - \text{Log } b = \text{Log } \left(\frac{a}{b}\right)$ داریم:

$$\rightarrow |A| = \text{Log } \frac{5}{2} \times \text{Log } 10 = \text{Log } 2/5 \times 1 = \text{Log } 2/5$$

۱۷۵

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حل به روش عدد گذاری: فرض می‌کنیم $a = 1$ و $b = -1$ باشد، در این صورت داریم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2(a+b) \\ 1 & a+1 & a^2(b+2) \\ 1 & b+1 & b^2(a+2) \end{vmatrix} \xrightarrow[b=-1]{a=1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 9 = 0$$

تنها گزینه ۱ به ازای $a = 1$ و $b = -1$ صفر می‌شود، لذا گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۷۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 4 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} &= 20a - 189 \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 5 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} &= 25a - 198 \end{aligned} \right\} \xrightarrow[\text{فرض سوال}]{\text{باتوجه به}} (20a - 189) + 6 = 25a - 198 \Rightarrow 5a = 15 \Rightarrow a = 3$$

روش دوم:

$$\text{می‌دانیم} \quad \begin{vmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 4+1 & -2+1 & 7+1 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 4 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 6 \xrightarrow{\text{سطر سوم}} 0 - 5 \times (3 - a) + 6(3 - 2) = 6 \rightarrow 0 - 5 \times (3 - a) = 0 \Rightarrow a = 3$$

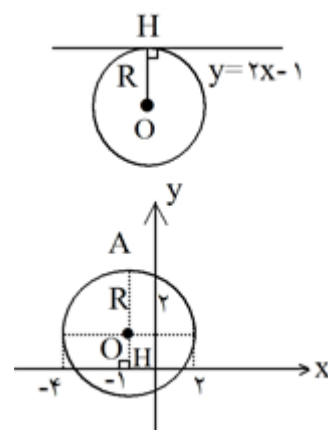
۱۷۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تمام قائم‌های بر دایره از مرکز آن می‌گذرند، بنابراین طبق گفته‌ی سؤال نقطه‌ی $(-1, 2)$ مرکز دایره است و از آنجا که دایره بر خط مماس شده است پس فاصله‌ی مرکز دایره تا آن خط برابر با طول شعاع دایره است.

$$OH = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 - 2(-1) + 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله دایره}} (x+1) + (y-2) = 5$$

$$\text{بیشترین فاصله‌ی نقاط دایره از محور } x \text{ ها } AH = R + OH = \sqrt{5} + 2$$



$$(\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-3, -6, 2)$$

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{49} = 7$$

$$V = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})| = |(4, 0, -1) \cdot (-3, -6, 2)| = |-12 - 2| = 14$$

$$V = S \cdot h \Rightarrow h = \frac{V}{S} = \frac{|\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{14}{7} = 2$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. توجه کنید زاویه‌ی بین $\vec{AB}$ و $\vec{BC}$ برابر 120° درجه و زاویه‌ی بین $\vec{BC}$ و $\vec{AC}$ برابر 60° درجه و زاویه‌ی بین $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ برابر 60° درجه است.

$$\begin{aligned} & \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{AC} \\ &= |\vec{AB}| |\vec{BC}| \cos 120^\circ + |\vec{BC}| |\vec{AC}| \cos 60^\circ + |\vec{AB}| |\vec{AC}| \cos 60^\circ \\ &= 8 \times 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 8 \times 8 \times \frac{1}{2} + 8 \times 8 \times \frac{1}{2} = 32 \end{aligned}$$



۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا حرف a را به m تغییر می‌دهیم تا با نصف قطر بزرگ بیضی آن را اشتباه نگیریم. پس کانون‌های بیضی $F(0,0)$ و $F'(0,m)$ هستند. پس:

$$FF' = 2c \Rightarrow |m| = 2c \Rightarrow c = \frac{|m|}{2} \quad (1)$$

$$A \in \text{بیضی} \Rightarrow AF + AF' = 2a \Rightarrow 3 + \sqrt{9 + m^2} = 2a \quad (2)$$

از طرف دیگر:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{c}{a} \Rightarrow 2a = 2\sqrt{2}c \xrightarrow{\text{از (1) و (2)}} 3 + \sqrt{9 + m^2} = \sqrt{2}|m|$$

$$\Rightarrow \sqrt{9 + m^2} = \sqrt{2}|m| - 3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 9 + m^2 = 2m^2 + 9 - 6\sqrt{2}|m| \Rightarrow m^2 - 6\sqrt{2}|m| = 0$$

