



www.sejall.ir

تست های طبقه بندی شده و فصل به فصل کنکور سراسری همراه با پاسخ کامل تشریحی

پایه تحصیلی : دوازدهم

نام درس : حسابان ۲ فصل ۱ و ۲

نام آموزشگاه : سامانه جامع آزمونهای

الکترونیکی سجال sejall.ir

سوال ۲۲۳

حسابان ۲ فصل ۱ و ۲

۱) معادله مثلثاتی $\cos 2x + \cos x = 0$ چند جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد؟

۴ ۵

۳ ۴

۲ ۳

۱ ۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۲) به ازای چند مقدار طبیعی از m ، تابع $f = \{(-1, 3m-2), (2, 25), (1, 4m+13), (0, 10-m)\}$ صعودی است؟

۴ ۱

۳ ۲

۲ ۳

۱ ۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۳) معادله مثلثاتی $\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \tan 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cot\left(\frac{2\pi}{2}\right)$ چند جواب در بازه $[0, \pi]$ دارد؟

۴ ۶

۳ ۵

۲ ۴

۱ ۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴) اگر $\tan(\alpha + 25^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد، مقدار $\cot(25^\circ - \alpha)$ کدام است؟

۴ $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

۳ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

۲ $\frac{2\sqrt{3}}{15}$

۱ $\frac{\sqrt{3}}{5}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۵) مقدار عبارت $\frac{8x^2 - 36x^2 + 54x - 27}{8x^2 - 24x + 18}$ به ازای ریشه بزرگتر معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ کدام است؟

۴ $5\sqrt{5}$

۳ $0/1\sqrt{5}$

۲ $0/5\sqrt{5}$

۱ $\sqrt{5}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۶) معادله مثلثاتی $\tan 2x + \tan 3x = \tan 5\pi$ چند جواب در بازه $(0, \pi)$ دارد؟

۴ ۳

۳ ۴

۲ ۵

۱ ۶

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴ تیرماه

۷) اگر $\tan(\alpha + 12^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ باشد، مقدار $\cot(18^\circ - \alpha)$ کدام است؟

۴ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

۳ $\frac{\sqrt{3}}{15}$

۲ $\frac{\sqrt{3}}{5}$

۱ $5\sqrt{3}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴ تیرماه

www.sejall.ir

تست های طبقه بندی شده و فصل به فصل کنکور سراسری همراه با پاسخ کامل تشریحی



۸ مقدار عبارت $\frac{24x^3 + 36x^2 + 18x + 3}{(4x^2 + 4x + 1)^2}$ به ازای ریشه مثبت معادله $x^2 + x = 1$ کدام است؟

- ۱ $\cdot / 1\sqrt{5}$ ۲ $\cdot / 2\sqrt{5}$ ۳ $\cdot / 3\sqrt{5}$ ۴ $\cdot / 6\sqrt{5}$

سراسری-ریاضی-۱۴۰۴ تیرماه

۹ در بازه $[0, \pi]$ معادله مثلثاتی $\sin 2x = \cos 3x$ چند جواب دارد؟

- ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ ۵

سراسری-تجربی-۱۴۰۴ تیرماه

۱۰ به ازای چند مقدار صحیح از m تابع $f = \{(-5, 4-m), (2, 2m+3), (10, -10), (3, m-2)\}$ نزولی است؟

- ۱ ۴ ۲ ۵ ۳ ۶ ۴ ۷

سراسری-تجربی-۱۴۰۴ تیرماه

۱۱ فرم کلی جواب‌های معادله $\cos 2x = \sin\left(\frac{3\pi - 2x}{2}\right)$ به کدام صورت است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

- ۱ $2k\pi \pm \pi$ ۲ $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۳ $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$ ۴ $\frac{k\pi}{3} + \pi$

سراسری-تجربی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۱۲ چندجمله‌ای $f(x) = x^5 - 3x^3 + ax + 5$ بر $x + 2$ بخش‌پذیر است. مقدار a کدام است؟

- ۱ $-1/5$ ۲ $1/5$ ۳ $-2/5$ ۴ $2/5$

سراسری-تجربی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۱۳ تابع $f(x) = \begin{cases} |x+2|+1 & x \leq -2 \\ 5m - mx & x > -2 \end{cases}$ روی R نزولی است. اگر بازه $[a, b]$ ، حدود مقادیر m باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{3}$ ۲ $\frac{1}{4}$ ۳ $\frac{1}{6}$ ۴ $\frac{1}{7}$

سراسری-تجربی-اردیبهشت ۱۴۰۴

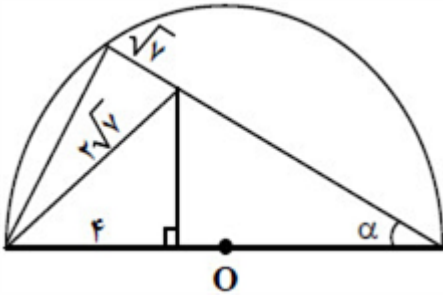
۱۴ نمودار تابع $y = 3 - \sqrt{2x}$ را ابتدا یک واحد در امتداد محور x ها در جهت منفی و سپس قرینه آن نسبت به محور x ها را ۵ واحد در امتداد محور y ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. طول نقطه برخورد نمودار تابع جدید با تابع ثابت $f(x) = \frac{v}{2}$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{2}$ ۲ $\frac{1}{4}$ ۳ $\frac{1}{8}$ ۴ $\frac{1}{16}$

سراسری-تجربی-اردیبهشت ۱۴۰۴



۱۵ در نیم‌دایره شکل مقابل، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟



۴ $\frac{1}{5}\sqrt{2}$

۳ $\frac{1}{4}\sqrt{2}$

۲ $\frac{1}{3}\sqrt{2}$

۱ $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

سراسری-ریاضی-اردیبهشت ۱۴۰۴

۱۶ دوره تناوب $f(x) = \frac{1}{x} - 3 \sin \frac{\pi}{a} x$ برابر $\frac{\pi}{2}$ است. دوره تناوب تابع $-3f(2x)$ کدام است؟

۴ $\frac{\pi}{4}$

۳ π

۲ $\frac{1}{4}$

۱ ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۷ معادله مثلثاتی $2 \cos^2 x = \sin x + 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۴ ۱

۳ ۲

۲ ۳

۱ ۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۸ برد تابع $y = f(x)$ و $y = kf(x)$ برابر $[b, c]$ است. اگر $k = a^2 - 3a + 3$ باشد، حاصل ضرب مقادیر a کدام است؟

۴ -۳

۳ ۳

۲ -۲

۱ ۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۹ مجموع جواب‌های معادله $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

۴ $\frac{9\pi}{4}$

۳ $\frac{7\pi}{4}$

۲ $\frac{5\pi}{2}$

۱ $\frac{3\pi}{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۰ اگر $r(x)$ باقیمانده تقسیم $5 - x^{17}$ بر $x^2 - x + 1$ باشد، حاصل ضرب ضرایب چندجمله‌ای $r(x)$ کدام است؟

$(x \neq -1)$

۴ ۶

۳ -۶

۲ ۴

۱ -۴

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۱ اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع $y = ax^2 + 7x - 1$ در آن اکیداً صعودی است، بازه $(-\infty, 7/a]$ باشد، عرض رأس سهمی کدام است؟

۴ $-6/35$

۳ $-5/25$

۲ $-4/55$

۱ $-3/45$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۲۲ دامنه تابع $y = f(x)$ و $y = f(kx)$ برابر $[b, c]$ است. اگر $k = 2a^2 - a - 5$ باشد، حاصل ضرب مقادیر a کدام است؟

۴ $2/5$

۳ $-2/5$

۲ ۳

۱ -۳

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۳



۲۳ دوره تناوب $f(x) = \frac{1}{2} - \sin \frac{2x}{a}$ برابر $\frac{\pi}{3}$ است. دوره تناوب $y = \cos ax$ کدام است؟

۱۲π (۴)

۶π (۳)

۴π (۲)

۳π (۱)

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۳

۲۴ اختلاف جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos 2x = 3 \sin x - 1$ که در بازه $[0, \pi]$ قرار دارند، کدام است؟

$\frac{2\pi}{3}$ (۴)

$\frac{\pi}{6}$ (۳)

$\frac{\pi}{3}$ (۲)

$\frac{5\pi}{6}$ (۱)

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۳

۲۵ تعداد جواب‌های معادله $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۲۶ اگر $r(x)$ باقیمانده تقسیم $x^4 - 2x^2 + 1$ بر $x^2 + x + 1$ باشد، مجموع ضرایب چندجمله‌ای $r(x)$ کدام است؟ ($x \neq 1$)

۴ (۴)

-۲ (۳)

-۱ (۲)

صفر (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۲۷ اگر بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع $y = -5x^2 + ax - 8$ در آن اکیداً صعودی است، بازه $(-\infty, 2/5]$ باشد، عرض رأس سهمی کدام است؟

۲۴/۷۵ (۴)

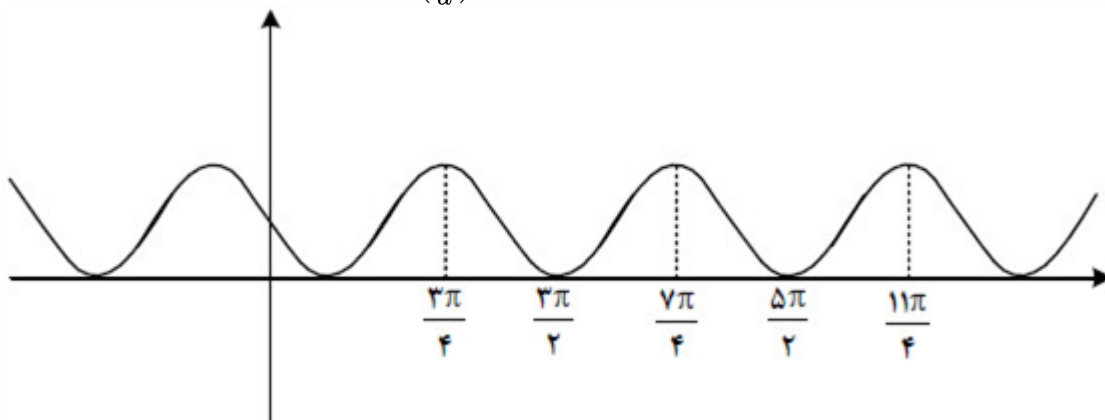
۲۳/۲۵ (۳)

۱۴/۲۵ (۲)

۱۳/۷۵ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۳

۲۸ شکل زیر، نمودار تابع $y = 1 + \sin ax$ است. دوره تناوب $y = 3 \cos\left(\frac{x}{a}\right)$ کدام است؟



۲π (۴)

۳π (۳)

۶π (۲)

۴π (۱)

سراسری-تجربی-اردیبهشت ۱۴۰۳

۲۹ معادله مثلثاتی $\sin 2x - 4 \sin^2 x \cos x = 0$ چند جواب در بازه $(-\pi, \pi)$ دارد؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۳۰ تابع $y = (x-1)|x|$ در بازه (a, b) اکیداً نزولی است. مقدار $a+b$ کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۳ اردیبهشت



۳۱) مجموع جواب‌های معادله $\cos 2x + \sin^2 x = 0$ در بازه $[-3\pi, \pi]$ کدام است؟

۴) -4π

۳) -3π

۲) $-\pi$

۱) صفر

سراسری-ریاضی-۱۴۰۳ اردیبهشت

۳۲) اگر اختلاف جواب‌های غیرصفر معادله $\cot\left(\frac{\pi+4x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi+8x}{2}\right)$ در بازه $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ برابر α باشد، مقدار $\cos(2\alpha)$ کدام است؟

۴) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

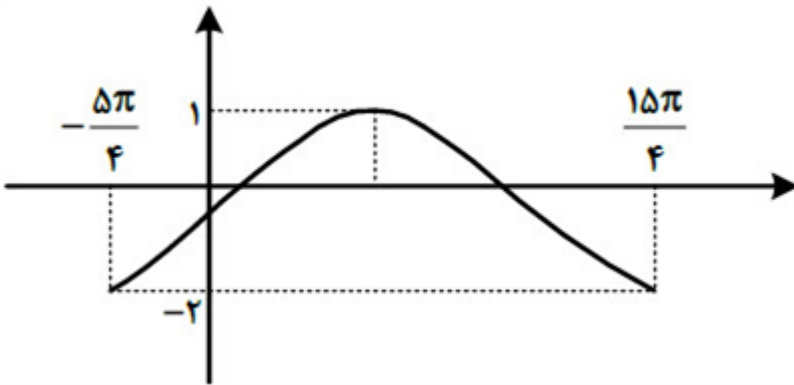
۳) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

۲) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۳۳) شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - bx\right) + c$ در یک بازه تناوب را نشان می‌دهد. مقدار ab کدام است؟



۴) $0/6$

۳) $-0/6$

۲) $0/3$

۱) $-0/3$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۳۴) خطوط $x + 2y = 3$ و $2x + ay = 6$ یکدیگر را در نقطه A و خط $x + y = 0$ را به ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کنند. اگر مرکز دایره‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، بر نیمساز ناحیه دوم واقع باشد، مقدار $\cot(B - C)$ در مثلث ABC کدام است؟

۴) $-\frac{4}{3}$

۳) $-\frac{3}{5}$

۲) $-\frac{3}{4}$

۱) $-\frac{5}{3}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۳۵) اگر $f(x) = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x + \log_{5/2} x\right)^2$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $f(x) < f(2^{-3x})$ کدام است؟

۴) $(0, 1)$

۳) $\left(\frac{1}{8}, +\infty\right)$

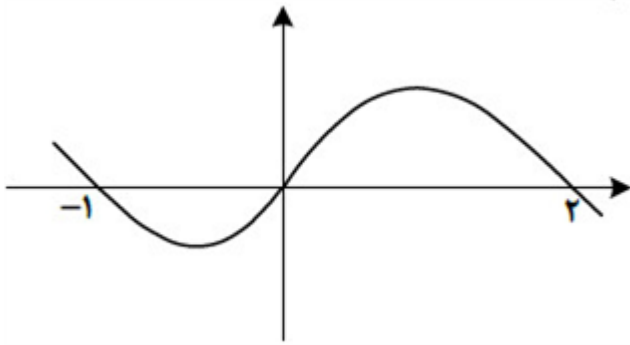
۲) $(1, +\infty)$

۱) $\left(0, \frac{1}{8}\right)$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی



۳۶ شکل مقابل، نمودار $f(x-2)$ را نشان می‌دهد. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{f(1-x)}{f(x+1)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۴ بیش از ۴

۳ صفر

۲ ۲

۴ ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۳۷ تابع f اکیداً صعودی و دامنه آن، مجموعه‌ای از مقادیر مثبت است. اگر $f(m^2 - 4m + 4) < f(2m^2 - 9m - 2)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

۴ ۶

۳ ۵

۲ ۲

۱ ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۸ در معادله مثلثاتی $3\sin x - \sqrt{3}\cos x + m\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ اگر $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ باشد، مقدار m کدام است؟

۴ -۳

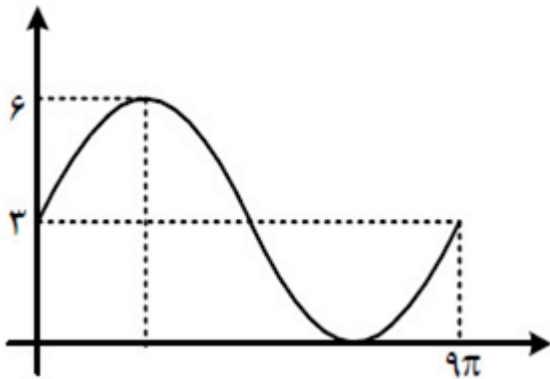
۳ ۳

۲ $-\sqrt{3}$

۱ $\sqrt{3}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۳۹ اگر شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \frac{2}{a} - \frac{b}{1 + \tan^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)}$ باشد، مقدار $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ کدام است؟



۴ ۵

۳ $2/75$

۲ $4/5$

۴ ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۰ در یک مثلث، زاویه بین دو ضلع با اندازه‌های ۵ و ۱۲ برابر α است. اگر مساحت این مثلث ۱۵ باشد، اختلاف بیشترین و کمترین مقدار α کدام است؟

۴ $\frac{\pi}{4}$

۳ $\frac{\pi}{2}$

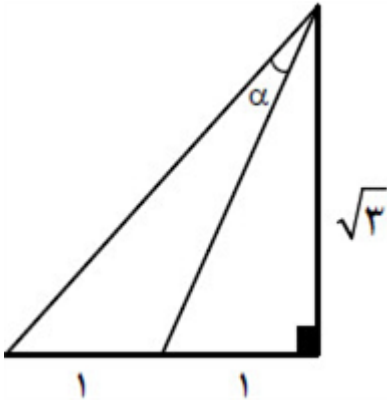
۲ $\frac{\pi}{3}$

۱ $\frac{2\pi}{3}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی



۴۱ در شکل مقابل، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟



۴ $\frac{\sqrt{3}}{5}$

۳ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

۱ $\frac{1}{5\sqrt{3}}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۴۲ اگر اختلاف جوابهای معادله $\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi+2x}{2}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi+4x}{2}\right)} = 0$ در بازه $[0, \pi]$ برابر α باشد، مقدار $\tan(2\alpha)$ کدام است؟

۴ $-\sqrt{2}$

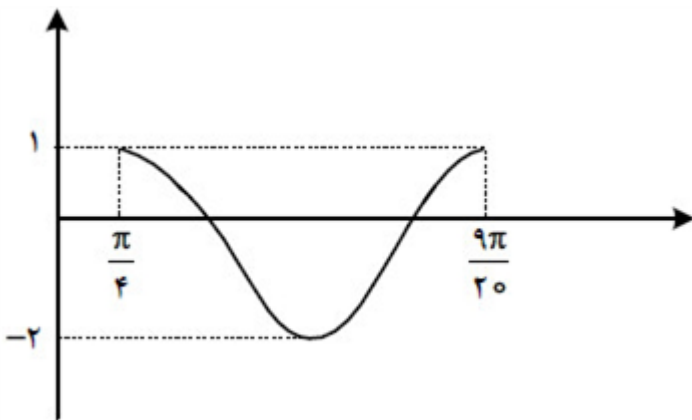
۳ $\sqrt{2}$

۲ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه

۴۳ شکل مقابل، نمودار تابع $y = a \cos^2\left(bx - \frac{\pi}{4}\right) + c$ در یک بازه تناوب را نشان می‌دهد. مقدار ab کدام است؟



۴ $-7/5$

۳ $7/5$

۲ -15

۱ 15

سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه

۴۴ خطوط $ax - y = 3$ و $3y + x = -9$ یکدیگر را در نقطه A و خط $y - x = 0$ را به ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کنند. اگر مرکز دایره‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، بر نیمساز ناحیه اول و سوم واقع باشد، در مثلث ABC، مقدار $\tan(B - C)$ کدام است؟

۴ $\frac{2}{3}$

۳ $\frac{1}{3}$

۲ $\frac{3}{4}$

۱ $\frac{1}{4}$

سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه

۴۵ اگر $f(x) = (x + \log x)^5$ باشد، مجموعه جواب نامعادله $f(x) < f(x^5)$ کدام است؟

۴ $(1, +\infty)$

۳ $(5, +\infty)$

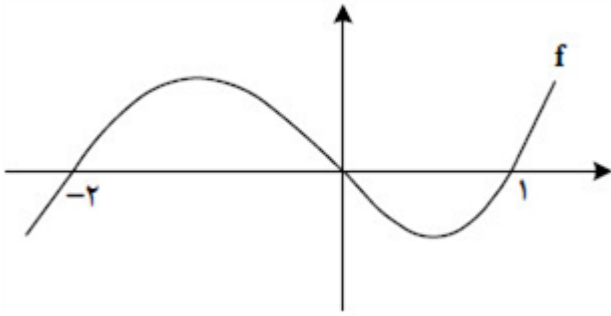
۲ $(0, 1)$

۱ $(0, 5)$

سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه



۴۶ نمودار مقابل، تابع f را نشان می‌دهد. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{-\frac{f(x)}{f(2+x)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



۵ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۳ (۱)

سراسری-تجربی-۱۴۰۲ تیرماه

۴۷ تابع f اکیداً نزولی و دامنه آن مجموعه‌ای از مقادیر منفی است. اگر $f(m^2 - m - 5) < f(-3 + 2m - m^2)$ باشد، m دارای چند مقدار صحیح است؟

صفر (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۴۸ در معادله مثلثاتی $m(\cos x - \sin x) - 3\sqrt{6}\sin(2x) = \sqrt{6}$ اگر $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ باشد، مقدار m کدام است؟

۳ (۴)

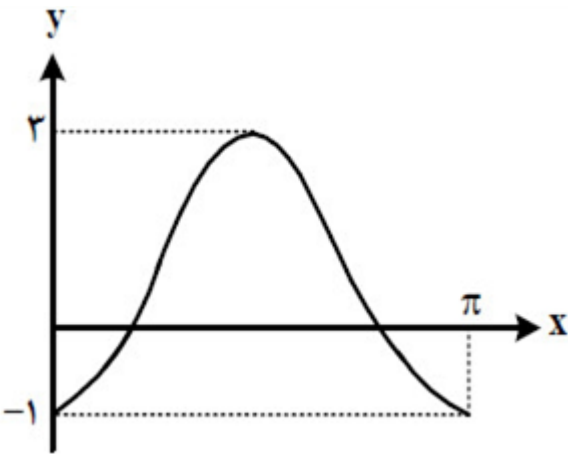
۶ (۳)

-۳ (۲)

-۶ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

۴۹ اگر شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b\sin\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)$ باشد، اختلاف صفرهای تابع f در بازه $[0, \pi]$ ، کدام است؟



$\frac{2\pi}{3}$ (۴)

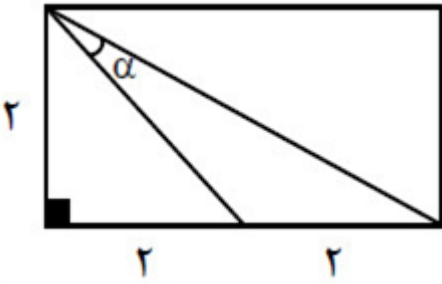
$\frac{\pi}{2}$ (۳)

$\frac{\pi}{4}$ (۲)

$\frac{\pi}{6}$ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

در شکل مقابل، مقدار $\text{Cotg } \alpha$ کدام است؟ (۵۰)



$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

سراسری-ریاضی-۱۴۰۲ تیرماه

معادله مثلثاتی $\text{tg } 2x = \text{Cotg } x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ چند جواب دارد؟ (۵۱)

۷ (۴)

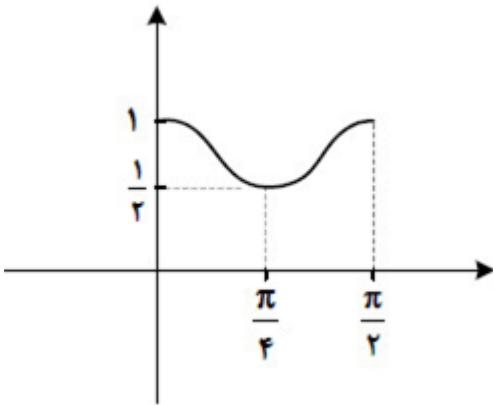
۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع $y = c + a \cos bx$ را نشان می‌دهد. مقدار bc کدام است؟ ($b > 0$) (۵۲)



۳ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۳ (۱)

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{(2x+5)^2} - \sqrt{(5x-2)^2}$ در یک بازه نزولی است. ضابطه f^{-1} در این بازه، کدام است؟ (۵۳)

$f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}, x \geq \frac{2}{5}$ (۲)

$f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}, x \leq \frac{29}{5}$ (۱)

$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}, x \geq \frac{2}{5}$ (۴)

$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}, x \leq \frac{29}{5}$ (۳)

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

خارج‌قسمت و باقیمانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x-1$ ، به ترتیب $q(x)$ و ۲ است. اگر $p^2(x)$ بر x^2-4 بخش پذیر باشد، $q(-۲)$ کدام است؟ (۵۴)

صفر (۴)

۲ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

سراسری-تجربی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۵۵ چند جمله‌ای $p(x) = x^{2n-1} + 3x^{2n-2} + \frac{1}{27}x^6 - \frac{1}{9}x^2 + a$ به ازای هر عدد طبیعی n بر $x + 3$ بخش پذیر است. باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر $x^2 - 1$ کدام است؟

- ۱ $-x + \frac{407}{27}$ ۲ $x - \frac{227}{27}$ ۳ $-x + \frac{227}{27}$ ۴ $x - \frac{407}{27}$

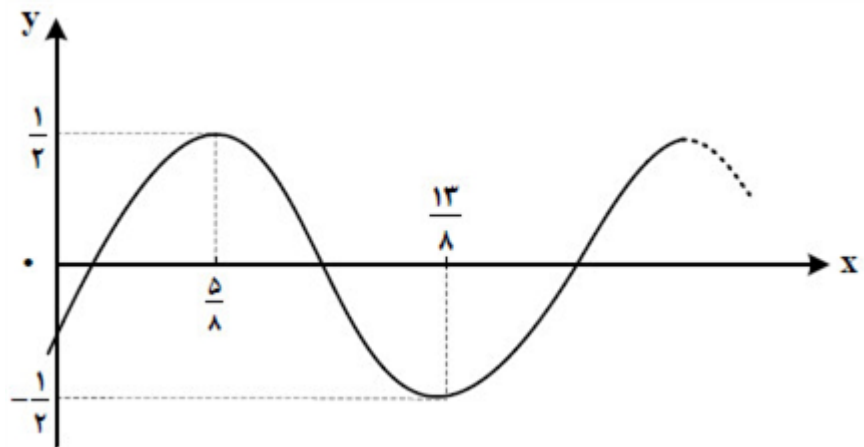
سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۵۶ معادله $\sin x \cos x + \frac{1}{2} \sin^2 x = \frac{1}{2} \cos^2 x$ در بازه $[-\pi, \pi]$ ، چند جواب دارد؟

- ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۶ ۴ ۸

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۵۷ شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin(bx - c)$ را نشان می‌دهد. اگر $a > 0$ ، $b > 0$ و $0 < c < 2\pi$ باشند، مقدار $\frac{ab}{c}$ کدام است؟



- ۱ ۴ ۲ 1/2 ۳ 1/π ۴ 2π

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۵۸ تابع با ضابطه $y = |2x + 2| - \left| \frac{x}{2} - 2 \right|$ در یک بازه نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه، کدام است؟

- ۱ $-\frac{2}{3}x - \frac{8}{3}, x \geq -\frac{5}{2}$ ۲ $-\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}, x \geq -\frac{5}{2}$ ۳ $-\frac{2}{3}x - \frac{8}{3}, x \geq -\frac{3}{2}$ ۴ $-\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}, x \geq -\frac{3}{2}$

سراسری-ریاضی-رفع شبهه آذرماه ۱۴۰۱

۵۹ برای رسم نمودار تابع $y = -\frac{1}{2}|2x + 1|$ به کمک نمودار $y = |x|$ ، کدام مورد برای کامل کردن جمله زیر، مناسب است؟

«ابتدا نمودار تابع قدرمطلق را $\frac{1}{2}$ واحد به سمت جابه‌جا کرده و سپس قرینه آن را نسبت به محور رسم می‌کنیم.»

- ۱ چپ - x ها ۲ راست - x ها ۳ بالا - y ها ۴ پایین - y ها

سراسری-انسانی-دی ۱۴۰۱



۶۰ کمترین فاصله بین دو مقدار از جواب‌های معادله $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$ کدام است؟

$\frac{\pi}{3}$ (۴)

$\frac{\pi}{2}$ (۳)

π (۲)

2π (۱)

سراسری-تجربی-دی ۱۴۰۱

۶۱ نمودار $\frac{1}{f}$ را در امتداد محور x ها، a واحد در جهت مثبت انتقال داده و آن را g می‌نامیم. سپس تابع $|g|$ را در امتداد محور y ها، 2 واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. طول نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع $\frac{1}{|f|}$ برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است. اگر f تابع همانی باشد، اختلاف مقادیر در تساوی $f(x+a) = 2$ کدام است؟

$\sqrt{2}$ (۴)

$2 - \sqrt{2}$ (۳)

2 (۲)

$2 + \sqrt{2}$ (۱)

سراسری-تجربی-دی ۱۴۰۱

۶۲ تابع $f(x) = mx^2 - nx - k$ در هر بازه، هم صعودی و هم نزولی است. اگر مجموعه زیر، تابع باشد، مقدار $f(\sqrt{5})$ کدام است؟
 $\{(m, n-1), (0, k), (n-1, m^2 + 2m-1), (3k+2, 2k+1)\}$

$\sqrt{5}$ (۴)

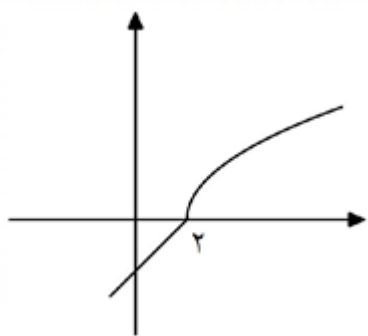
1 (۳)

$-\sqrt{5}$ (۲)

-1 (۱)

سراسری-تجربی-دی ۱۴۰۱

۶۳ اگر $f(x) = \left| \frac{1}{2}x - 1 \right|$ و شکل مقابل نمودار تابع $g(x)$ باشد، معادله $g(f(g(x+2))) = 0$ چند ریشه دارد؟



4 (۴)

3 (۳)

2 (۲)

1 (۱)

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۶۴ مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos\left(\frac{17\pi}{8} + x\right) \cos\left(\frac{3\pi}{8} - x\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ کدام است؟

$\frac{\pi}{4}$ (۴)

$\frac{2\pi}{3}$ (۳)

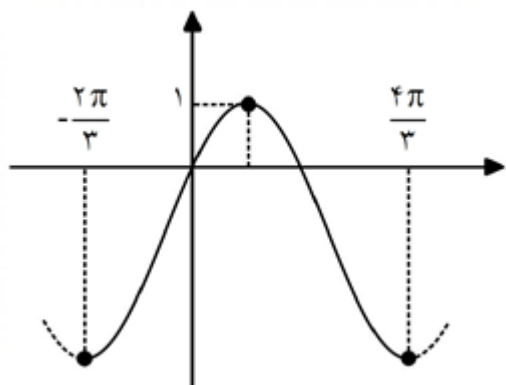
$\frac{\pi}{3}$ (۲)

$\frac{\pi}{2}$ (۱)

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱



۶۵ شکل مقابل، قسمتی از نمودار $y = a + b \cos\left(cx - \frac{\pi}{3}\right)$ را نشان می‌دهد. مقدار $b(c - a)$ کدام است؟



۴ ۶

۳ ۴

۲ ۳

۱ ۲

سراسری-ریاضی-دی ۱۴۰۱

۶۶ تعداد جواب‌های معادله $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۴ ۴

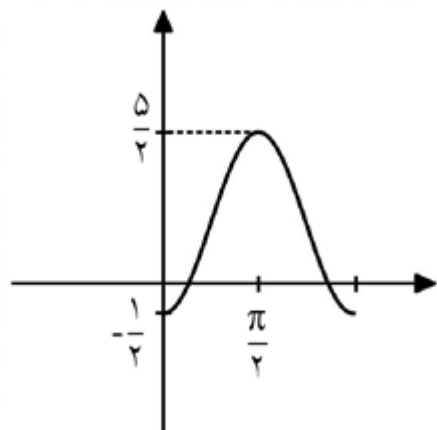
۳ ۳

۲ ۲

۱ ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۶۷ شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع $y = c + a \cos bx$ را نشان می‌دهد. مقدار ac کدام است؟



۴ -3/2

۳ -5/2

۲ -۳

۱ -۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۶۸ تابع f روی R اکیداً نزولی است. اگر $f(3) = 0$ باشد، دامنه $g(x) = \sqrt{x^2 f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

۴ ۴

۳ ۳

۲ ۲

۱ صفر

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۶۹ نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱ واحد در جهت مثبت و سپس قرینه آن نسبت به محور x ها را در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه‌های برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۴ sqrt(10)/2

۳ 3*sqrt(2)/2

۲ sqrt(5)/2

۱ sqrt(2)/2

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی



۷۰) باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = x^2 + 2x + 5$ بر $p(x) = x + 2$ برابر x است. اگر $f(1) = 13$ و $f(-1) = 11$ باشد، خارج قسمت این تقسیم کدام مورد می‌تواند باشد؟

۴ $-2x + 3$

۳ $3x - 2$

۲ $2x - 1$

۱ $-x + 2$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۱) مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۴ $\frac{5\pi}{4}$

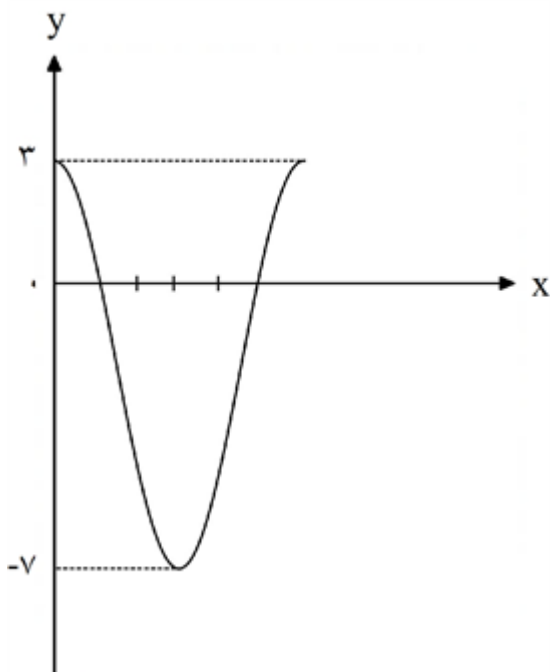
۳ $\frac{\pi}{4}$

۲ $\frac{3\pi}{2}$

۱ $\frac{\pi}{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۲) شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos x + b$ را نشان می‌دهد. مقدار $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ کدام است؟



۴ $-\frac{11}{2}$

۳ $-\frac{1}{2}$

۲ $\frac{11}{2}$

۱ $\frac{1}{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۷۳) تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $8 \cos x - \tan^2 x = 1$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۴ ۲

۳ ۳

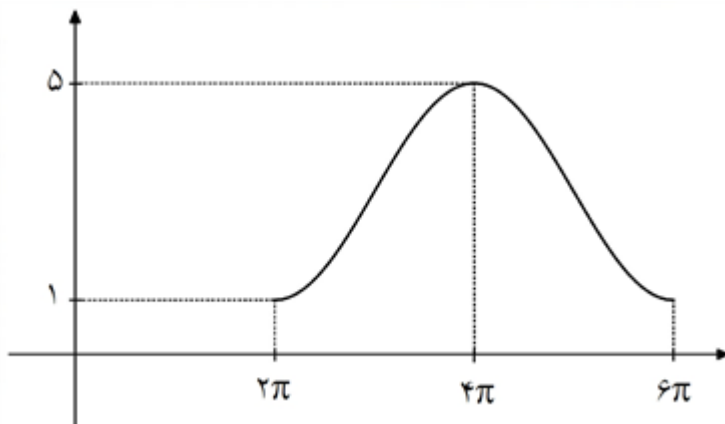
۲ ۴

۱ ۵

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۱



۷۴ شکل زیر، نمودار تابع $y = c + a \cos bx$ را در یک دوره تناوب، نشان می‌دهد. مقدار c کدام است؟



۱ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۱

۷۵ اگر $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ و $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1-m}{2+m}$ باشد، مجموعه مقادیر m کدام است؟

(-۱, ۲) (۴)

(-۱, ۲] (۳)

(-۲, ۱] (۲)

(-۲, ۱) (۱)

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۱

۷۶ تابع $f(x) = (-9 + k^x)x^x + 5$ اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح k ، چقدر است؟

۶ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۱

۷۷ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 4x - x^x$ را در امتداد محور x ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات کدام است؟

$\sqrt{10}$ (۴)

$2\sqrt{5}$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

سراسری-تجربی-تیرماه ۱۴۰۱

۷۸ چندجمله‌ای $p(x) = x^{3n+1} + 2x^{3n} + x^6 + 3x^5 + 16a$ ، به ازای هر عدد طبیعی n بر $x + 2$ بخش‌پذیر است. برای $n = 1$ ، باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x^2 + 2x - 3$ کدام است؟

$-5x + 44$ (۴)

$-5x + 34$ (۳)

$-15x + 14$ (۲)

$-15x + 24$ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۷۹ مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ در بازه $[-\pi, 2\pi]$ کدام است؟

$\frac{11\pi}{6}$ (۴)

$\frac{9\pi}{4}$ (۳)

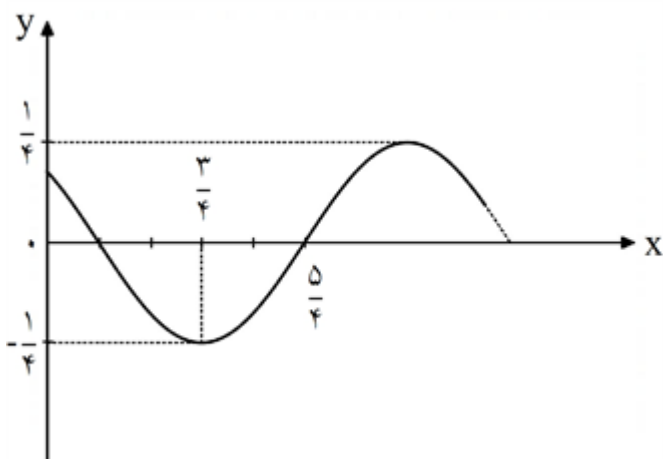
$\frac{7\pi}{3}$ (۲)

$\frac{\pi}{3}$ (۱)

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱



۸۰ شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos(bx + c)$ را نشان می‌دهد. اگر $b > 0$ و $0 < c < \pi$ باشد، مقدار $\frac{ac}{b}$ کدام است؟



۴ π

۳ $\frac{1}{4\pi}$

۲ ۱

۱ $\frac{1}{16}$

سراسری-ریاضی-تیرماه ۱۴۰۱

۸۱ تابع $y = 2^{x+|x|}$ را ۳ واحد در امتداد محور x ها در جهت منفی و سپس در امتداد محور y ها ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. منحنی حاصل، محور x ها را با کدام طول، قطع می‌کند؟

۴ $\frac{7}{2}$

۳ $\frac{5}{2}$

۲ $-\frac{3}{2}$

۱ $-\frac{5}{2}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۸۲ تابع متناوب $f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & ; 1 < x \leq 2 \end{cases}$ را که دوره‌ی تناوب آن ۲ است، در نظر بگیرید. مساحت ناحیه‌ی محصور به منحنی f و محور x ها در بازه‌ی $[-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}]$ ، کدام است؟

۴ ۴

۳ $\frac{3}{5}$

۲ ۳

۱ ۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۸۳ تعداد جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $5 \sin^2(x) + 2 \cos(3x) = -2$ ، در فاصله‌ی $[-\pi, \pi]$ ، کدام است؟

۴ ۷

۳ ۵

۲ ۲

۱ ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۸۴ نمودار منحنی $y = \sqrt{\sqrt{x} + 3}$ را k واحد در راستای قائم چنان انتقال می‌دهیم، که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را نسبت به محور x ها قرینه کرده و ۴ واحد در جهت افقی به سمت چپ انتقال می‌دهیم. کدامیک از نقاط زیر روی نمودار منحنی به دست آمده، قرار دارد؟

۴ $(0, -\sqrt{5})$

۳ $(0, 1 - \sqrt{5})$

۲ $(-\sqrt{5}, 0)$

۱ $(1 - \sqrt{5}, 0)$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۸۵ تعداد جواب‌های معادله مثلثاتی $(1 + \cos(\alpha))(1 + \cos(2\alpha))(1 + \cos(4\alpha)) = \frac{1}{8}$ ، در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

۴ ۱۵

۳ ۱۴

۲ ۱۰

۱ ۷

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی



۸۶) مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $2 \sin(x) \cos(2x) + \sin(x) = 1$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

$\frac{7\pi}{2}$ (۴)

2π (۳)

$\frac{5\pi}{2}$ (۲)

2π (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۸۷) قرینه‌ی نمودار تابع $y = 2 + \sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y = x$ رسم کرده و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد در جهت مثبت محور x ها و ۳ واحد در جهت منفی محور y ها انتقال می‌دهیم و آن را $y = g(x)$ می‌نامیم. مقدار $g(4)$ کدام است؟

-۴ (۴)

-۲ (۳)

-۳ (۲)

۳ (۱)

سراسری - تجربی - ۱۴۰۰

۸۸) نمودار تابع $y = 2^{|\sin x|}$ را ابتدا به اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$ در امتداد محور x ها در جهت مثبت و سپس $\frac{2}{3}$ در امتداد محور y ها در جهت منفی انتقال می‌دهیم. تعداد محل تقاطع نمودار حاصل با محور x ها در فاصله‌ی $[0, \pi]$ ، کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

سراسری - تجربی - ۱۴۰۰

۸۹) تعداد جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\cos^2(x) - \sin^2(x) \cos(3x) = 1$ ، در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