اکنون دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$m > 0 \xrightarrow{|m|=m} m^2 - 6\sqrt{2}m = 0 \Rightarrow m(m - 6\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } m = 6\sqrt{2}$$

$$m < 0 \xrightarrow{|m|=-m} m^2 + 6\sqrt{2}m = 0 \Rightarrow m(m + 6\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ یا } m = -6\sqrt{2}$$

مسلماً $m = 0$ قابل قبول نیست زیرا به‌ازای $m = 0$ به کانون $F'(0,0)$ می‌رسیم که همان کانون F است. پس $m = \pm 6\sqrt{2}$ بنابراین $c = 3\sqrt{2}$ و چون $2a = 2\sqrt{2}c$ پس $a = 6$ در نتیجه:

$$b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - (3\sqrt{2})^2 = 18 \Rightarrow b = 3\sqrt{2} \Rightarrow \text{قطر کوچک} = 2b = 6\sqrt{2}$$

۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نقاط A و B و C وسط اضلاع مثلث MNE به مساحت ۱۶ هستند. چون $\triangle ABC$ با $\triangle MNE$ متشابه با نسبت $\frac{1}{2}$ است. داریم:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNE}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{S_{MNE}=16} S_{ABC} = 4$$

اکنون با استفاده از ضرب خارجی مساحت مثلث ABC را پیدا می‌کنیم.

$$A = (a, 4, 1), B = (a, b, 3), C = (a, 9, b)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0, b - 4, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, 5, b - 1)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & b-4 & 2 \\ 0 & 5 & b-1 \end{vmatrix} = (b^2 - 5b + 4 - 10)i = (b^2 - 5b - 6)i$$

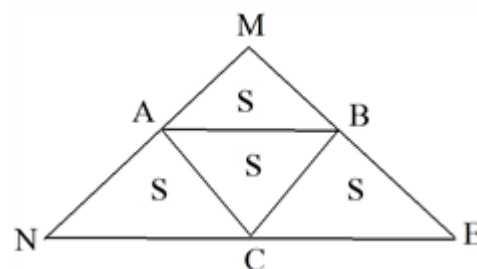
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \Rightarrow 4 = \frac{1}{2} \sqrt{(b^2 - 5b - 6)^2} \Rightarrow |b^2 - 5b - 6| = 8$$

بنابراین:

$$b^2 - 5b - 6 = 8 \Rightarrow b^2 - 5b - 14 = 0 \Rightarrow \text{مجموع مقادیر } b = 5$$

$$b^2 - 5b - 6 = -8 \Rightarrow b^2 - 5b + 2 = 0 \Rightarrow \text{مجموع مقادیر } b = 5$$

پس مجموع مقادیر ممکن برابر b مساوی ۱۰ است.



۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا در معادله سهمی حرف a را به m تغییر می‌دهیم تا a با پارامتر سهمی اشتباه گرفته نشود. پس معادله سهمی به صورت $y^2 - 2y + 4x = m$ است. اکنون معادله سهمی را به صورت استاندارد می‌نویسیم.

$$y^2 - 2y + 4x = m \Rightarrow (y - 1)^2 - 1 + 4x = m \Rightarrow (y - 1)^2 = -4x + m + 1$$

$$\Rightarrow (y - 1)^2 = -4\left(x - \frac{m}{4} - \frac{1}{4}\right)$$

۱



پاسخنامه کلیدی

سهمی به صورت زیر است.

$$x = a + \alpha \Rightarrow x = 1 + \frac{m}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x-1}{4} \Rightarrow 3 = \frac{5}{4} + \frac{m}{4} \Rightarrow 12 = 5 + m \Rightarrow m = 7$$