سراسری - تجربی - ۱۴۰۰

۹۰) نمودار منحنی $y = \sqrt{4-x}$ را k واحد در راستای قائم و $2-k$ واحد در جهت افقی چنان انتقال می‌دهیم که منحنی جدید وارون تابع خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند. سپس منحنی حاصل را ۱ واحد در راستای قائم به سمت پایین انتقال می‌دهیم. طول نقطه‌ی برخورد منحنی به دست آمده با محور x ها، کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۳ (۲)

-۴ (۱)

سراسری - ریاضی - ۱۴۰۰

۹۱) فرض کنید برد تابع $f(x) = 2^{\sqrt{9 \cos^2(x)-1}} - 2^{\sqrt{1-9 \cos^2(x)}}$ به صورت $[a, b]$ باشد. مقدار $b-a$ ، کدام است؟

$\frac{21}{4}$ (۴)

$\frac{9}{2}$ (۳)

$\frac{15}{4}$ (۲)

$\frac{9}{4}$ (۱)

سراسری - ریاضی - ۱۴۰۰

۹۲) فرض کنید A مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $(1 + \cos(2\alpha))(1 + \cos(4\alpha))(1 + \cos(8\alpha)) = \frac{1}{8}$ ، در بازه‌ی $[0, \pi]$ باشد. ماکزیمم عضو مجموعه‌ی A ، کدام است؟

$\frac{8}{9}\pi$ (۴)

$\frac{7}{9}\pi$ (۳)

$\frac{6}{7}\pi$ (۲)

$\frac{5}{7}\pi$ (۱)

سراسری - ریاضی - ۱۴۰۰

۹۳) اگر $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$ ، کدام است؟

$\frac{91}{10.5}$ (۴)

$\frac{16}{10.5}$ (۳)

$-\frac{16}{10.5}$ (۲)

$-\frac{91}{10.5}$ (۱)

سراسری - ریاضی - ۱۴۰۰



۹۴ جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2x$ کدام است؟

- ۱ $x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
- ۲ $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
- ۳ $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, K \in \mathbb{Z}$
- ۴ $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}, K \in \mathbb{Z}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۵ ابتدا قرینه‌ی نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی، کدام است؟

- ۱ ۰، ۲
- ۲ ۱، -۱
- ۳ ۱، -۱
- ۴ ۱، -۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۶ به ازای یک مقدار a ، چندجمله‌ای $P(x) = 2x^3 + ax^2 + 2x - 3$ بر $x - 1$ بخش‌پذیر است. در این حالت باقی‌مانده‌ی $P(x)$ بر $x + 2$ ، کدام است؟

- ۱ -۱۰
- ۲ -۸
- ۳ ۴
- ۴ ۶

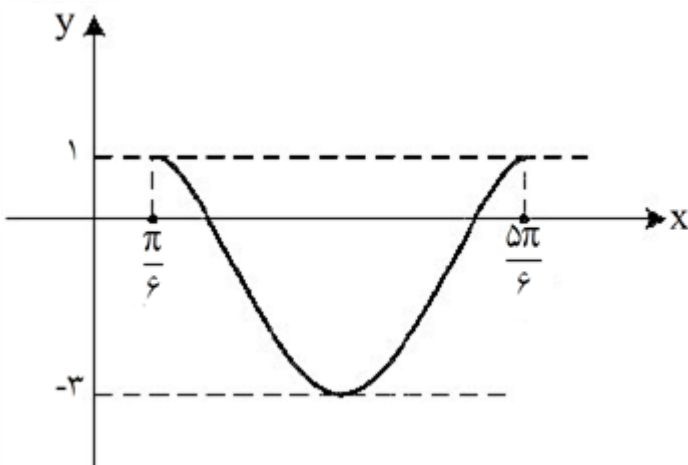
کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۹۷ تعداد جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $4 \sin(2x) \cos(2x) = 1$ ، در بازه‌ی $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ، کدام است؟

- ۱ ۲
- ۲ ۳
- ۳ ۴
- ۴ ۵

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۹۸ شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ ، در یک بازه‌ی تناوب است. مقادیر b و c ، کدام‌اند؟



- ۱ $b = 3, c = -1$
- ۲ $b = 3, c = -2$
- ۳ $b = \frac{3}{2}, c = -2$
- ۴ $b = \frac{3}{2}, c = -1$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی



۹۹ در بازه‌ی (a, b) ، نمودار تابع $y = (x - 1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y = 4x^2$ است. بیش‌ترین مقدار $b - a$ ، کدام است؟

۴ $\frac{5}{2}$

۳ ۲

۲ $\frac{3}{2}$

۱ ۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۰۰ نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 - 2x$ ($x > 1$)، مفروض است. قرینه‌ی نمودار آن نسبت به محور x ها را، ۱۶ واحد در امتداد محور y ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۴ $2\sqrt{5}$

۳ $5\sqrt{2}$

۲ $6\sqrt{2}$

۱ $4\sqrt{5}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۰۱ فرض کنید باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - 4$ و $x + 2$ ، به‌ترتیب ۳ و ۱ باشند. باقی‌مانده‌ی تقسیم $p(x^2) + 4p(-x)$ بر $x - 2$ ، کدام است؟

۴ -۱

۳ ۰

۲ ۱

۱ ۷

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۰۲ مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\tan(3x) \tan(x) = 1$ ، در بازه‌ی $[\pi, 2\pi]$ ، کدام است؟

۴ $\frac{11\pi}{2}$

۳ $\frac{9\pi}{2}$

۲ 6π

۱ 5π

سراسری-ریاضی-۹۹

۱۰۳ باقی‌مانده‌ی تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x - 1$ و $2x + 1$ ، به‌ترتیب ۸ و ۵ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $2x^2 - x - 1$ ، کدام است؟

۴ $2x - 3$

۳ $2x + 6$

۲ $x + 3$

۱ $-x + 4$

سراسری-ریاضی-۹۹

۱۰۴ جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ، با شرط $x \neq k\pi$ ، که در آن k یک عدد صحیح است، کدام است؟

۴ $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$

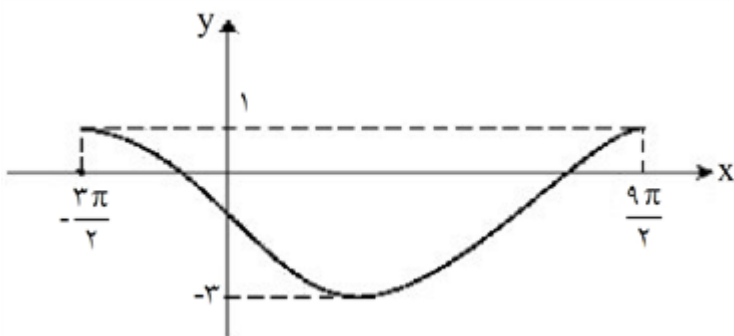
۳ $\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$

۲ $\frac{2k\pi}{3}$

۱ $\frac{k\pi}{3}$

سراسری-تجربی-۹۹

۱۰۵ شکل زیر، نمودار تابع $y = a \sin(bx) + c$ را در یک بازه‌ی تناوب، نشان می‌دهد. نسبت $\frac{a}{b}$ ، کدام است؟



۴ -۶

۳ -۴

۲ -۳

۱ -۲

سراسری-تجربی-۹۹



۱۰۶ فرض کنید چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^2 - 1$ بخش‌پذیر باشد. اگر $Q(x) = p(x-1) + p(1-x)$ ، آن‌گاه باقیمانده تقسیم $Q(x)$ بر $x-2$ کدام است؟

- ۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

سراسری-تجربی-۹۹

۱۰۷ مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

- ۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) 3π ۳) $\frac{7\pi}{2}$ ۴) 4π

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۰۸ دوره‌ی تناوب تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \operatorname{tg}(\pi x) - \operatorname{Cotg}(\pi x)$ ، کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) π

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۰۹ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط $\cos x \neq 0$ ، کدام است؟

- ۱) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ۳) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ ۴) $k\pi + \frac{\pi}{4}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۱۰ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x+1| - |x-2|$ در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

- ۱) $(-\infty, 2)$ ۲) $(-1, +\infty)$ ۳) $(-1, 2)$ ۴) $(2, +\infty)$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۱۱ مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $4 \sin x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

- ۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) 3π ۳) 4π ۴) 5π

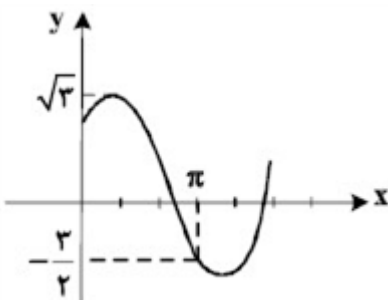
سراسری-تجربی-۹۸

۱۱۲ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x+2| + |x-1|$ در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

- ۱) $(-\infty, -2)$ ۲) $(-\infty, 1)$ ۳) $(-2, 1)$ ۴) $(1, +\infty)$

سراسری-تجربی-۹۸

۱۱۳ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ است. b کدام است؟



- ۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

سراسری-تجربی-۹۸



۱۱۴) مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

۴ 2π

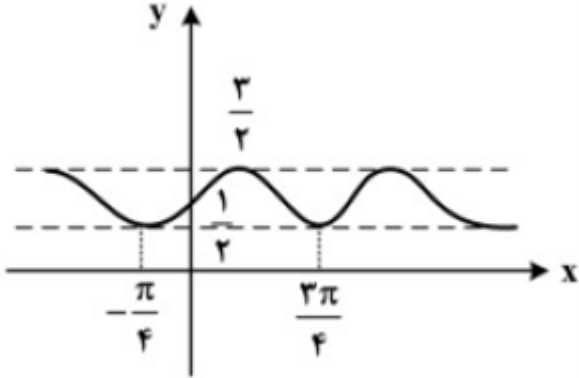
۳ 2π

۲ $\frac{7\pi}{2}$

۱ $\frac{5\pi}{2}$

سراسری-ریاضی-۹۸

۱۱۵) شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = 1 + a \sin bx \cos bx$ است. $a + b$ کدام است؟



۴ ۳

۳ ۲

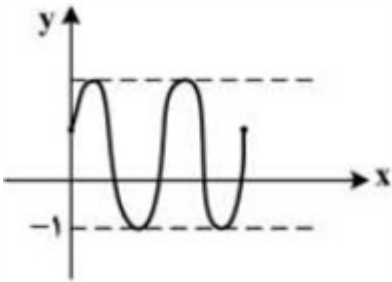
۲ $\frac{3}{2}$

۱ ۱

سراسری-ریاضی-۹۸

۱۱۶) شکل زیر نمودار تابع $y = 1 + a \sin(b\pi x)$ در بازه $(0, \frac{4}{3})$ است.

$a + b$ کدام است؟



۴ ۶

۳ ۵

۲ ۴

۱ ۳

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-ریاضی

۱۱۷) قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیم‌ساز ناحیه‌ی اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

۴ $1/5$

۳ ۱

۲ $0/5$

۱ -۲

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی

۱۱۸) در تقسیم عبارت $4x^3 - 19x + 12$ بر دو جمله‌ای $2x - 3$ ، مجموع ضرایب چند جمله‌ای خارج‌قسمت، کدام است؟

۴ ۲

۳ ۱

۲ صفر

۱ -۱

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-انسانی

۱۱۹) مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ کدام است؟

۴ 5π

۳ $\frac{9\pi}{2}$

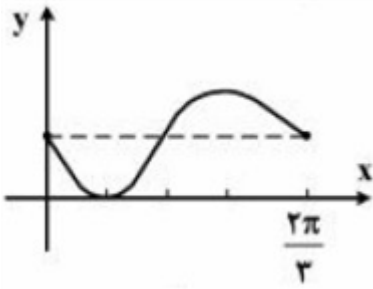
۲ 4π

۱ $\frac{14\pi}{3}$

کنکورهای خارج از کشور-سراسری-تجربی



۱۲۰ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - \sin mx$ است. مقدار تابع در نقطه‌ی $x = \frac{7\pi}{6}$ ، کدام است؟



۲ (۴)

۱ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

صفر (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۲۱ به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع $y = (1-a)x^2 + 2\sqrt{x} - a$ ، همواره بالای محور x ها است؟

$-2 < a < 1$ (۴)

$a > 3$ (۳)

$a < -2$ (۲)

$a < 1$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۲۲ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$ ، کدام است؟

$2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴)

$2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۳)

$k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۲)

$k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۲۳ مجموع جواب‌های معادله‌ی مثلثاتی $\sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{8}\right) = 1$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ برابر کدام است؟

$\frac{7\pi}{4}$ (۴)

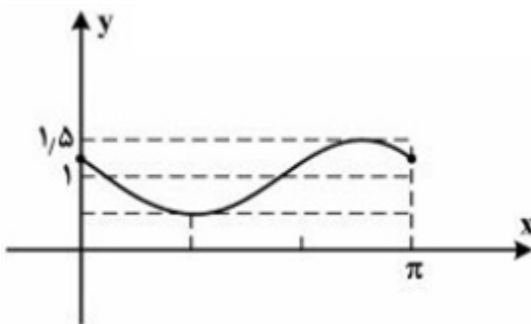
$\frac{3\pi}{2}$ (۳)

$\frac{5\pi}{4}$ (۲)

$\frac{3\pi}{4}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۲۴ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = 1 + a \sin\left(bx - \frac{\pi}{6}\right)$ است. $a + b$ کدام است؟



۲ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

۱ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۲۵ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x$ ، به کدام صورت است؟

$\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$ (۴)

$\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}$ (۳)

$\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$ (۲)

$\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی



۱۲۶ جواب کلی معادلهی مثلثاتی $\cos 3x + \cos x = 0$ ، با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟

۴ $k\pi + \frac{\pi}{4}$

۳ $k\pi - \frac{\pi}{4}$

۲ $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

۱ $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۲۷ به ازای کدام مقادیر a ، معادلهی $x^2 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4$ دارای سه ریشهی حقیقی متمایز مثبت است؟

۴ $(4, \infty)$

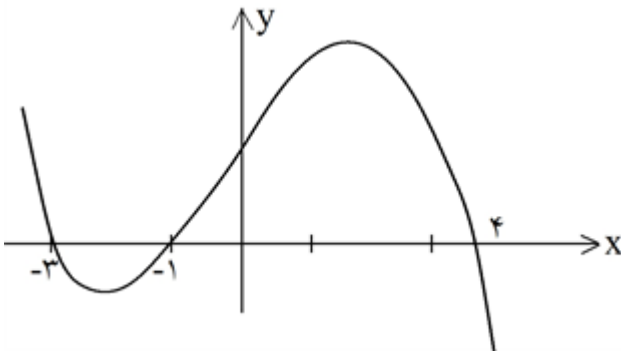
۳ $(-\infty, 4)$

۲ $(-\infty, -4)$

۱ $(-\infty, -4) - \{-5\}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۲۸ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x-2)$ است. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $\sqrt{xf(x)}$ ، کدام است؟



۴ $[-5, -3] \cup [0, 2]$

۳ $[-5, -3] \cup [-1, 2]$

۲ $[-3, 1] \cup [0, 2]$

۱ $[-1, 1] \cup [0, 6]$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۲۹ جواب کلی معادلهی مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = 1$ ، به کدام صورت است؟

۴ $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

۳ $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$

۲ $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

۱ $k\pi + \frac{\pi}{4}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۳۰ به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیم‌ساز ناحیه‌ی اول محورهای مختصات، مماس است؟

۴ ۱۲

۳ $12, -4$

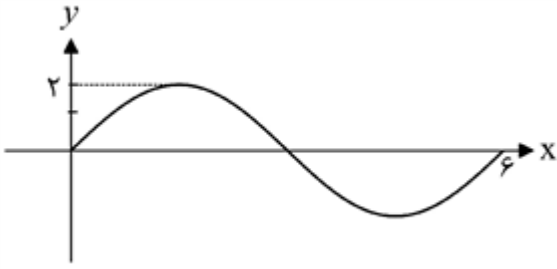
۲ $-12, 4$

۱ -4

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی



۱۳۱ شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟



$\frac{8}{3}$ (۴)

$\frac{7}{4}$ (۳)

$\frac{5}{4}$ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۳۲ نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف x ‌های مثبت انتقال دهیم، تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ها غیر منفی باشد؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱/۵ (۲)

۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۳۳ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin 4x \cos 2x = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ کدام است؟

$\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$ (۴)

$\frac{k\pi}{3} - \frac{\pi}{12}$ (۳)

$\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{12}$ (۲)

$\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{12}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۳۴ در تقسیم عبارت $(3x^2 - 8x^2 + 7x + 3)$ بر دو جمله‌ای $3x - 2$ ، مقدار چند جمله‌ای خارج قسمت، به ازای $x = -1$ ، کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - انسانی

۱۳۵ معادله‌ی $\cos^3 x + 3 \cos x = 4$ ، چند جواب در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ دارد؟

۲ (۴)

۴ (۳)

صفر (۲)

۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - آزاد - تجربی

۱۳۶ کدام گزینه ریشه‌ی معادله‌ی $\sin x \cos 6x = 1 - \sin 6x \cos x$ می باشد؟

$\frac{\pi}{6}$ (۴)

$\frac{\pi}{3}$ (۳)

$\frac{5\pi}{14}$ (۲)

$\frac{3\pi}{4}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - آزاد - تجربی

۱۳۷ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 3x \sin(3\pi - x) - \sin 3x \cos(\pi + x) = \cos \frac{3\pi}{2}$ کدام است؟

$k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ (۴)

$k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۳)

$\frac{k\pi}{2}$ (۲)

$\frac{k\pi}{4}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی



۱۳۸ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos^2 x = 1 + \tan x$ به کدام صورت است؟

۴ $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

۳ $2k\pi - \frac{\pi}{4}$

۲ $k\pi + \frac{\pi}{4}$

۱ $k\pi - \frac{\pi}{4}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۳۹ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos^2 x + 3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 = 0$ به کدام صورت است؟

۴ $(2k+1)\pi$

۳ $\frac{k\pi}{2}$

۲ $2k\pi$

۱ $k\pi$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۴۰ باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x(x+1)(x+2)(x+3)$ برابر $3x^2 + 5x + 1$ است و باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $(x+1)(x+2)$ برابر $ax + b$ است آن‌گاه:

۴ $a - b = -45$

۳ $a - b = 45$

۲ $a - b = 7$

۱ $a - b = -7$

کنکورهای خارج از کشور - آزاد - ریاضی

۱۴۱ باقی‌مانده تقسیم $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + x + 1) + x^3 - x + 2$ بر $x^2 + 1$ چه قدر است؟

۴ $x + 2$

۳ $-2x + 2$

۲ $-x + 2$

۱ 2

کنکورهای خارج از کشور - آزاد - ریاضی

۱۴۲ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $2 \cos 2x = \cot x (4 \sin x + \tan x)$ ، کدام است؟

۴ $2k\pi \pm \frac{2\pi}{6}$

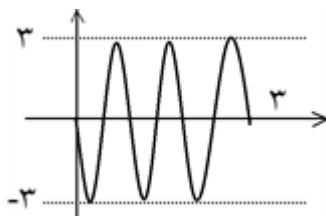
۳ $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$

۲ $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۱ $k\pi - \frac{\pi}{3}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۴۳ شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. a, b کدام است؟



۴ $\frac{1}{6}$

۳ $\frac{4}{5}$

۲ $-\frac{3}{4}$

۱ $-\frac{1}{6}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۴۴ به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$ محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟

۴ $-3 < a < 0$

۳ $a > -1$

۲ $a < -3$

۱ $a < -9$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۴۵ جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ ، به کدام صورت است؟

۴ $k\pi - \frac{\pi}{6}$

۳ $k\pi + \frac{\pi}{6}$

۲ $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

۱ $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی



۱۴۶) نمودار تابع $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$ ، روی بازه $\left[-\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ در چند نقطه محور x ها را قطع می‌کند؟

۵ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۴۷) جواب کلی معادلهی مثلثاتی $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos \frac{4\pi}{3} (\sin x - \tan x)$ کدام است؟

$2k\pi - \frac{\pi}{6}$ (۴)

$2k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۳)

$k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۲)

$k\pi - \frac{\pi}{6}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۴۸) در تقسیم $(4x^3 + 8x^2 - 11x) \div (2x - 1)$ ، مقدار چند جمله‌ای خارج قسمت به ازای $x = \frac{1}{2}$ کدام است؟

۱ (۴)

صفر (۳)

-۱ (۲)

-۳ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - انسانی

۱۴۹) نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، محور x ها را در نقطه‌ای به طول یک و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض -۶ قطع کرده و از نقطه $(-2, -6)$ می‌گذرد، $f(-1)$ کدام است؟

-۴ (۴)

-۵ (۳)

-۷ (۲)

-۸ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۵۰) جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ ، به کدام صورت است؟

$k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ (۴)

$2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (۳)