۱	۱	۲	۳	۴	۳۳	۱	۲	۳	۴	۶۵	۱	۲	۳	۴	۹۷	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴	۳۴	۱	۲	۳	۴	۶۶	۱	۲	۳	۴	۹۸	۱	۲	۳	۴
$A^3 =$	۱	۲	۳	۴	۳۵	۱	۲	۳	۴	۶۷	۱	۲	۳	۴	۹۹	۱	۲	۳	۴
$A^4 =$	۱	۲	۳	۴	۳۶	۱	۲	۳	۴	۶۸	۱	۲	۳	۴	۱۰۰	۱	۲	۳	۴
$A^5 =$	۱	۲	۳	۴	۳۷	۱	۲	۳	۴	۶۹	۱	۲	۳	۴	۱۰۱	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴	۳۸	۱	۲	۳	۴	۷۰	۱	۲	۳	۴	۱۰۲	۱	۲	۳	۴
$B^7 =$	۱	۲	۳	۴	۳۹	۱	۲	۳	۴	۷۱	۱	۲	۳	۴	۱۰۳	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴	۴۰	۱	۲	۳	۴	۷۲	۱	۲	۳	۴	۱۰۴	۱	۲	۳	۴
$3A - 2B =$	۱	۲	۳	۴	۴۱	۱	۲	۳	۴	۷۳	۱	۲	۳	۴	۱۰۵	۱	۲	۳	۴
$\Rightarrow 3B =$	۱	۲	۳	۴	۴۲	۱	۲	۳	۴	۷۴	۱	۲	۳	۴	۱۰۶	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴	۴۳	۱	۲	۳	۴	۷۵	۱	۲	۳	۴	۱۰۷	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴	۴۴	۱	۲	۳	۴	۷۶	۱	۲	۳	۴	۱۰۸	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴	۴۵	۱	۲	۳	۴	۷۷	۱	۲	۳	۴	۱۰۹	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴	۴۶	۱	۲	۳	۴	۷۸	۱	۲	۳	۴	۱۱۰	۱	۲	۳	۴
$x =$	۱	۲	۳	۴	۴۷	۱	۲	۳	۴	۷۹	۱	۲	۳	۴	۱۱۱	۱	۲	۳	۴
$\Delta y =$	۱	۲	۳	۴	۴۸	۱	۲	۳	۴	۸۰	۱	۲	۳	۴	۱۱۲	۱	۲	۳	۴
$\left(y - \frac{1}{4} = -\frac{x - \frac{1}{4}}{4}\right)$	۱	۲	۳	۴	۴۹	۱	۲	۳	۴	۸۱	۱	۲	۳	۴	۱۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴	۵۰	۱	۲	۳	۴	۸۲	۱	۲	۳	۴	۱۱۴	۱	۲	۳	۴
$\Delta x =$	۱	۲	۳	۴	۵۱	۱	۲	۳	۴	۸۳	۱	۲	۳	۴	۱۱۵	۱	۲	۳	۴
$\Delta y =$	۱	۲	۳	۴	۵۲	۱	۲	۳	۴	۸۴	۱	۲	۳	۴	۱۱۶	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴	۵۳	۱	۲	۳	۴	۸۵	۱	۲	۳	۴	۱۱۷	۱	۲	۳	۴
$\Delta x =$	۱	۲	۳	۴	۵۴	۱	۲	۳	۴	۸۶	۱	۲	۳	۴	۱۱۸	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴	۵۵	۱	۲	۳	۴	۸۷	۱	۲	۳	۴	۱۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴	۵۶	۱	۲	۳	۴	۸۸	۱	۲	۳	۴	۱۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴	۵۷	۱	۲	۳	۴	۸۹	۱	۲	۳	۴	۱۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴	۵۸	۱	۲	۳	۴	۹۰	۱	۲	۳	۴	۱۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴	۵۹	۱	۲	۳	۴	۹۱	۱	۲	۳	۴	۱۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴	۶۰	۱	۲	۳	۴	۹۲	۱	۲	۳	۴	۱۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴	۶۱	۱	۲	۳	۴	۹۳	۱	۲	۳	۴	۱۲۵	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴	۶۲	۱	۲	۳	۴	۹۴	۱	۲	۳	۴	۱۲۶	۱	۲	۳	۴
$D = B \times C \times A = B \times A \times B \times A = (BA)(BA) = (BA)^2$	۱	۲	۳	۴	۶۳	۱	۲	۳	۴	۹۵	۱	۲	۳	۴	۱۲۷	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴	۶۴	۱	۲	۳	۴	۹۶	۱	۲	۳	۴	۱۲۸	۱	۲	۳	۴
$BA =$	۱	۲	۳	۴															

$$(1) \Rightarrow |D| = |(BA)^2| = |BA|^2 = 2^2 = 4$$

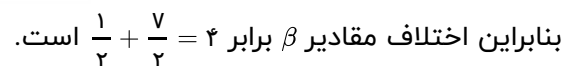
بنابراین

اگرچه با توجه به 4^r باریدگی،



10.