$k\pi + \frac{\pi}{3}$ (۲)

$k\pi - \frac{\pi}{3}$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - تجربی

۱۵۱) اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + m$ ، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، طول‌های دو نقطه تلاقی دیگر آن با محور x ها کدام است؟

$-\frac{1}{2}$ و ۳ (۴)

$-\frac{3}{2}$ و ۱ (۳)

$-\frac{1}{2}$ و ۱ (۲)

$-\frac{1}{2}$ و ۱ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۵۲) به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، هر نقطه از نمودار تابع $f(x) = (a-1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$ ، در بالای محور x ها است؟

$1 < a < 2$ (۴)

$a > 2$ (۳)

$a > 1$ (۲)

$a < -1$ (۱)

کنکورهای خارج از کشور - سراسری - ریاضی

۱۵۳) مجموع جواب‌های متمایز معادله $\sin 3x = \cos^2 x - \sin^2 x$ در بازه $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ کدام است؟

π (۴)

$\frac{7\pi}{10}$ (۳)

$\frac{3\pi}{5}$ (۲)

$\frac{4\pi}{5}$ (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

۱۵۴) تابع $f(x) = \frac{1}{2 \sin x \cos x - \frac{1}{2}}$ در چند نقطه از بازه $[0, 2\pi]$ تعریف نمی‌شود؟

۴ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

۳ (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲



۱۵۵ اگر بیشترین مقدار و دوره تناوب تابع $f(x) = a \sin bx$ به ترتیب ۲ و $\frac{\pi}{3}$ باشد، بیشترین مقدار $a + b$ کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۵۶ اگر تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ بر تابع $g(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ بخش پذیر باشد، باقی مانده $f(x)$ بر $x + 2$ کدام است؟

-۶۰ (۴)

-۵۰ (۳)

۵۰ (۲)

۶۰ (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۵۷ نمودار تابع $f(x) = 4x + 8 - (x + 2)^2$ را در امتداد محور x ها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می دهیم. منحنی حاصل با تابع $g(x) = -5x^2$ در چند نقطه متقاطع است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۵۸ در صورتی که نقطه $A(-1, 10)$ روی تابع $y = f(2x - 1)$ قرار داشته باشد، نقطه متناظر با A که روی تابع

$$g(x) = \sqrt{\frac{x + f\left(\frac{x}{2}\right)}{x + 7}}$$
 قرار دارد، کدام است؟

$(-6, -2)$ (۴)

$(-6, 2)$ (۳)

$(-2, 6)$ (۲)

$(2, -6)$ (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۵۹ جواب کلی معادله $\frac{\cotg 2x + \tan 2x}{\cotg 2x - \tan 2x} = 4 \sin 4x \cos 8x$ کدام است؟

$\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{16}$ (۴)

$\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$ (۳)

$\frac{k\pi}{8} - \frac{\pi}{32}$ (۲)

$\frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{32}$ (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۶۰ معادله $\frac{2 \sin^2 2x + \sin 2x - 1}{\sin x + \cos x} = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ دارای چند جواب است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

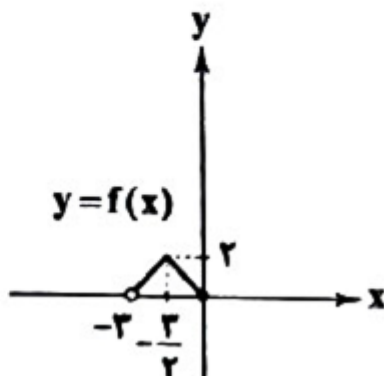
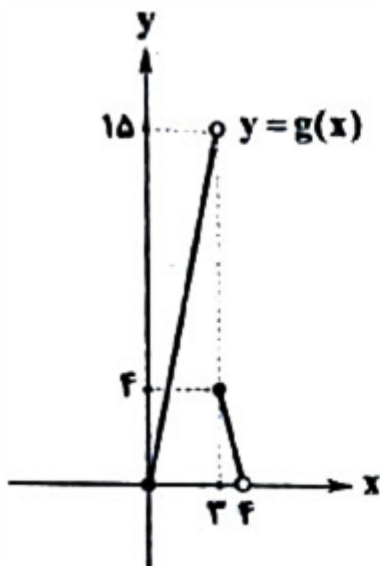
۴ (۲)

۲ (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳



۱۶۱ شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ را در یک دوره تناوب از آن‌ها نمایش می‌دهد. مقدار $f(f(26))$ کدام است؟



$\frac{5}{3}$ (۴)

$\frac{4}{3}$ (۳)

۱ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

۱۶۲ اگر $g(x) = \log_x x$ و $(fog)(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ باشد، باقی‌مانده تقسیم تابع $(f \circ f)(x+1)$ بر $x-1$ کدام است؟

$\frac{17}{7}$ (۴)

$\frac{15}{7}$ (۳)

صفر (۲)

-۱ (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

۱۶۳ تابع $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 - 3x - 2a + 4 & x \leq 1 \\ -ax^2 + 4x - 2 & x > 1 \end{cases}$ اکیداً نزولی است. حدود a کدام است؟

$a \in \emptyset$ (۴)

$0 < a \leq 1$ (۳)

$\frac{1}{2} \leq a < \frac{3}{2}$ (۲)

$\frac{1}{2} < a \leq \frac{3}{2}$ (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

۱۶۴ نمودار تابع $f(x) = |x^2 - 2|x||$ را ابتدا نسبت به محور x ها قرینه کرده، سپس در راستای محور x ها، ۲ برابر منبسط می‌کنیم و در آخر، نمودار حاصل را ۲ واحد به راست منتقل می‌کنیم. اگر نمودار حاصل در بازه‌های $[0, \alpha]$ و $[4, \beta]$ اکیداً صعودی باشد، بیشترین مقدار $\alpha + \beta$ کدام است؟

۷ (۴)

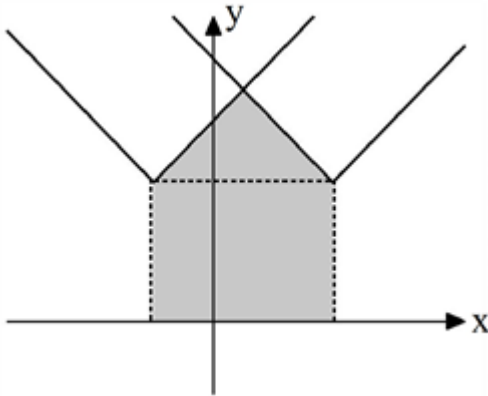
۸ (۳)

۹ (۲)

۱۰ (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

۱۶۵ نمودار $y = |x - a| + 3$ را یک بار a واحد به سمت راست و یک بار هم $2a$ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم. اگر آن‌ها را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم، شکل مقابل حاصل می‌شود. اگر مساحت قسمت رنگی برابر ۱۶ باشد، مقدار a کدام است؟



۴ $\frac{8}{3}$

۳ $\frac{4}{3}$

۲ ۱

۱ $\frac{2}{3}$

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۶۶ معادلهٔ مثلثاتی مقابل را حل کنید. $2 \sin^2 x = 3 \cos x$

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۶۷ دورهٔ تناوب تابع $y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ را محاسبه کنید.

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۶۸ چندجمله‌ای $x^6 - 1$ را برحسب عامل $x - 1$ تجزیه کنید.

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۶۹ جاهای خالی را با کلمهٔ مناسب کامل کنید.

(الف) اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = kf(x)$ از نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود. (انبساط عمودی - انقباض افقی)
(ب) اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید. (انقباض افقی - انقباض عمودی)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۷۰ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید و مشخص کنید آیا این تابع اکیداً یکنوا است؟

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۷۱ نمودار تابع $f(x) = |2x + x^2|$ را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است.

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۷۲ اگر باقی‌ماندهٔ چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + 2x^2 - ax + b$ بر $x - 1$ و $x - 2$ به ترتیب برابر ۳ و -۵ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۷۳ ابتدا نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را رسم و سپس به کمک آن نمودار تابع $y = \sqrt{\frac{-x}{2}}$ را رسم کنید.

۱۷۴ چند جمله‌ای $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 8$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا $f(x)$ بر $(x - 1)$ بخش پذیر است؟ چرا؟
ب) با انجام تقسیم، درستی ادعای خود را بررسی کنید.
پ) $f(x)$ را به صورت حاصل ضرب عامل‌هایش بنویسید.

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۷۵ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $4 \sin^2 x - 1 = 0$ ب) $\cos 2x = \cos 3x$

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۷۶ دوره تناوب، ماکزیمم و مینیمم هریک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = 5 + 2 \cos \frac{\pi}{4} x$ ب) $y = 3 \sin \left(-\frac{1}{2} x + \frac{\pi}{4} \right) - 1$

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۷۷ تابع $f(x) = 2x + 1$ است.

الف) اگر دامنه تابع $f(x)$ برابر $[-3, 5]$ باشد، دامنه تابع $f(2x)$ را مشخص کنید.
ب) نمودار تابع $f(-x)$ را رسم کنید.

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۷۸ به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

الف) تابع روبه‌رو را رسم کنید.
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x < -3 \\ -1 & -3 \leq x \leq 1 \\ -2x + 5 & x > 1 \end{cases}$$

ب) بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید.

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۷۹ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

- تابعی اکیداً صعودی وجود دارد که یک به یک نباشد.

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۸۰ قرینه نمودار تابع $f(x) = \frac{4x - 1}{x + 1}$ نسبت به خط $y = x$ را دو واحد به سمت y ‌های مثبت انتقال می‌دهیم و آن را $g(x)$ می‌نامیم. $g(x + 4)$ کدام است؟

۱) $1 + \frac{5}{x}$ ۲) $1 + \frac{4}{x}$ ۳) $1 - \frac{5}{x}$ ۴) $1 - \frac{4}{x}$

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۸۱ تابع $f(x) = |x| \left| \frac{1}{3} x^2 + x + 1 \right|$ در بازه $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار a کدام است؟

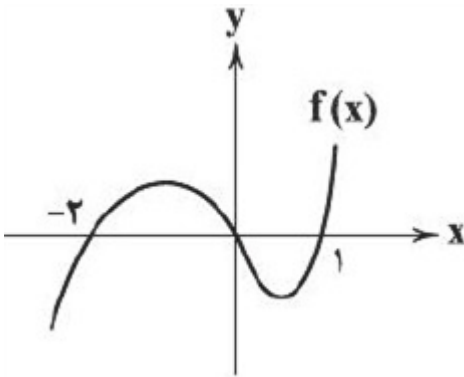
۱) -۱ ۲) -۲ ۳) صفر ۴) ۱

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۸۲ نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. دامنهٔ تابع

$$g(x) = \frac{\sqrt{f(x)f(x+1)}}{\sqrt{-x-1}}$$

کدام است؟



- (۱) $[-4, -1]$ (۲) $(-\infty, -1)$ (۳) $[-3, -1]$ (۴) $(-\infty, -3] \cup [-2, -1)$

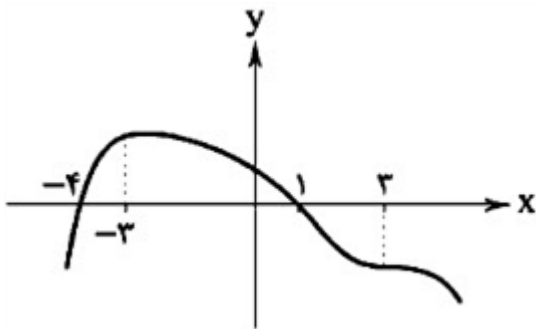
سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۸۳ اگر $f(x) = x^2 + 3x - k + 1$ باشد و تابع $(f \circ f)(x)$ بر $x - 1$ بخش پذیر باشد، حاصل ضرب مقادیر قابل قبول برای k کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۳۲ (۳) ۳۹ (۴) ۴۱

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۸۴ اگر نمودار تابع چند جمله‌ای $y = 2f\left(3 - \frac{3x}{4}\right)$ به شکل مقابل باشد، چندجمله‌ای $-3f(3 - 2x)$ بر کدام عبارت بخش پذیر است؟



- (۱) $16x^2 + 18x - 9$ (۲) $16x^2 - 18x + 9$ (۳) $18x^2 + 16x + 9$ (۴) $18x^2 - 16x + 9$

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۸۵ باقی ماندهٔ تقسیم $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6) + 20$ بر عبارت $(x-8)(x+1) + 10$ کدام است؟

- (۱) ۴۰۰ (۲) ۳۸۰ (۳) ۳۴۰ (۴) ۳۲۰

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۸۶ اگر باقی ماندهٔ تقسیم $2x^{18} + m$ بر $x^2 + 1$ برابر ۴ باشد، باقی ماندهٔ تقسیم خارج قسمت این تقسیم بر $x + 1$ چقدر است؟

- (۱) -۹ (۲) -۱۲ (۳) ۹ (۴) ۱۲

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳



۱۸۷

باقی‌مانده تقسیم تابع چندجمله‌ای درجه سوم $f(x)$ بر $x^3 + x$ برابر ۳ می‌باشد. اگر تابع $1 - (x-2)f^{-1}(x-9)$ بر $x-9$ بخش‌پذیر باشد، نمودار تابع $y = f(x) + 2x - 6x^2$ از کدام ناحیه محورها مختصات نمی‌گذرد؟

۱ چهارم

۲ سوم

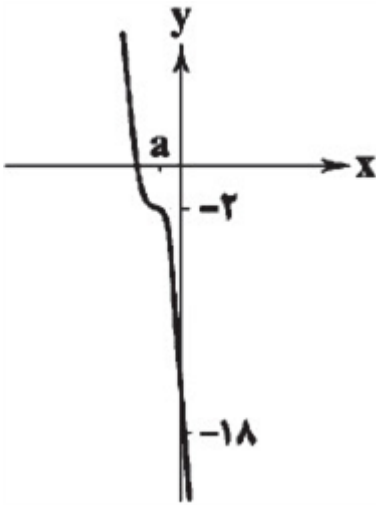
۳ دوم

۴ اول

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۸۸

اگر نمودار تابع $f(x) = -2x^3 - 3mx^2 + 4nx - 2k$ به صورت زیر باشد، مقدار $m + n + k$ کدام است؟



۱ ۱

۲ ۵

۳ ۷

۴ ۹

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۸۹

اگر تابع $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 - 3x & x \leq a \\ -x^2 + 2x - 2 & x > a \end{cases}$ اکیداً یکنوا باشد، حدود a کدام است؟

۱ $[1, +\infty)$ ۲ $(-\infty, 2]$ ۳ $[1, 2]$ ۴ $[2, +\infty)$

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۹۰

اگر $f(x)$ اکیداً صعودی و $g(x) = f(-x) - f(x)$ باشد و دامنه تابع $h(x) = \sqrt{g^{-1}(|2x-1|)} - g^{-1}(|x+1|)$ به صورت $D_h = [a, b]$ باشد، حداکثر مقدار $b - a$ کدام است؟

۱ ۱

۲ ۲

۳ ۳

۴ ۴

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۹۱

اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & , x \geq -2 \\ -\sqrt{-2-x} + k & , x < -2 \end{cases}$ اکیداً صعودی باشد، حداکثر مقدار k کدام است؟

۱ -۴

۲ ۴

۳ -۳

۴ ۳

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۹۲

نمودار تابع $f(x) = |x| - |x-2|$ در بازه $[-1, 3]$ چگونه است؟

۱ غیریکنوا

۲ اکیداً نزولی

۳ اکیداً صعودی

۴ صعودی

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۹۳

نمودار تابع $f(x) = |\log(x-1)|$ در بازه $(a, b]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار $b - a$ کدام است؟

۱ $\frac{5}{2}$ ۲ $\frac{3}{2}$

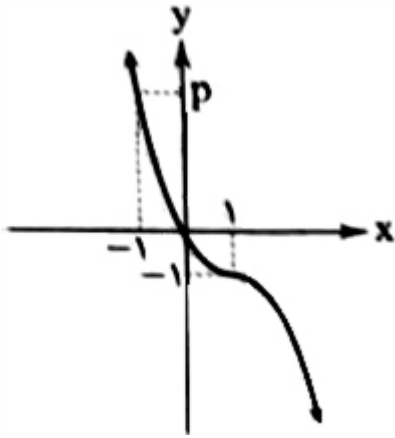
۳ ۲

۴ ۱

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳



۱۹۴ تابع مقابل از انتقال و قرینه تابع x^3 به دست آمده است. مقدار p کدام است؟



۸ (۴)

۵ (۳)

۶ (۲)

۷ (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۹۵ نقطه بر خورد نمودار تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 4$ با محور x ها، در کدام بازه قرار دارد؟

(-۲, ۰) (۴)

(-۱, ۰) (۳)

(۳, ۴) (۲)

(۱, ۳) (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۹۶ دو تابع $f(x) = (k^x + 1)x^x$ و $g(x) = \frac{k-1}{2-k}x^x$ از نظر یکنوایی مانند یکدیگرند. محدوده k کدام است؟

(۲, $+\infty$) (۴)

($-\infty$, ۲) (۳)

(۱, ۲) (۲)

(۱, $+\infty$) (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۹۷ تابع $f(x) = x|x-2| - x^x$ در بازه $[k, +\infty)$ اکیداً نزولی است. حداقل مقدار k کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{1}{3}$ (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۹۸ تابع $f(x) = \text{Log} \frac{1}{x} + 2^{-x}$ چگونه تابعی است؟

صعودی (۴)

غیریکنوا (۳)

اکیداً نزولی (۲)

اکیداً صعودی (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۱۹۹ تابع $f(x) = |2x-1| + bx$ بازه هم صعودی، هم نزولی دارد. مقدار b و بازه موردنظر کدام می‌تواند باشد؟

$[0, +\infty)$, $b = 2$ (۲)

$\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, $b = 2$ (۱)

$\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$, $b = -2$ (۴)

$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$, $b = -2$ (۳)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۰۰ اگر f یک تابع خطی با شیب منفی باشد، جواب نامعادله $f\left(\frac{1}{4-x}\right) < f(1)$ کدام است؟

(۴, ۵) (۴)

(۳, ۴) (۳)

(۱, ۴) (۲)

(۴, $+\infty$) (۱)

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳



۲۰۱) کدام تابع اکیداً صعودی است؟

$$g(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \quad (۲)$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 1 \quad (۱)$$

$$m(x) = \frac{-1}{x} \quad (۴)$$

$$h(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x} \quad (۳)$$

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۰۲) در صورتی که دامنه $g(x) = f(3x - 1)$ به صورت $[-1, 4]$ باشد، دامنه تابع $h(x) = f\left(\frac{x}{2} + 1\right)$ کدام است؟

$$[-10, 20] \quad (۴) \quad \left[-\frac{5}{2}, 5\right] \quad (۳) \quad [-3, 24] \quad (۲) \quad \left[\frac{-3}{2}, 6\right] \quad (۱)$$

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۰۳) تابع $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ مفروض است. اگر f را یک واحد به سمت راست در راستای محور x ها انتقال دهیم، سپس طول نقاط را نصف کنیم و نمودار حاصل را یک واحد به پایین منتقل کرده و عرض نقاط را دو برابر کنیم. نمودار حاصل، نمودار f را در دو نقطه قطع می‌کند. فاصله دو نقطه کدام است؟

$$2\sqrt{5} \quad (۴) \quad \frac{3}{2}\sqrt{5} \quad (۳) \quad \sqrt{5} \quad (۲) \quad \frac{2}{3}\sqrt{5} \quad (۱)$$

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۰۴) خط $y = \frac{x}{2\pi}$ تابع $y = \cos x$ را در چند نقطه از بازه $\left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ قطع می‌کند؟

$$1 \quad (۴) \quad 2 \quad (۳) \quad 3 \quad (۲) \quad 4 \quad (۱)$$

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۰۵) دامنه تابع $f(x) = \frac{\tan 4x}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{8} - x\right)\left(x - \frac{5\pi}{8}\right)}}$ به صورت $(a, b) - \{c\}$ است، $a + b + c$ کدام است؟

$$3\pi \quad (۴) \quad \frac{7\pi}{8} \quad (۳) \quad \frac{9\pi}{8} \quad (۲) \quad 2\pi \quad (۱)$$

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۰۶) اگر تابع چندجمله‌ای $f(x) = x^3 - 4x^2 + cx + d$ محور x ها را در سه نقطه α, β و γ قطع کند به طوری که $\alpha\beta\gamma = -3$ و همچنین $f(1) = 5$ باشد، $c^2 + d^2$ کدام است؟

$$35 \quad (۴) \quad 34 \quad (۳) \quad 33 \quad (۲) \quad 32 \quad (۱)$$

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۰۷) تابع $f(x) = \left|\frac{x^2}{|x|} - 1\right|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

$$(+\infty, 0) \quad (۴) \quad \left(0, \frac{1}{2}\right) \quad (۳) \quad (-1, 0) \quad (۲) \quad (-\infty, 0) \quad (۱)$$