اکنون، ماتریس A^2 را پیدا می‌کنیم:



11

2

اکنون، ماتریس A^2 را پیدا می‌کنیم:

$$A^T = A \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

(ستون اول A^T) A (سطر سوم A^T) = درایه سطر سوم ستون اول A^0

$$= [-2 \ 0 \ 2] \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = [-4 \ 0 \ 4] \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = -8 - 8 = -16$$

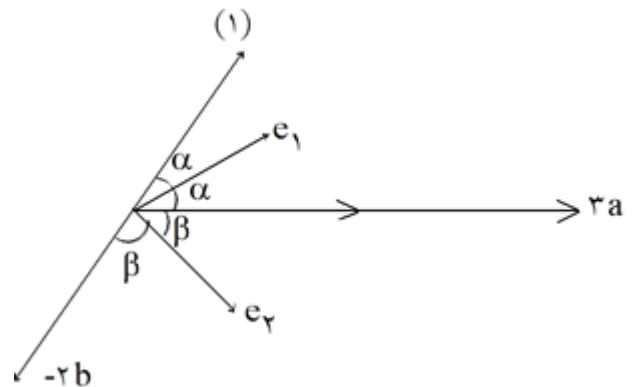
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دترمینان ماتریس‌های A و B برابرند با:

$$|A| = (-2)(-2)(-1) = -4, |B| = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)(-5) = -\frac{5}{4}$$

$$|(AB)^T| = |AB|^T = (|A||B|)^T = \left(-4 \times -\frac{5}{4}\right)^T = 5^T = 25$$

از طرف دیگر:

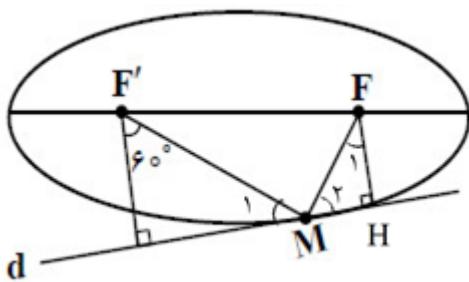
گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$e_1 \perp e_2$ پس: در راستای نیمساز داخلی زاویه بین بردارهای a و b و e_2 در راستای نیمساز خارجی این دو بردار است. پس: $e_1 \perp e_2$ بنابراین متوازی الاضلاع ساخته شده توسط بردارهای واحد e_1 و e_2 مربع به ضلع ۱ می‌باشد. در نتیجه طول قطر این مربع $\sqrt{2}$ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال $HH' = 2\sqrt{3}$ است. بنابر خاصیت بازتابندگی بیضی نتیجه می‌گیریم

$\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ پس $\widehat{F}_1 = 60^\circ$ در نتیجه:



$$\left. \begin{aligned} \triangle MFH : \widehat{F}_1 = 60^\circ &\Rightarrow MH = \frac{\sqrt{3}}{2} MF \\ \triangle MF'H' : \widehat{F}'_1 = 60^\circ &\Rightarrow MH' = \frac{\sqrt{3}}{2} MF' \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$MH + MH' = \frac{\sqrt{3}}{2} (MF + MF') \Rightarrow HH' = \frac{\sqrt{3}}{2} (2a) \Rightarrow 2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} (2a) \Rightarrow 2a = 4$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به داده‌های مسئله شکلی رسم می‌کنیم. در این صورت مرکز دایره در ناحیه چهارم

قرار دارد پس گزینه‌های ۱ و ۲ نادرست‌اند. اکنون گزینه‌های ۳ و ۴ را امتحان می‌کنیم.

اگر $O(4, -3/5)$ را مرکز دایره در نظر بگیریم آنگاه شیب OB باید عکس قرینه شیب خط $3x - 2y = 6$ باشد.

$$m_{OB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3/5 - 0}{4 - 2} = \frac{-3/5}{2} = -\frac{3}{10}, \text{ شیب خط } = \frac{3}{2}$$

دیده می‌شود حاصلضرب این دو شیب برابر -۱ نیست. پس گزینه ۳ هم نادرست است پس گزینه ۴ درست است.

راه حل دوم:

مرکز دایره روی عمودمنصف وتر AB و روی خط OB است. معادله هر دو خط را نوشته با هم قطع می‌دهیم تا مرکز دایره به دست آید.

مسلماً شیب خط OB عکس و قرینه شیب خط $3x - 2y = 6$ و برابر $-\frac{3}{2}$ است. و شیب خط عمودمنصف AB عکس و

قرینه شیب AB است و خط عمودمنصف از نقطهٔ $M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{12}{2}, \frac{1}{2} \right)$ می‌گذرد.

$$m_{OB} = -\frac{2}{3} \text{ شیب عمودمنصف و } = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{\frac{3/5}{2/5}} = -5$$

$$\text{OB خط : } y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow 2x + 3y = 4$$

$$\text{AB عمودمنصف : } y - \frac{1}{2} = -5\left(x - \frac{13}{2}\right) \Rightarrow 2 \cdot x + 4y = 66 \Rightarrow 1 \cdot x + 2y = 33$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 1 \cdot x + 2y = 33 \end{cases} \Rightarrow x = 3/5, y = -1 \Rightarrow O(3/5, -1)$$