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳



۲۰۸ اگر پیوسته $f(x)$ در بازه $(-\infty, 1]$ اکیداً نزولی و در بازه $[1, +\infty)$ اکیداً صعودی و همچنین $f(-1) = f(3) = 0$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{f(x)f(x+3)}$ کدام است؟

(۲) $(-\infty, -3] \cup [-1, 0] \cup [3, +\infty)$

(۱) $(-\infty, -4] \cup (3, +\infty)$

(۴) $(-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$

(۳) $(-\infty, -4] \cup [-1, +\infty)$

سوالات گردآوری شده-سری (۲) سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۰۹ دوره تناوب تابع $f(x) = \frac{\tan^2 x \sin^2 x}{\tan^2 x - \sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{6}$ برابر $2k - \pi$ است. دوره تناوب تابع $g(x) = \sin\left(\frac{kx}{\pi}\right)$ کدام است؟

(۴) $\frac{\pi}{8}$

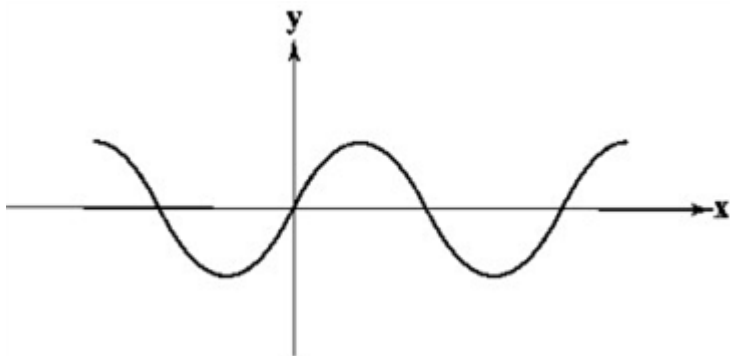
(۳) $\frac{\pi}{4}$

(۲) $\frac{3\pi}{8}$

(۱) $\frac{8\pi}{3}$

سوالات گردآوری شده-سری (۲) سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۱۰ اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{4-m} \sin(mx)$ به صورت شکل مقابل باشد، کدام m می‌تواند باشد؟



(۴) $\frac{3\pi}{2}$

(۳) π

(۲) $\frac{9}{2}$

(۱) 2π

سوالات گردآوری شده-سری (۲) سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۱۱ در تابع $f(x) = a + b \cos(4x - 1)$ اگر طول ماکزیمم برابر ۲ باشد، طول مینیمم تابع کدام می‌تواند باشد؟

(۴) $3 - \frac{\pi}{2}$

(۳) $2 - \frac{\pi}{4}$

(۲) -2

(۱) 3

سوالات گردآوری شده-سری (۲) سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۱۲ در صورتی که $g(x) = f(1 - 2x)$ را یک واحد به سمت راست منتقل کرده، سپس نسبت به محور y ها قرینه و در نهایت طول نقاط را دو برابر کنیم تا تابع $h(x)$ به دست آید، کدام است؟

(۴) $f\left(\frac{-11}{3}\right)$

(۳) $f\left(\frac{-10}{3}\right)$

(۲) $f\left(\frac{10}{3}\right)$

(۱) $f\left(\frac{11}{3}\right)$

سوالات گردآوری شده-سری (۲) سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۱۳ در وسیع‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = |x| + |x+2|$ اکیداً صعودی است، وارون آن کدام است؟

(۲) $\frac{x+2}{2}, x \geq 0$

(۱) $\frac{x-2}{2}, x \geq 2$

(۴) $2x+2, x \geq 0$

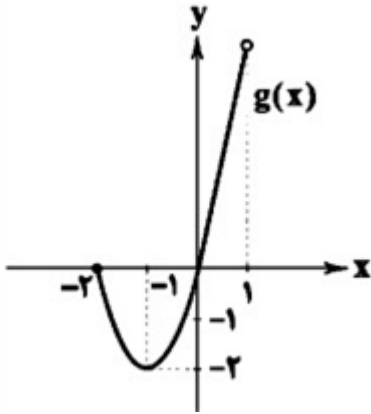
(۳) $\frac{x+2}{2}, x \geq 2$

سوالات گردآوری شده-سری (۲) سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳



۲۱۴

توابع $f(x)$ و $g(x)$ متناوب با دوره‌ی تناوب $T = 3$ می‌باشند که در بازه $[-2, 1]$ مقادیر خروجی تابع $f(x)$ از ضابطه‌ی $f(x) = x[x] + |x|$ و در این بازه تابع $g(x)$ قسمتی از یک سهمی به شکل مقابل است. مقدار $f(-21/5) + g(21/5)$ کدام است؟ (نماد جزء صحیح است.)



۳/۵ (۴)

۲/۵ (۳)

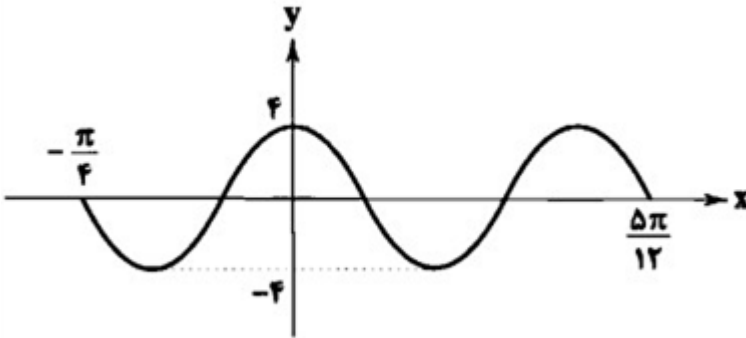
۱/۵ (۲)

۱ صفر

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۱۵

شکل زیر قسمتی از تابع $f(x) = \frac{a \sin\left(bx - \frac{\pi}{4}\right) - a \cos\left(bx - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}}$ می‌باشد. حاصل $a + b + c$ کدام می‌تواند باشد؟



-۱۵ (۴)

-۴ (۳)

۱۵ (۲)

۴ (۱)

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۱۶

اگر تابع $f(x) = -2 \tan\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$ در بازه $\left(-\frac{7\pi}{9}, 2m\pi\right)$ اکیداً نزولی باشد، حداکثر مقدار m کدام است؟

$-\frac{1}{6}$ (۴)

$-\frac{5}{6}$ (۳)

$-\frac{2}{9}$ (۲)

$-\frac{1}{9}$ (۱)

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۱۷

اگر دوره تناوب توابع $f(x) = \frac{\tan^3 x - \tan x}{\tan^2 x + 2 \tan^2 x + 1}$ و $g(x) = \frac{3}{\tan kx + \cot kx}$ با هم برابر باشند، حاصل ضرب مقادیر قابل قبول برای k کدام است؟

-۲۵ (۴)

-۱۶ (۳)

-۹ (۲)

-۴ (۱)

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۱۸

اگر $f(x)$ چندجمله‌ای درجه ۴ و $f(6) = 720$ باشد، در صورتی‌که $f(x)$ در رابطه‌ی $(x+2)f(x+2) = (x-2)f(x+2) = (x+2)f(x+1)$ صدق کند، باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 3x + 3$ کدام است؟

-۶ (۴)

۶ (۳)

$-x - 2$ (۲)

$x + 2$ (۱)

سوالات گردآوری شده-سری (۲)-سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳



۲۱۹ اگر $Q(x)$ خارج قسمت تقسیم $x^3 + 1$ بر $x^2 + 1$ باشد، باقی مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x^2 + 1$ کدام است؟

۴ -۱۲

۳ ۱۲

۲ -۶

۱ ۶

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۲۰ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} (2a-4)x^2 - 2 & x \leq 1 \\ ax^2 - 2x + 3 & x > 1 \end{cases}$ اکیداً صعودی باشد، اختلاف بزرگترین و کوچکترین عدد صحیح قابل قبول برای a کدام است؟

۴ ۷

۳ ۶

۲ ۵

۱ ۴

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۲۱ اگر تابع $f(x)$ اکیداً نزولی با دامنه R و $f(-1) = 0$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{(x^2 - x)(-x + 2)}{f(x + 2)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۴ بی شمار

۳ ۶

۲ ۴

۱ ۱

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۲۲ اگر مجموع جوابهای معادله $2f(2x-1) = 3g(-x+2)$ برابر عدد ۱۰ باشد در صورتی که این معادله دارای ۵ جواب باشد، مجموع جوابهای معادله $f(3x-2) = \frac{3}{2}g\left(\frac{-3x+5}{2}\right)$ کدام است؟

۴ ۵

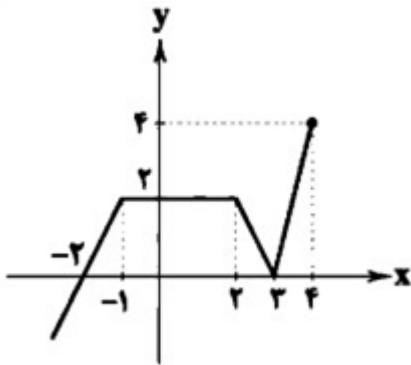
۳ $\frac{25}{3}$

۲ $\frac{10}{3}$

۱ $\frac{20}{3}$

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳

۲۲۳ اگر نمودار تابع $y = -2f(3x-1) - 1$ به شکل مقابل باشد، تابع $y = \frac{f(3-2x)-1}{5}$ در کدام بازه هم صعودی و هم نزولی است؟



۴ $[-1, \frac{7}{2}]$

۳ $[-4, \frac{7}{2}]$

۲ $[-1, 5]$

۱ $[-4, 5]$

سوالات گردآوری شده - سری (۲) - سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۳



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱

$$\begin{aligned} \cos 3x &= -\cos 2x \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm (\pi - 2x) \\ 3x = 2k\pi + \pi - 2x \Rightarrow x &= \frac{2k\pi + \pi}{5} \Rightarrow \begin{cases} k=0 & x = \frac{\pi}{5} \\ k=1 & x = \frac{3\pi}{5} \\ k=2 & x = \pi \end{cases} \\ 3x = 2k\pi - \pi + 2x \Rightarrow x &= 2k\pi - \pi \Rightarrow \begin{cases} k=1 & x = \pi \\ k=2 & x = 2\pi \end{cases} \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۲

$$(-1, 3m-2), (0, 10-m), (1, 4m+13), (2, 25)$$

$$3m-2 \leq 10-m \Rightarrow 4m \leq 12 \Rightarrow m \leq 3$$

$$10-m \leq 4m+13 \Rightarrow 5m \geq -3 \Rightarrow m \geq -0.6$$

$$4m+13 \leq 25 \Rightarrow 4m \leq 12 \Rightarrow m \leq 3$$

$$-0.6 \leq m \leq 3$$

$$\text{طبیعی } m=1 \quad m=2 \quad m=3$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۳

$$\begin{aligned} \tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \tan(-\pi + 2x) &= 0 \Rightarrow \tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \tan(2x) = 0 \Rightarrow \tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \tan(-2x) \\ \Rightarrow 3x - \frac{\pi}{3} &= k\pi - 2x \Rightarrow 5x = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{15} \Rightarrow x = \frac{\pi}{15}, \frac{3\pi}{15}, \frac{5\pi}{15}, \frac{7\pi}{15}, \frac{9\pi}{15}, \frac{11\pi}{15} \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۴

$$\begin{aligned} \alpha + 25^\circ &= x \Rightarrow y + x = 60^\circ \Rightarrow y = 60^\circ - x \\ 25^\circ - \alpha &= y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tan(y) = \tan(60^\circ - x) = \frac{\tan 60^\circ - \tan x}{1 + \tan 60^\circ \tan x} = \frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

$$\Rightarrow \tan(25^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{5} \Rightarrow \cot(25^\circ - \alpha) = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۵

$$\text{عبارت} = \frac{(2x-3)^2}{2(2x-3)^2} = \frac{2x-3}{2} = \frac{3+\sqrt{5}-3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} = 0.5\sqrt{5}$$

$$\tan 5\pi = \tan \pi = 0$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۶

$$\tan 3x = -\tan 2x \Rightarrow \tan 3x = \tan(-2x) \Rightarrow 3x = k\pi + (-2x) \Rightarrow 5x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{5}$$

$$k=0 \rightarrow x=0 \quad \times$$

$$k=1 \rightarrow x = \frac{\pi}{5} \quad \checkmark \quad k=2 \rightarrow x = \frac{2\pi}{5} \quad \checkmark$$

$$k=3 \rightarrow x = \frac{3\pi}{5} \quad \checkmark \quad k=4 \rightarrow x = \frac{4\pi}{5} \quad \checkmark$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۷

$$\left. \begin{aligned} a &= 18^\circ - \alpha \\ b &= \alpha + 12^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + b = 30^\circ \Rightarrow a = 30^\circ - b$$

$$\tan(a) = \tan(30^\circ - b) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{12}}{1 + \frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{13}$$

$$\cot(a) = \frac{13}{\sqrt{3}} = 13 \frac{\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3} \Rightarrow \cot(18^\circ - \alpha) = 5\sqrt{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۸

$$\frac{3(4x^2 + 12x^2 + 9x + 1)}{((2x+1)^2)^2} = \frac{3(2x+1)^2}{(2x+1)^2} = \frac{3}{2x+1}$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad \Delta = (1)^2 - 4(1)(-1) = 5 \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{ریشه مثبت} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{3}{2\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) + 1} = \frac{3}{-1 + \sqrt{5} + 1} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5} \sqrt{5} = 0.6\sqrt{5}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۹

$$\cos 2x = \sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \Rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}k + \frac{\pi}{8} \quad k \in \{0, 1, 2\} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + 2x \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{ندارد. } [0, \pi] \end{cases}$$

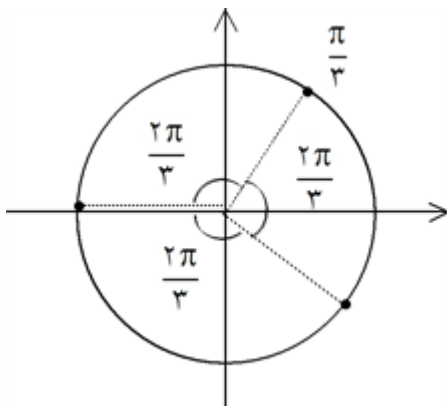
پس این معادله در فاصله $[0, \pi]$ دارای سه جواب $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{8}\right\}$ است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۰

$$10 > 3 > 2 > -5 \Rightarrow -10 \leq m - 2 \leq 2m + 3 \leq 4 - m \Rightarrow \begin{cases} -8 \leq m \\ -5 \leq m \\ m \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -5 \leq m \leq \frac{1}{3} \xrightarrow{Z} m = -5, -4, -3, -2, -1, 0$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۱



$$\cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow \cos 2x = -\cos x$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -1$$

$$\Rightarrow x = (2k+1)\pi \quad (1)$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$(1) \cup (2) \quad x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$\cos 2x = -\cos x \Rightarrow \cos 2x = \cos(\pi - x)$$

راه دوم:

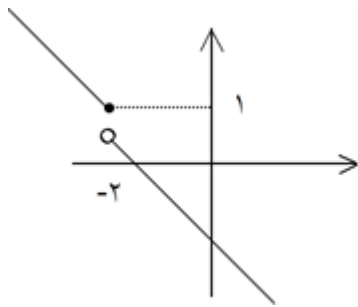
$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow x = 2k\pi - \pi \end{cases} \cup \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۲

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow r = f(-2) = -22 + 24 - 2a + 5 = 0 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -1/2$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۳



$$m \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} (5m - mx) = 5m + 2m \leq 1 \Rightarrow m \leq \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{7}$$

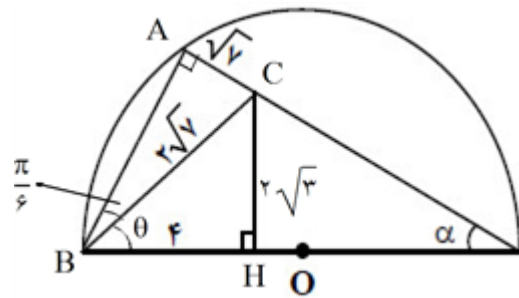
$$\Rightarrow a + b = \frac{1}{7}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۴

$$2 - \sqrt{2(x+1)} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} \sqrt{2x+2} - 2 \xrightarrow{+5} \sqrt{2x+2} + 2$$

$$\sqrt{2x+2} + 2 = \frac{9}{2} \Rightarrow 2x+2 = \frac{49}{4} \Rightarrow x = \frac{45}{8}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۵



$$\sin(\widehat{ABC}) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ABC} = \frac{\pi}{6}$$

$$CH = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 4^2} = \sqrt{12 - 16} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow \tan\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Rightarrow \cot \alpha = \tan\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \cot \alpha = \frac{\tan \theta + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \theta \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

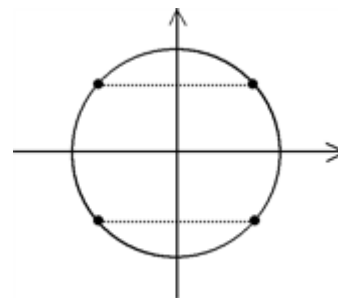
$$\Rightarrow \cot \alpha = \frac{\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 2 = \frac{3\sqrt{3}}{1} = \frac{5}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{1}{5\sqrt{3}}$$

$$T = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{4}}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دوره تناوب $3f(2x)$ - نصف دوره تناوب $f(x)$ است. ۱۶

۱۷

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$2(1 - \sin^2 x) = \sin x + 1 \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

۱۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از آنجا که برد دو تابع برابر است پس ضریب پشت $f(x)$ در هر دو تابع برابر است

$$k = 1$$

یعنی:

$$1 = a^2 - 2a + 2 \Rightarrow a^2 - 2a + 2 = 0 \Rightarrow p = 2$$

۱۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3} + x\right)$$

$$\begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi - \frac{5\pi}{6} - x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \\ x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} + x \Rightarrow \text{no solution} \end{cases}$$

$$\text{جمع} = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

۲۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \text{معادله ریشه ندارد}$$

$$(x+1)(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \\ x^2 = x - 1 \end{cases}$$

طرفین را در $x+1$ ضرب می‌کنیم.

$$P(x) = x^{10} - 5 = (x^2)^5 - 5 \Rightarrow 2(x) = (-1)^5(x-1) - 5 = -x + 1 - 5 \Rightarrow r(x) = -x - 4$$

$$(-1)(-4) = 4$$

۲۱

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$x_s = -\frac{v}{2a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{v}{2a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$$

$$y_s = 1\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{5}{4}$$

۲۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$K = 1 \Rightarrow 2a^2 - a - 5 = 1 \Rightarrow 2a^2 - a - 6 = 0$$

$$a \text{ حاصلضرب مقادیر} = -\frac{6}{2} = -3$$



۲۳

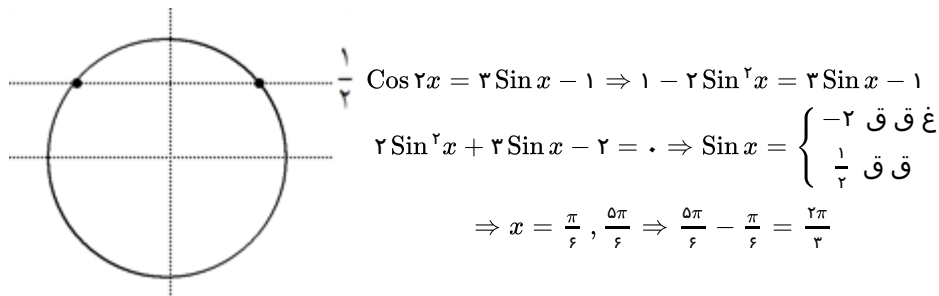
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{1}{3} - \sin \frac{2x}{a} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\left|\frac{2}{a}\right|} = |a|\pi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow |a| = \frac{1}{3}$$

$$y = \cos ax \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|a|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$$

۲۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



۲۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\underbrace{\cos(\pi - \alpha)}_{\alpha}$$

$$\Rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} - x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} + x \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

۲۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$2 - x^{12} = (x^2 + x + 1)Q(x) + r(x) \Rightarrow (x-1)(2 - x^{12}) = \underbrace{(x^2 - 1)}_{\cdot} Q(x) + (x-1)r(x)$$

$$\Rightarrow x^{12} = 1 \Rightarrow (x^6)^2 = 1 \Rightarrow x^{12} = x^6 \Rightarrow (x-1)(2 - x^6) = (x-1)r(x)$$

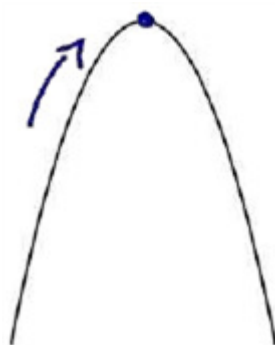
$$\Rightarrow \cancel{x^{12}}^{-1} + x^6 + 2x - 2 = (x-1)r(x) \Rightarrow \cancel{(x-1)}(x+2) = \cancel{(x-1)}r(x) \Rightarrow r(x) = (1)x + 2$$

۲۷

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{a}{1} = 2/5 \Rightarrow a = 25$$

$$y_s = y_{(2/5)} = -5 \times 6/25 + 25 \times 2/5 - 8 = 22/25$$



۲۸

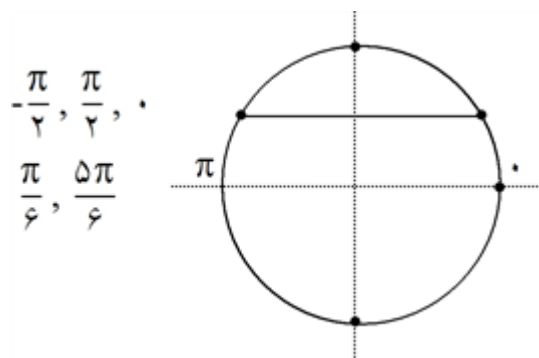
گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = 1 + \sin ax \xrightarrow{a < 0} T = \frac{2\pi}{|a|} = \pi \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = -2$$

$$y = 2 \cos\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{a}\right|} = |a|(2\pi) = 4\pi$$

۲۹

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$2 \sin x \cos x - 4 \sin^2 x \cos x = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos x (1 - 2 \sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2x (1 - 2 \sin x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \\ 1 - 2 \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

۳۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = (x-1)|x| = \begin{cases} x(x-1) & x \geq 0 \\ x(1-x) & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 0 \\ 1-2x & x < 0 \end{cases}$$

$$a+b = \frac{1}{2} \leftarrow a=0, b=\frac{1}{2}$$

تابع f در بازه $(0, \frac{1}{2})$ اکیداً نزولی است. بنابراین:

۳۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(1 - 2 \sin^2 x) + \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \pm 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

جواب‌های بازه $[-2\pi, \pi]$ عبارت‌اند از $-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ که مجموع آن‌ها برابر -2π است.

۳۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \Rightarrow -\tan(2x) = -\sin 2x \Rightarrow \tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan(2x) = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \\ 1 + \tan^2 2x = 2 \Rightarrow \tan 2x = \pm 1 \Rightarrow 2x = k\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ x_1 = -\frac{\pi}{8} \\ x_2 = \frac{\pi}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = x_2 - x_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} = \cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \cos 2\alpha \Rightarrow y = a \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r} \cos \left(\frac{\pi}{r} - 2bx \right) \right) + c$$

$$\Rightarrow y = -\frac{a}{r} \sin(2bx) + \left(\frac{a}{r} + c \right)$$

$$\left(-\frac{a}{r} \right) \cdot (2b) > \Rightarrow ab < 0$$

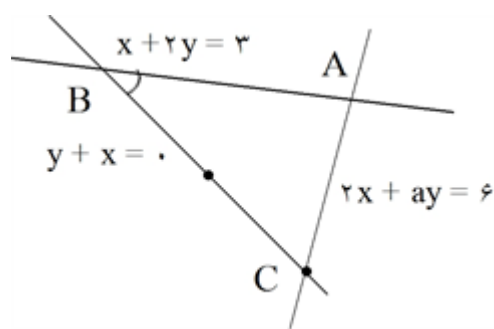
تابع در همسایگی صفر صعودی است. پس:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{r} + c = \frac{-2+1}{r} &\Rightarrow \frac{a}{r} + c = -\frac{1}{r} \\ \left| -\frac{a}{r} \right| = \frac{1-(-2)}{r} &\Rightarrow |a| = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a = 3, c = -2 \\ \text{یا} \\ a = -3, c = 1 \end{aligned}$$

$$\frac{2\pi}{|2b|} = \frac{10\pi}{r} - \left(\frac{-5\pi}{r} \right) \Rightarrow |b| = \frac{1}{5}$$

$$ab = -3 \times \frac{1}{5} = -0.6$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون مرکز دایره‌ای که از ۳ رأس A, B, C می‌گذرد روی ضلع BC قرار دارد پس مثلث در رأس A قائم‌الزاویه است.



$$m_{AB} \cdot m_{AC} = -1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{2}{a} \right) = -1 \Rightarrow a = -1$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y + x = 0 \\ 2x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(3, 0) \\ B(-3, 3) \\ C(2, -2) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} AB = \sqrt{3^2 + 9} = 3\sqrt{2} \\ AC = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(\widehat{B}) = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3} \\ \operatorname{tg}(\widehat{C}) = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg}(B - C) = \frac{\operatorname{tg} B - \operatorname{tg} C}{1 + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}$$

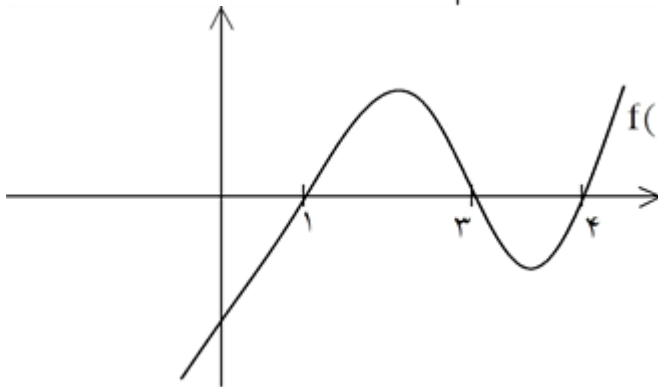
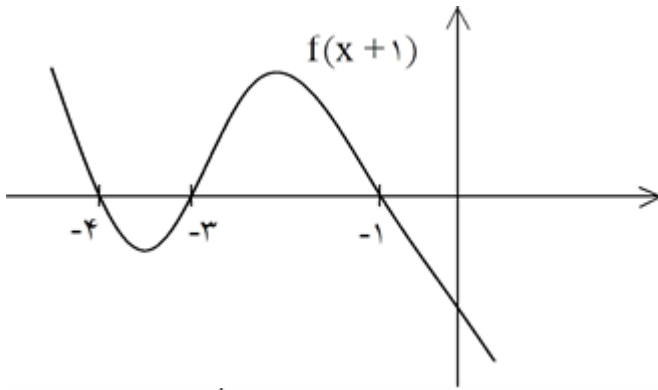
$$= \frac{\frac{1}{3} - 3}{1 + 1} = -\frac{8}{2} \Rightarrow \operatorname{Cotg}(B - C) = -\frac{2}{8}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. f تابعی اکیداً نزولی است.

$$f(f(x)) < f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{rx}\right) \Rightarrow f(x) > \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)^r \Rightarrow \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x + \operatorname{Log}_{\frac{x}{5}}\right)^r > \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)^r$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + \operatorname{Log}_{\frac{x}{5}} > \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow \operatorname{Log}_{\frac{x}{5}} > 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $f(x-2)$ را ۳ واحد به چپ منتقل می‌کنیم تا $f(x+1)$ به دست آید پس نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم تا $f(1-x)$ شود.



$$\left. \begin{aligned} \frac{f(1+x)}{f(1+x)} &\geq 0 \\ x &\in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\} x \in \{0, 1, 2, 4\}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} f(2m^2 - 9m - 2) &< f(m^2 - 4m + 4) \xrightarrow{\text{صعودی}} 2m^2 - 9m - 2 < m^2 - 4m + 4 \\ \Rightarrow m^2 - 5m - 6 &< 0 \Rightarrow (m-6)(m+1) < 0 \Rightarrow -1 < m < 6 \\ -1 < m < 6 \\ m^2 - 4m + 4 &> 0 \Rightarrow (m-2)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 2 \\ 2m^2 - 9m - 2 &> 0 \Rightarrow m < \frac{9-\sqrt{97}}{4}, m > \frac{9+\sqrt{97}}{4} \end{aligned} \left\} \begin{aligned} m \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow m = 5 \end{aligned} \right.$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\times 2\sqrt{3}} 2\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2$$

از طرفی:

$$\begin{aligned} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3} \xrightarrow{\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3} \\ \Rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{3} \Rightarrow 2\sin x - \sqrt{3} \cos x + m \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \\ \Rightarrow 2 - \frac{m}{3} &= 1 \Rightarrow m = 3 \end{aligned}$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳۹

$$f(x) = \frac{2}{a} - \frac{b}{1 + \tan^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{2}{a} - b \cos^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)$$

برای اینکه تابع بیشترین مقدار ممکن شود باید $\cos^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right) = 0$ شود پس:

$$\frac{2}{a} = 6 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

برای اینکه تابع کمترین مقدار ممکن شود باید $\cos^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right) = 1$ شود پس:

$$\frac{2}{a} - b = 0 \Rightarrow b = 6$$

$$T = \frac{\pi}{|c|} = 9\pi \xrightarrow{c>0} c = \frac{1}{9} \quad \text{از طرفی:}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 6 - 6 \cos^2\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 6 - 1/5 = 4/5$$

$$S = \frac{5 \times 12 \times \sin \alpha}{2} = 15 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

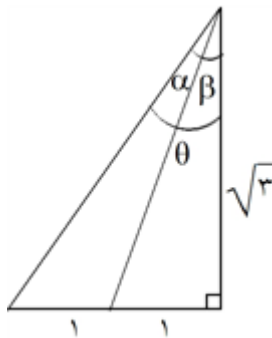
گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۴۰

$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{اختلاف} = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۴۱

$$\begin{aligned} \theta = \alpha + \beta &\Rightarrow \alpha = \theta - \beta \\ \tan \alpha = \tan(\theta - \beta) &= \frac{\tan \theta - \tan \beta}{1 + \tan \theta \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$



$$\sin\left(\frac{\pi + 3x}{2}\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) = \cos 3x$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۴۲

$$\cos\left(\frac{\pi + 3x}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) = -\sin 3x$$

$$\Rightarrow \sin 3x = \cos 3x \Rightarrow 3 \sin 3x \cdot \cos 3x = \cos 3x \xrightarrow{\cos 3x \neq 0} \sin 3x = \frac{1}{3}$$

$$\xrightarrow{[0, \pi]} 3x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{3}}{3} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \tan 3\alpha = -\sqrt{3}$$

$$\frac{\pi}{b} = \frac{9\pi}{20} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{5} \Rightarrow b = 5$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۴۳

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ 0 + c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ c = -2 \end{cases}$$

$$ab = 15$$

۴۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون مرکز روی BC قرار دارد، پس $\widehat{A} = 90^\circ$.

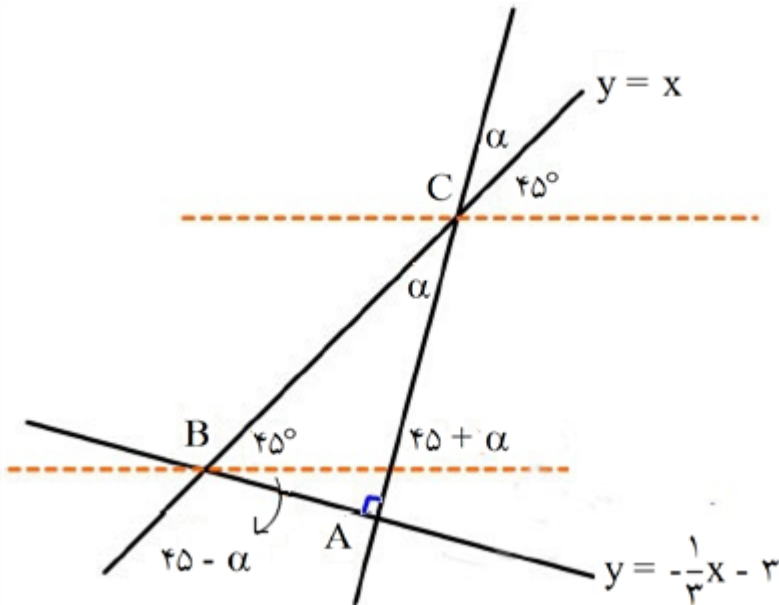
$$\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = r \Rightarrow \operatorname{tg}(90^\circ + 2\alpha)$$

$$\frac{r \times r}{1 - r^2} = -\frac{r}{r} \Rightarrow -\operatorname{Cotg} 2\alpha = -\frac{r}{r}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Cotg} 2\alpha = \frac{r}{r}$$

$$\widehat{B} - \widehat{C} = 90^\circ - \alpha - \alpha = 90^\circ - 2\alpha$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\widehat{B} - \widehat{C}) = \operatorname{Cotg} 2\alpha = \frac{r}{r}$$



۴۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع f اکیداً صعودی است.

$$f(f(x)) < f(x^0) \Rightarrow f(x) < x^0 \Rightarrow (x + \operatorname{Log} x)^0 < x^0 \Rightarrow x + \operatorname{Log} x < x$$

$$\Rightarrow \operatorname{Log} x < 0 \Rightarrow x \in (0, 1)$$

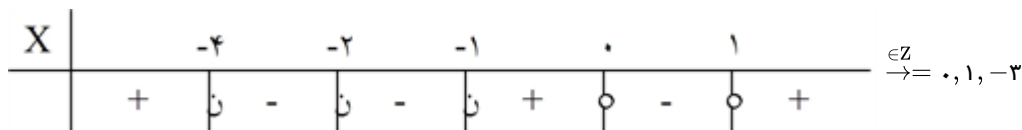
۴۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$-\frac{f(x)}{f(r+x)} \geq 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{f(r+x)} \leq 0$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = -2, 0, 1$$

$$f(x+2) = 0 \Rightarrow x+2 = -2, 0, 1 \Rightarrow x = -4, -2, -1$$



۴۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دامنه تابع $(-\infty, 0)$ است. حال چون اکیداً نزولی است باید رابطه زیر برقرار باشد.

$$-m^2 + 2m - 3 < m^2 - m - 5 < 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m^2 - 3m - 2 = (2m+1)(m-2) > 0 \Rightarrow m > 2 \text{ یا } m < -\frac{1}{2} \\ m^2 - m - 5 < 0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{21}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

پس مجموعه مقادیر m برابر $\left(2, \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ است که این مجموعه فقط شامل $m = -1$ است.

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos x}{\sqrt{2}} - \frac{\sin x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

طرفین تساوی بالا را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\Rightarrow 1 - \sin 2x = \frac{2}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

حال در معادله داده شده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$m\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) - 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}m = 2\sqrt{2} \Rightarrow m = 4$$

$$f(x) = a + \frac{b}{2} \sin\left(2cx - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = a + \frac{b}{2} \cos(2cx)$$

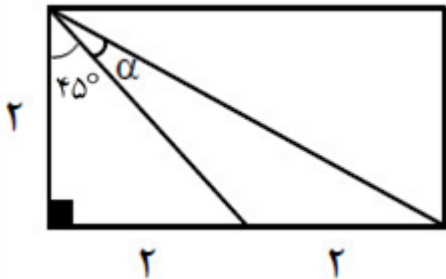
$$\left. \begin{aligned} y_{\max} &= a + \frac{|b|}{2} = 2 \\ y_{\min} &= a - \frac{|b|}{2} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 1, |b| = 4$$

در $x = 0$ مینیمم تابع رخ داده است. پس $b < 0$ و $b = -4$ است. دوره تناوب هم برابر π است.

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{2|c|} = \pi \Rightarrow |c| = 1$$

پس $f(x) = 1 - 2\cos 2x$ است. باید معادله $f(x) = 0$ را حل کنیم:

$$1 - 2\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ 2x = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

اختلاف این جواب‌ها در بازه $[0, \pi]$ برابر $\frac{3\pi}{2}$ است.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + 45^\circ) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2}{2} = 1 \\ \Rightarrow 2 - 2\operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} \alpha + 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

و در نتیجه $\operatorname{Cotg} \alpha = 3$ است.

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{Cotg} x \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{-\pi \leq x \leq \pi} k = \underbrace{-3, -2, -1, 0, 1, 2}_6$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۵۲

$$T = \frac{\pi}{r}; T = \frac{r\pi}{b} \Rightarrow \frac{\pi}{r} = \frac{r\pi}{b} \Rightarrow b = r$$

$$\begin{cases} y_{\max} = |a| + c = 1 \\ y_{\min} = -|a| + c = \frac{1}{r} \end{cases} \Rightarrow c = \frac{r}{r}; bc = r \times \frac{r}{r} \Rightarrow bc = r$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۵۳

$$\begin{cases} x \leq \frac{-5}{r} \Rightarrow y = -(rx + 5) - (-5x + r) \Rightarrow y = rx - v \\ x \geq \frac{r}{0} \Rightarrow y = (rx + 5) - (5x - r) \Rightarrow y = -rx + v \end{cases}$$

$$y = -rx + v \Rightarrow rx = -y + v \Rightarrow x = -\frac{1}{r}y + \frac{v}{r} \xrightarrow{y \geq \frac{r}{0}} f^{-1}(x) = -\frac{1}{r}x + \frac{v}{r}, x \leq \frac{r9}{5}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۵۴

$$\begin{cases} p(x) = (x-1)q(x) + r \Rightarrow \begin{cases} p(-r) = -rq(-r) + r \xrightarrow{P(-r)=.} q(-r) = \frac{r}{r} \\ p^r(x) = (x^r - r)q'(x) \end{cases} \\ P^r(-r) = . \Rightarrow P(-r) = . \end{cases}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۵۵

$$p(-r) = . \Rightarrow \underbrace{(-r)^{rn-1} + r(-r)^{rn-2} + \frac{1}{rv}(-r)^6 - \frac{1}{9}(-r)^4 + a}_{.} = . \Rightarrow a = -rv + 9 \Rightarrow a = -18$$

$$\begin{cases} p(1) = 1 + r + \frac{1}{rv} - \frac{1}{9} - 18 = a + b \\ p(-1) = -1 + r + \frac{1}{rv} - \frac{1}{9} - 18 = -a + b \end{cases} \xrightarrow{-} r = ra \Rightarrow a = 1, b = -\frac{r \cdot v}{rv}; R(x) = x - \frac{r \cdot v}{rv}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۵۶

$$\sin x \cos x + \frac{1}{r} \sin^r x = \frac{1}{r} \cos^r x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{r} (\cos^r x - \sin^r x)$$

$$\Rightarrow \sin rx = \cos rx = \cos \left(\frac{\pi}{r} - rx \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} rx = rk\pi + \frac{\pi}{r} - rx \Rightarrow x = \frac{k\pi}{r} + \frac{\pi}{\Lambda} \Rightarrow k = -2, -1, 0, 1 \Rightarrow \text{معادله ۴ جواب دارد} \\ rx = rk\pi - \frac{\pi}{r} + rx \otimes \end{cases}$$

راه حل دوم:

$$\left. \begin{aligned} \sin rx = \cos rx &\Rightarrow \tan(rx) = 1 \\ -\pi \leq x \leq \pi &\Rightarrow -2\pi \leq rx \leq 2\pi \end{aligned} \right\} \text{تعداد جواب} = 2 \times 2 = 4$$

دور ۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۵۷

$$\frac{T}{r} = \frac{1r}{\Lambda} - \frac{5}{\Lambda} \Rightarrow T = r; T = \frac{r\pi}{b} \Rightarrow r = \frac{r\pi}{b} \Rightarrow b = \pi$$

$$\begin{cases} y_{\max} = |a| + c' = . / 5 \\ y_{\min} = -|a| + c' = -. / 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c' = . \\ a = . / 5 \end{cases}; \left(\frac{5}{\Lambda}, \frac{1}{r} \right) \in f(x) \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \sin \left(\frac{5\pi}{\Lambda} - c \right)$$

$$\Rightarrow \frac{5\pi}{\Lambda} - c = \frac{\pi}{r} \Rightarrow c = \frac{\pi}{\Lambda}$$

$$\frac{ab}{c} = \frac{. / 5 \times \pi}{\frac{\pi}{\Lambda}} \Rightarrow \frac{ab}{c} = r$$



گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۵۸

$$x \leq -1 \rightarrow y = -2x - 2 + \frac{x}{2} - 2 \Rightarrow f(x) = -\frac{3}{2}x - 4 \xrightarrow{y \geq -\frac{5}{2}} f^{-1}(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{8}{3}, x \geq -\frac{5}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا تابع را ساده‌تر می‌کنیم تا ضریب x در داخل قدرمطلق برابر ۱ شود: ۵۹

$$y = -\frac{1}{2} \left| 2 \left(x + \frac{1}{2} \right) \right| = -\frac{1}{2} \times 2 \left| x + \frac{1}{2} \right| = - \left| x + \frac{1}{2} \right|$$

پس تابع $|x|$ را به اندازه $\frac{1}{2}$ به چپ انتقال می‌دهیم سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۶۰

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x} \Rightarrow \cos^2 x = (1 + \sin x)^2 \Rightarrow (1 - \sin^2 x) = (1 + \sin x)^2$$

$$\Rightarrow (1 - \sin x)(1 + \sin x) = (1 + \sin x)(1 + \sin x) \Rightarrow 1 - \sin x = 1 + \sin x \Rightarrow 2 \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow \text{اختلاف} = \pi - 0 = \pi$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۶۱

$$f \Rightarrow f(x) = x \text{ همانی}$$

$$g(x) = \frac{1}{x-a} \Rightarrow |g(x)| - 2 = \left| \frac{1}{x-a} \right| - 2 = \frac{1}{|x|} \xrightarrow{x = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\left| \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} - a} \right| = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 2 = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow \left| \frac{\sqrt{2}}{2} - a \right| = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} - a = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a_1 = \sqrt{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - a = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \Rightarrow a_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow a_2 - a_1 = 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$$

توجه: چون تابع f همانی است پس اختلاف جواب‌های $f(x+a) = 3$ همان اختلاف دو مقداری است که برای a به دست آمده است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۶۲

$$f \Rightarrow m = n = 0 \Rightarrow f(x) = -k \left. \begin{matrix} \text{تابع ثابت} \\ (m, n-1) = (0, k) \Rightarrow k = n-1 = -1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow f(x) = 1$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۶۳

$$g(f(g(x+2))) = 0 \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} f(g(x+2)) = 2$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2} g(x+2) - 1 \right| = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} g(x+2) - 1 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} g(x+2) = -2 \\ \text{یا} \\ g(x+2) = 6 \end{cases}$$

انتقال افقی، تعداد ریشه‌ها را تغییر نمی‌دهد و با توجه به نمودار که تابع g با دامنه R اکیداً صعودی است. هر کدام از معادلات بالا یک جواب دارد.



$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{17\pi}{8} + x\right) &= \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{8} + x\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right) \\ \cos\left(\frac{9\pi}{8} - x\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{8} - \left(\frac{\pi}{8} + x\right)\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{8}\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{4} \Rightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \xrightarrow{x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} x_1 = -\frac{\pi}{12} \\ 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \xrightarrow{x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} x_2 = \frac{7\pi}{12} \end{cases} \\ \Rightarrow x_1 + x_2 &= \frac{6\pi}{12} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای رسم نمودار داده شده، نمودار $y = \cos x$ را $\frac{\pi}{3}$ واحد به راست می‌بریم، سپس طول

نقاط را بر c تقسیم می‌کنیم، عرض نقاط را در b ضرب و با a جمع می‌کنیم.

با توجه به نمودار b و c هر دو مثبت هستند و داریم:

$$(\cdot, \cdot) \in \text{نمودار} \Rightarrow a + b \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cdot \Rightarrow 2a + b = \cdot \quad (1)$$

$$y_{\max} = a + |b| \xrightarrow{b > 0} a + b = 1 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} a = -1, b = 2$$

$$\text{دوره تناوب هم برابر } 2\pi \text{ است. } \frac{4\pi}{3} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 2\pi$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{c} = 2\pi \Rightarrow c = 1 \Rightarrow b(c - a) = 2 \times 2 = 4$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۶۶

$$\underbrace{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}_{\alpha} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}_{\beta} = 1$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1 \Rightarrow \cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1 \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$x - \frac{\pi}{3} = k\pi \Rightarrow \left. \begin{matrix} x = k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 0 \leq x \leq 2\pi \end{matrix} \right\} x = \frac{\pi}{3}, x = \pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

این معادله در این فاصله ۲ جواب دارد.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. (نمودار در صفر می‌نیمد پس $a < 0$) ۶۷

$$\left. \begin{matrix} |a| + c = 2/5 \\ -|a| + c = -0/5 \end{matrix} \right\} c = 1, |a| = 1/5$$

$$a = -1/5$$

$$ac = -1/5$$



۶۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x^2 f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow \text{اعداد صحیح نامنفی} = \{0, 1, 2, 3\}$$

X	$-\infty$	۳	$+\infty$
f(x)		+	-

۶۹

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{یکی به راست}} \frac{1}{x-1} \xrightarrow{\text{قرینه به محور } x} \frac{-1}{x-1} \xrightarrow{\text{تا پایین ۲}} \frac{-1}{x-1} - 2$$

$$\frac{1}{x} = \frac{-1}{x-1} - 2 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = -2 \Rightarrow \frac{2x-1}{x^2-x} = -2 \Rightarrow \cancel{2x} - 1 = -2x^2 + \cancel{2x}$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \pm \sqrt{2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \right), (0, 0) \Rightarrow d = \sqrt{\frac{1}{2} + 2} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

۷۰

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به گزینه‌ها، خارج قسمت را باید درجه یک بگیریم. خارج قسمت را $\alpha x + \beta$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$f(x) = (x^2 + 3x + 5)(\alpha x + \beta) + x + 2$$

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 1 \cdot (\alpha + \beta) + 3 = 13 \Rightarrow \alpha + \beta = 10 \\ f(-1) &= 2(-\alpha + \beta) + 1 = 11 \Rightarrow -\alpha + \beta = 5 \end{aligned} \right\} \beta = 3, \alpha = -2$$

خارج قسمت $-2x + 3$ است.

۷۱

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1 \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های بازه $[0, 2\pi]$ عبارت‌اند از $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{5\pi}{4}$ که مجموع آن‌ها برابر $\frac{3\pi}{2}$ است.

۷۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} \max &= |a| + b = 3 \\ \min &= -|a| + b = -7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = -2, |a| = 5$$

اما تابع در $x = 0$ ماکزیمم دارد، پس $a > 0$ است.

$$\Rightarrow f(x) = 5 \cos x - 2 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5 \cos \frac{\pi}{3} - 2 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

۷۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\sec x = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \sec x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \sec^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ \text{یا} \\ x = 2\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

۷۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$c = \frac{\max + \min}{2} = \frac{5 + 1}{2} = 3$$



۷۵ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - x < \frac{\pi}{4}$$

پس کمان موردنظر در ربع اول است در این بازه تانژانت مثبت است.

پس:

$$\frac{1-m}{2+m} > 0 \Rightarrow -2 < m < 1$$

۷۶ گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اکیداً نزولی یعنی:

$$-9 + k^2 < 0 \Rightarrow k^2 < 9 \Rightarrow -3 < k < 3 \Rightarrow k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \Rightarrow \text{مجموع} = 0$$

۷۷ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x+2) - (x+2)^2 = -x^2 + 4$$

$$f(x) - x^2 = -x^2 + 4 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{OA} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \quad \text{نقطه تلاقی } (1, 3)$$

۷۸ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$p(x) = x^{2n+1} + 2x^{2n} + x^2 + 3x^0 + 16a \xrightarrow{n=1} p(-2) = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$p(x) = x^2 + 3x^0 + x^2 + 2x^2 + 32$$

$$p(x) = (x^2 + 2x - 3)Q(x) + R(x) \xrightarrow{x=1} p(1) = R(1) = 39$$

$$-5x + 42$$

تنها گزینه‌ای که به ازای $x = 1$ برابر ۳۹ میشود:

۷۹ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \sin x + \sqrt{3} \cos x &= \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{12} \\ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \\ \frac{27\pi}{12} &= \frac{9\pi}{4} \end{aligned}$$

مجموع ریشه‌های قابل قبول در بازه فوق:

۸۰ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \frac{T}{4} &= \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow T = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 2 \xrightarrow{b>0} b = \pi \\ \max &= \frac{1}{4} \Rightarrow |a| = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{4} \\ \left(\frac{5}{4}, 0\right) &\Rightarrow \frac{1}{4} \cos\left(\frac{5\pi}{4} + c\right) = 0 \Rightarrow \frac{5\pi}{4} + c = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow c = \frac{\pi}{4} \\ \frac{ac}{b} &= \frac{\frac{1}{4} \times \frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

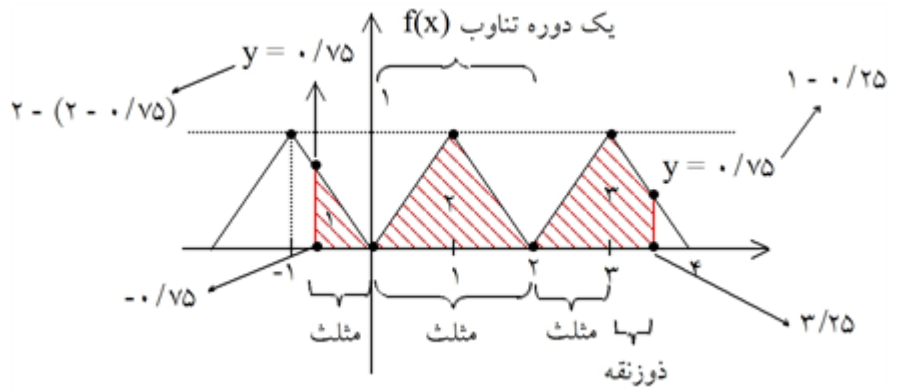
پس:

۸۱ گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} y &= 2^{x+|x|} \xrightarrow{\text{واحد در جهت منفی محور } x} y = 2^{(x+3)+|x+3|} \xrightarrow{\text{واحد در جهت منفی } y \text{ ها}} \\ y &= 2^{x+3+|x+3|} - 2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 2^{x+3+|x+3|} = 2^1 \Rightarrow x+3+|x+3| = 1 \\ \begin{cases} x \geq -3 \Rightarrow 2(x+3) = 1 \Rightarrow x = -2/5 \\ x < -3 \Rightarrow (x+3) - (x+3) = 1 \Rightarrow 0 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

غ ق ق ق ۱ = ۰





$$S = \underbrace{\left(\frac{3}{4} \times \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{2}}_{S_1} + \underbrace{\frac{1 \times 2}{2}}_{S_2} + \underbrace{\frac{1 \times 1}{2}}_{S_3} + \underbrace{\left(1 + \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{4}}_{S_4} = \frac{9}{32} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{7}{32} = 2$$

$$5 \sin^2 x + 2 \cos^2 x = -2 \Rightarrow 5 \sin^2 x + 2 \cos^2 x + 2 = 0$$

$5 \sin^2 x$ و $2 \cos^2 x + 2$ توابعی نامنفی‌اند پس باید هم زمان صفر باشند تا مجموع صفر گردد لذا

$$5 \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = -\pi, 0, \pi$$

از این سه مقدار فقط دو مقدار $-\pi, \pi$ عبارت $2 \cos^2 x + 2$ را صفر می‌کند پس معادله ۲ جواب دارد

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. منحنی اولیه را k واحد در راستای قائم جابه‌جا می‌کنیم و نمودار تابع $y = \sqrt{\sqrt{x} + 3} + k$ حاصل می‌شود. اگر این نمودار، نمودار وارون خود را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کند، یعنی خط $y = x$ را در نقطه‌ای با عرض ۱ قطع کرده است، پس نقطه‌ی تقاطع به صورت $(1, 1)$ است که مختصات این نقطه در ضابطه‌ی جدید صدق می‌کند:

$$\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix} \rightarrow 1 = \sqrt{\sqrt{1} + 3} + k = 2 + k \Rightarrow k = -1$$

پس ضابطه‌ی تابع جدید $y = \sqrt{\sqrt{x} + 3} - 1$ است. حال داریم:

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} y = -\sqrt{\sqrt{x} + 3} + 1 \xrightarrow{\text{واحد به سمت چپ}} y = 1 - \sqrt{\sqrt{x} + 3}$$

مختصات نقطه‌ی $(0, 1 - \sqrt{5})$ در ضابطه‌ی این تابع صدق می‌کند.

$$(1 + \cos \alpha)(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha) = \frac{\sin^2(4\alpha)}{8 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1}{8}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} \neq 0 \rightarrow \sin 4\alpha = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$4\alpha = k\pi \pm \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha = k\pi + \frac{\alpha}{2} \\ 4\alpha = k\pi - \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

$$\frac{7\alpha}{2} = k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{7}$$

$$\frac{9\alpha}{2} = k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{9}$$

$$\left. \begin{aligned} &0 < \frac{7k\pi}{7} < 2\pi \Rightarrow 0 < k < 7 \Rightarrow \text{جواب ۶} \\ &0 < \frac{9k\pi}{9} < 2\pi \Rightarrow 0 < k < 9 \Rightarrow \text{جواب ۸} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{در مجموع ۱۴ جواب دارد.}$$

تذکر: چون $\alpha = 2\pi, \alpha = 0$ جواب نمی‌باشند، بازه باز در نظر گرفته شد.

$$(1 + \cos \alpha)(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha) = 2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 2 \cos^2\alpha \cdot 2 \cos^2 2\alpha$$

توجه:

$$= 8 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos^2\alpha \cdot \cos^2 2\alpha = \frac{8 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos^2\alpha \cdot \cos^2 2\alpha}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin^2 4\alpha}{8 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x \text{ و } \sin^2 \alpha = \sin^2 \beta \Rightarrow \alpha = k\pi \pm \beta$$

یادآوری:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \sin b$$

توجه:

$$2 \sin x \cos(2x) = \sin(2x+x) - \sin(2x-x) = \sin 3x - \sin x$$

در نتیجه:

$$2 \sin(x) \cos(2x) + \sin(x) = 1 \Rightarrow \text{صورت سؤال}$$

$$\Rightarrow \sin 3x - \sin x + \sin x = 1 \Rightarrow \sin 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k+1}{6}\pi$$

$$\text{جواب‌های بازه } [0, 2\pi] \text{ عبارت‌اند از } \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6} \text{ که مجموع آن‌ها برابر } \frac{5\pi}{2} \text{ است.}$$

راه حل دوم:

$$2 \sin x \cos 2x + \sin x = 1 \Rightarrow 2 \sin x(1 - 2 \sin^2 x) + \sin x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x = 1$$

$$\Rightarrow \sin 3x = 1 \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k+1}{6}\pi$$

$$\text{جواب‌های بازه } [0, 2\pi] \text{ عبارت‌اند از } \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6} \text{ که مجموع آن‌ها برابر } \frac{5\pi}{2} \text{ است.}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. قرینه $y = 2 + \sqrt{x-1}$ نسبت به خط $y = x$ تابع وارون آن است.

$$y = 2 + \sqrt{x-1} \Rightarrow y-2 = \sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{به توان میرسانیم}} y^2 - 4y + 4 = x-1$$

$$\Rightarrow x = y^2 - 4y + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-2)^2 + 1$$

$$\xrightarrow{\text{واحد در جهت } x \text{ مثبت}} y = (x-2-2)^2 + 1 \xrightarrow{\text{واحد در جهت } y \text{ منفی}} g(x) = (x-4)^2 + 1 - 3$$

$$\Rightarrow g(x) = (x-4)^2 - 2 \Rightarrow g(4) = (4-4)^2 - 2 = -2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $f(x) = 2^{|\sin x|}$ را $\frac{\pi}{2}$ در امتداد محور x ها در جهت مثبت انتقال می‌دهیم:

$$y = 2^{\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right|} \Rightarrow y = 2^{|\cos x|} \Rightarrow y = 2^{|\cos x|}$$

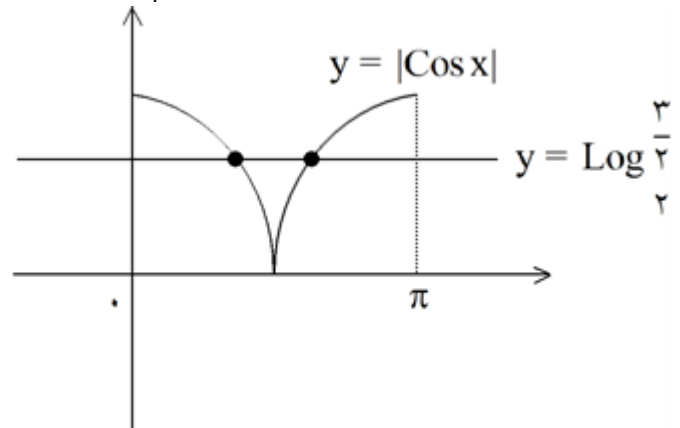
سپس $\frac{3}{2}$ در جهت محور y های منفی منتقل می‌کنیم.

$$y = 2^{|\cos x|} - \frac{3}{2}$$

برای یافتن محل تلاقی با محور طول‌ها برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$2^{|\cos x|} - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 2^{|\cos x|} = \frac{3}{2} \Rightarrow |\cos x| = \log_2 \frac{3}{2}$$

چون $\frac{3}{2} < 2$ است و $\log_2 \frac{3}{2} = 1$ بنابراین $0 < \log_2 \frac{3}{2} < 1$ است.



دو نمودار در بازه $[0, \pi]$ دو نقطه تلاقی دارند بنابراین معادله دو جواب دارد.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = -\sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 x$$

$$\Rightarrow -\sin^2 x \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow -\sin^2 x (\cos^2 x + 1) = 0$$

$$\sin^2 x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow$$

k	0	1	2
x	0	π	2π

$$\cos^2 x = -1 \Rightarrow 2x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

k	0	1	2
x	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{5\pi}{2}$

در مجموع ۵ ریشه در بازه $[0, 2\pi]$ وجود دارد.

$$\sqrt{4-x} \xrightarrow[\text{راستای واحد}]{\text{واحد در } k} \sqrt{4-x+k} \xrightarrow[\text{در جهت افق}]{\text{واحد } k-2} \sqrt{4-(x-(k-2))}+k$$

$$\sqrt{-x+k+2+k}$$

وارون خود را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع کند یعنی (۱, ۱) در تابع صدق می‌کند:

$$\sqrt{-1+k+2+k}=1 \Rightarrow \sqrt{k+1}=1-k$$

$$1-k \geq 0 \Rightarrow k \leq 1$$

$$k+1=k^2-2k+1 \Rightarrow k^2-3k=0 \Rightarrow k(k-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=3 \end{cases} \Rightarrow k=0$$

$$\sqrt{-x+2}-1=0 \Rightarrow \sqrt{-x+2}=1 \Rightarrow -x+2=1 \Rightarrow x=1$$

$$f(x) = \sqrt[3]{9 \cos^2(x)-1} - \sqrt[3]{1-9 \cos^2(x)}$$

$$-1 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 9 \cos^2 x \leq 9 \Rightarrow -1 \leq 9 \cos^2 x - 1 \leq 8 \Rightarrow -1 \leq \sqrt[3]{9 \cos^2 x - 1} \leq 2$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{9 \cos^2 x - 1} = t \quad -1 \leq t \leq 2$$

$$f(t) = t^3 - t^{-3} \Rightarrow -1 \leq t \leq 2$$

تابع t^3 اکیداً صعودی است.

تابع t^{-3} اکیداً نزولی است.

تابع t^{-3} اکیداً صعودی است.

یعنی $t^3 - t^{-3}$ اکیداً صعودی است.

$$-1 \leq t \leq 2 \Rightarrow f(-1) = t^{-3} - t^3 = \frac{1}{-1} - (-1) = -\frac{3}{2}$$

$$f(2) = 2^3 - 2^{-3} = 8 - \frac{1}{8} = \frac{63}{8} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{63}{8}$$

$$b-a = \frac{63}{8} + \frac{3}{2} = \frac{63}{8} + \frac{12}{8} = \frac{75}{8}$$

$$(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha)(1 + \cos 8\alpha) = \frac{1}{\Lambda}$$

$$2 \cos^2 \alpha \cdot 2 \cos^2 2\alpha \cdot 2 \cos^2 4\alpha = \frac{1}{\Lambda} \Rightarrow (\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha)^2 = \frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\Lambda} \frac{\sin 8\alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = \frac{1}{64} \Rightarrow \sin^2 8\alpha = \sin^2 \alpha$$

$$\Lambda \alpha = k\pi \pm \alpha \Rightarrow \begin{cases} \Lambda \alpha = k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{\Lambda} \\ \Lambda \alpha = k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{\Lambda} \end{cases} \xrightarrow[\max]{[\cdot, \pi]} \alpha = \frac{\Lambda\pi}{9}$$

تذکر:

$$\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha = \frac{\sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \sin 4\alpha \cos 4\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin 8\alpha}{8 \sin \alpha}$$



$$\tan \alpha = \frac{r \tan\left(\frac{\alpha}{r}\right)}{1 - \tan^r\left(\frac{\alpha}{r}\right)} = \frac{r \times \frac{1}{r}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\frac{1}{r}}{\frac{15}{16}} = \frac{16}{15}$$

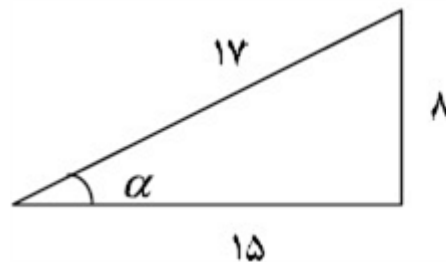
$$\sin \alpha = \frac{16}{17}$$

$$\cos \alpha = \frac{15}{17}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)} = \frac{\frac{16}{15} - \frac{16}{17}}{\frac{16}{17} - \frac{15}{17}} = \frac{\frac{136 \times 120}{15 \times 17}}{-\frac{1}{17}} = \frac{\frac{16}{15 \times 17}}{-\frac{1}{17}} = \frac{-16}{1.5}$$

راه حل دوم:

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^r\left(\frac{\alpha}{r}\right)}{1 + \tan^r\left(\frac{\alpha}{r}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{16}}{1 + \frac{1}{16}} = \frac{\frac{15}{16}}{\frac{17}{16}} = \frac{15}{17}$$



$$\sin \alpha = \frac{8}{17}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای حل معادله مثلثاتی باید ابتدا نسبت‌ها را به کمک فرمول بسط داده و ساده کنیم: ۹۴

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \cos x + \cos x \times \frac{1}{2} - \sin x \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 2x \Rightarrow \cos x = \cos 2x$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

جواب $\frac{2k\pi}{3}$ جواب $2k\pi$ را نیز شامل می‌شود، بنابراین $\frac{2k\pi}{3}$ قابل قبول است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با کمک ترسیم قرینه نسبت به مبدأ مختصات و انتقال روی محور عرض‌ها داریم: ۹۵

$$y = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} y = -(-x-1)^2 \xrightarrow{\text{واحد به بالا}} y = -(-x-1)^2 + 4$$

$$-(-x-1)^2 + 4 = (x-1)^2 \Rightarrow -x^2 - 2x - 1 + 4 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow -2x^2 = -2 \Rightarrow x = \pm 1$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع $p(x)$ را به صورت روبه‌رو در نظر گرفته و شروع به حل می‌کنیم: ۹۶

$$p(x) = (2x-1)Q(x)$$

$$\Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{16}\right) + a\left(\frac{1}{8}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \frac{a}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 4$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow p(-2) = 32 - 56 + 8 + 6 = -10$$



$$2 \sin(2x) \cos(2x) = 1$$

$$2 \sin(2x) = 1 \Rightarrow \sin(2x) = \frac{1}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\div 2} x = \frac{k\pi}{1} + \frac{\pi}{12} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} \\ k=1 \Rightarrow x = \frac{13\pi}{12} \end{cases} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \xrightarrow{\div 2} x = \frac{k\pi}{1} + \frac{5\pi}{12} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} \\ k=1 \Rightarrow x = \frac{17\pi}{12} \end{cases} \end{array} \right.$$

این معادله در بازه $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ دارای ۴ جواب است.

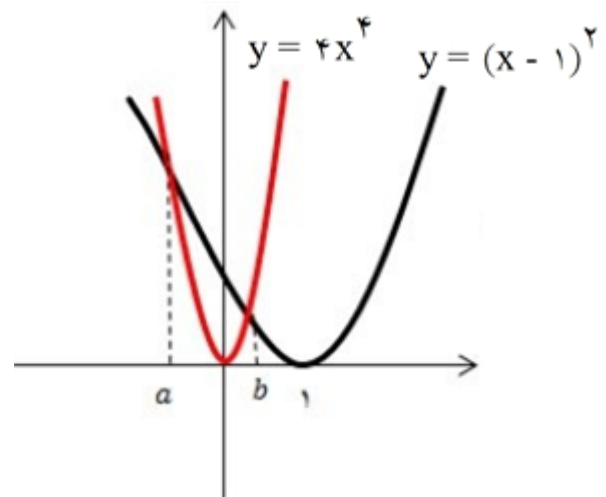
گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$T = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$$

$$T = \frac{4\pi}{6} \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2 \Rightarrow \text{گزینه ۳ و ۴ غلط}$$

$$\begin{cases} \max : |a| + c = 1 \\ \min : -|a| + c = -3 \end{cases} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1 \text{ غلط ۲}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$(x-1)^2 > x^2 \Rightarrow |x-1| > x$$

$$x \geq 1 \Rightarrow x^2 < x-1 \Rightarrow x^2 - x + 1 < 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 > 0 \Rightarrow \text{عبارت همواره مثبت است} \\ \text{و نمی تواند منفی باشد.} \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$x \leq 1 \Rightarrow x^2 < -x+1 \Rightarrow x^2 + x - 1 < 0 \Rightarrow -1 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow b-a = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۰۰

$$f(x) = x^2 - 2x \xrightarrow{\text{قرینه محور } x \text{ ها}} f(x) = -x^2 + 2x \xrightarrow{+16 \text{ محور } y \text{ ها}}$$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 16 = x^2 - 2x$$

$$x^2 - 2x - 16 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 & \text{غ ق ق} \\ x = 4 & \text{ق ق } (x > 1) \end{cases} \Rightarrow A \Big|_8^4$$

$$OA = \sqrt{4^2 + 16^2} = \sqrt{16 + 256} = \sqrt{272} = 4\sqrt{17}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۰۱

$$p(4) = 3$$

$$p(-2) = 1$$

$$\xrightarrow{x=4} p(4) + 4p(-2) = p(4) + 4p(-2) = 3 + 4 = 7$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۰۲

$$\tan 3x = \frac{1}{\tan x} \Rightarrow \tan 3x = \cot x \xrightarrow{\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Rightarrow 3x = k\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

و جوابهای قابل قبول در بازه داده شده عبارتند از:

$$x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{8}, x_2 = \frac{5\pi}{8}, x_3 = \frac{9\pi}{8}, x_4 = \frac{13\pi}{8}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6\pi$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. باقیمانده تقسیم $p(x)$ بر $x - 1$ و $2x + 1$ به ترتیب ۵ و ۸ است، به معنای آن است که:

$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = 5 \text{ و } p(1) = 8$$

$$p(x) = (2x^2 - x - 1)q(x) + ax + b$$

$$p(1) = 8 \Rightarrow a + b = 8$$

$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = 5 \Rightarrow -\frac{1}{4}a + b = 5 \Rightarrow a = 2, b = 6 \Rightarrow R = 2x + 6$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۰۴

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Rightarrow (1) \quad 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$(2) \quad 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} + x \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} + x$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi + \pi = (2k + 1)\pi$$

$$(1) \cup (2) = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۰۵

$$T = \frac{9\pi}{2} - \left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 6\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{3}$$

$$\min = -3 \Rightarrow -|a| + c = -3 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow |a| = 2$$

$$\max = 1 \Rightarrow |a| + c = 1$$

چون نمودار تابع سینوس باضریب منفی است. (نمودار رو به پایین است). بنابراین $a = -2$ و $b = \frac{1}{3}$

$$b = \frac{1}{3}, a = -2 \Rightarrow \frac{a}{b} = -6 \text{ می‌باشد.}$$

البته می‌توان $a = 2, b = -\frac{1}{3}$ در نظر گرفت که جواب نهایی باز هم -۶ می‌شود.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم: ۱۰۶

$$P(1) = ., P(-1) = .$$

$$\xrightarrow{x=2} q(2) = P(2-1) + P(1-2) = P(1) + P(-1) = . + . = .$$

پس:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۰۷

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2 \left(\frac{1}{2} \sin^2 2x\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \sin^2 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 2x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \text{یا} \\ \sin 2x = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \text{یا} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_2 = k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

k	۰	۱	۲
x_1	$\frac{\pi}{4}$	$\pi + \frac{\pi}{4}$	×
x_2	×	$\pi - \frac{\pi}{4}$	$2\pi - \frac{\pi}{4}$

جواب‌های بین $[0, 2\pi]$

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{\pi}{4} + \pi + \frac{\pi}{4} + \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi - \frac{\pi}{4} = 4\pi$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۰۸

$$f(x) = \operatorname{tg}(\pi x) - \operatorname{Cotg}(\pi x) = \frac{\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)} - \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{\sin^2(\pi x) - \cos^2(\pi x)}{\sin(\pi x) \cos(\pi x)}$$

$$= \frac{-\cos(2\pi x)}{\frac{1}{2} \sin(2\pi x)} = -2 \operatorname{Cotg}(2\pi x) \Rightarrow T = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$



گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $\cos 3x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\cos x \Rightarrow \cos(3x) = \cos(\pi - x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \checkmark \\ \text{یا} \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

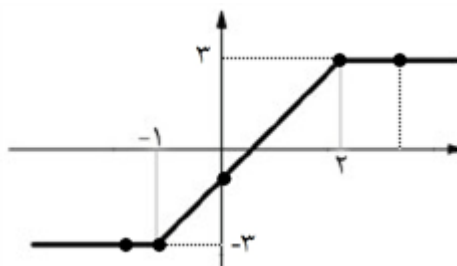
چون $\cos\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به کمک نقطه‌یابی نمودار f را رسم می‌کنیم.

$$f(x) = |x+1| - |x-2|$$

نقاط شکست

x	-2	-1	2	3
y	-3	-3	3	3



پس f در بازه‌ی $(-1, 2)$ اکیداً صعودی است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$4 \sin x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1 \Rightarrow 4 \sin x (-\cos x) = 1 \Rightarrow -2(2 \sin x \cos x) = 1$$

$$\Rightarrow -2 \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \sin(2x) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

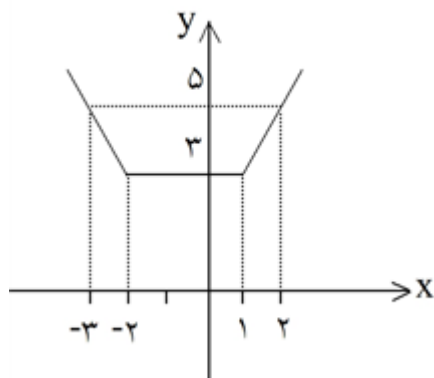
$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ x_2 = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

k	۰	۱	۲
x_1	$\times$	$\pi - \frac{\pi}{12}$	$2\pi - \frac{\pi}{12}$
x_2	$\frac{5\pi}{12}$	$\pi + \frac{5\pi}{12}$	$\times$

$$\text{مجموع} = \pi - \frac{\pi}{12} + 2\pi - \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} + \pi + \frac{5\pi}{12} = 4\pi + \pi = 5\pi$$



$$y = |x + 2| + |x - 1|$$



نقاط شکست

x	-3	-2	1	2
y	5	3	3	5

پس تابع در فاصله‌ی $(-\infty, -2)$ اکیداً نزولی است.گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شروع صعودی به ازای $x > 0$ پس $b > 0$ بنابراین برای آنکه تابع ماکزیمم شودباید $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ باشد، در نتیجه $x = \frac{\pi}{6}$ است یعنی تابع از نقطه $\left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right)$ می‌گذرد.

$$\left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right) \Rightarrow a + b \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Rightarrow a + b = \sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{3} - b$$

$$f(\pi) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a + b \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2} \Rightarrow a - \frac{\sqrt{3}}{2}b = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow b + \frac{\sqrt{3}}{2}b = \sqrt{3} + \frac{3}{2} \Rightarrow b\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow b = \sqrt{3}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x \Rightarrow (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} (\sin 2x) \Rightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = (1 - \sin x \cos x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin x \cos x = 1 \Rightarrow 2 \sin x \cos x = 2 \Rightarrow \sin 2x = 2 \text{ غ ق} \\ \text{یا} \\ \sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \text{یا} \\ \cos x = 1 \Rightarrow x = 0, x = 2\pi \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{مجموع} = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$$

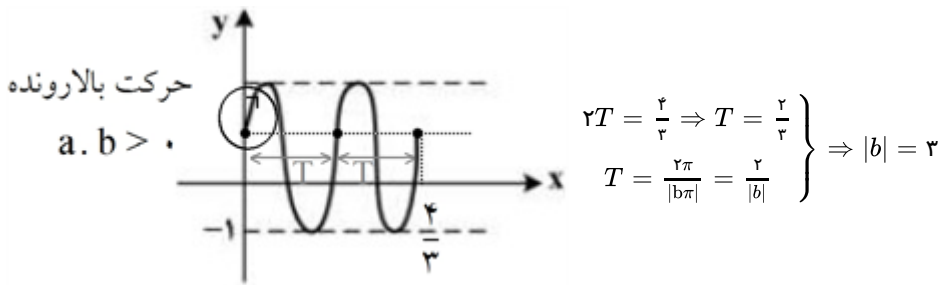
گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = 1 + a \left(\frac{1}{2} \sin(2bx) \right) \Rightarrow y = 1 + \frac{a}{2} \sin(2bx) \Rightarrow 1 + \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{3}{2} \Rightarrow \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 1$$

$$T = \frac{2\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow \frac{2\pi}{|2b|} = \pi \Rightarrow |b| = 1 \xrightarrow{a, b > 0} \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2$$

تذکر: توجه داشته باشید تابع سینوس برای $x > 0$ صعودی شروع می‌شود پس a و b هم‌علامتند که حالت $a = -1$ و $b = -1$ یعنی $a + b = -2$ در گزینه‌ها نیست.





هر دو جواب قابل قبول است. $\min = 1 - |a| = -1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a + b = \begin{cases} 2 + 3 = 5 \\ -2 - 3 = -5 \end{cases}$

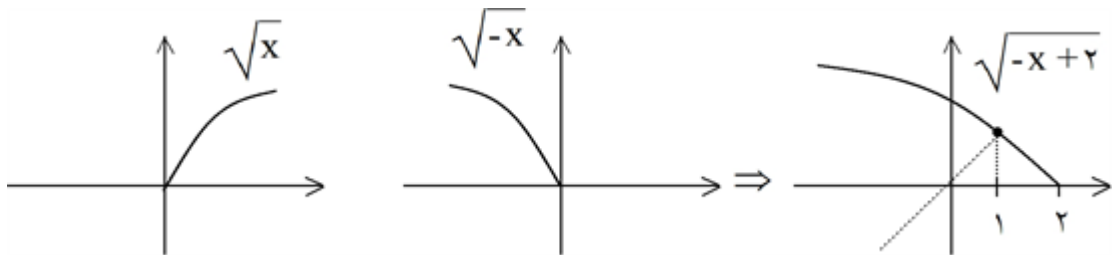
$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(-x) = \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{انتقال}} f(2-x) = \sqrt{-x+2}$$

$$y = x \text{ محل برخورد با } \sqrt{-x+2} = x \Rightarrow x^2 = -x+2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$x = 1 \Rightarrow \sqrt{-1+2} = 1 \checkmark \quad x = -2 \Rightarrow \sqrt{-(-2)+2} = -2 \times$$

روش دوم:



$$\begin{array}{r} 4x^3 - 19x + 12 \quad | \quad 2x - 3 \\ -(4x^3 - 6x^2) \quad | \quad 2x^2 + 3x - 5 \\ \hline 6x^2 - 19x + 12 \\ -(6x^2 - 9x) \\ \hline -10x + 12 \\ -(-10x + 15) \\ \hline -3 \end{array}$$

$= 2 + 3 - 5 = 0$ مجموع ضرایب چندجمله‌ای خارج قسمت

$$2 \sin x \cos x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (2 \cos x + 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$$

$$2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}, x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\pi + 2\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 5\pi$$

در این جا نیازی برای به دست آوردن جواب‌های کلی معادله‌ی مثلثاتی نیست، فقط کافی است جواب‌ها را در فاصله‌ی داده شده، مشخص کنیم.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ از روی ضابطه, } T = \frac{2\pi}{|m|} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|m|} \Rightarrow |m| = 3 \Rightarrow m = \pm 3$$

چون با توجه به نمودار تابع باید ابتدا Min داشته باشد، بنابراین: $m = 3$

$$\Rightarrow y = 1 - \sin\left(\frac{3\pi}{6}\right) \xrightarrow{x=\frac{3\pi}{6}} y\left(\frac{3\pi}{6}\right) = 1 - \sin 3\left(\frac{3\pi}{6}\right) = 1 - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 \text{ ضرب } > 0 \Rightarrow 1 - a > 0 \Rightarrow a < 1 \quad (1) \\ \Delta < 0 \Rightarrow (2\sqrt{6})^2 + 4a(1-a) < 0 \Rightarrow 24 + 4a - 4a^2 < 0 \\ \Rightarrow a^2 - a - 6 > 0 \Rightarrow (a+2)(a-3) > 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 3 \quad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} a < -2$$

$$\frac{1}{2} \left(\cos 2x + \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{4} \rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

روش دوم:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{4}$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$$\sin \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{\lambda} \right) = \cos \left(x - \frac{2\pi}{\lambda} \right) \Rightarrow 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{\lambda} \right) = 1 \Rightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{\lambda} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{\lambda} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x + \frac{\pi}{\lambda} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{\lambda} \\ x = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{\lambda} \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} \pi - \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3}$$

۱۲۴

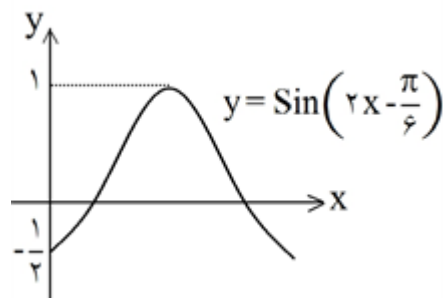
$$T = \frac{2\pi}{b} = \pi \Rightarrow b = 2$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

با توجه به نمودار بالا باید a منفی باشد، بنابراین با توجه به ماکزیمم $(1/5)$ داریم:

$$1 - a = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$a + b = \frac{3}{2} \quad \text{در نتیجه:}$$



۱۲۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan 3x \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan 3x \Rightarrow$$

$$3x = k\pi + \frac{\pi}{4} - x \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{16}$$

۱۲۶

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. روش اول:

$$\cos 3x + \cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\cos x \Rightarrow \cos 3x = \cos(\pi - x)$$

$$\Rightarrow 3x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \text{ق ق}$$

$$\Rightarrow 3x = 2k\pi - \pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \quad \text{غ ق}$$

نکته: $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$ غیر قابل قبول است زیرا به ازای آن $\cos x = 0$ می شود که در صورت سؤال گفته شده $(\cos x \neq 0)$

$$** \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

روش دوم:

$$\cos 3x + \cos x = 0 \Rightarrow 4 \cos^3 x - 3 \cos x + \cos x = 0 \Rightarrow 4 \cos^3 x - 2 \cos x = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos x (2 \cos^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \quad \text{غ ق} \\ 2 \cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

۱۲۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4 = x^3 - x^2 + ax^2 - ax + 4x - 4 =$$

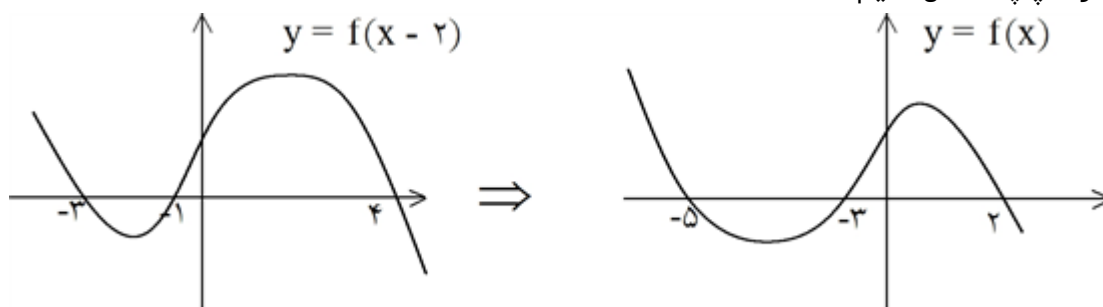
$$= x^2(x-1) + ax(x-1) + 4(x-1) = (x-1)(x^2 + ax + 4)$$

این معادله همواره دارای یک ریشه ی مثبت $x = 1$ است، پس عبارت درجه دوم باید دوریشه مثبت متمایز و مخالف یک داشته باشد یعنی:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 16 > 0 \\ s > 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow a < 0 \\ p > 0 \Rightarrow 4 > 0 \\ 1 + a + 4 \neq 0 \end{array} \right\} a < -4 \text{ و } a \neq -5$$



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به این که نمودار $y = f(x - 2)$ داریم برای رسم $y = f(x)$ باید نمودار را دو واحد به طرف چپ منتقل کنیم.



$$\sqrt{xf(x)} \Rightarrow xf(x) \geq 0 \xrightarrow{\text{هم علامت باشند و } f(x) \text{ باید}} \begin{cases} x \geq 0 \text{ و } f(x) \geq 0 \Rightarrow x \in [0, 2] \\ x \leq 0 \text{ و } f(x) \leq 0 \Rightarrow x \in [-5, -3] \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = [-5, -3] \cup [0, 2]$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = 1 \Rightarrow \frac{\sin 2x}{\sin x} \Rightarrow \sin 2x = \sin x$$

$$2x = 2k\pi + x \Rightarrow x = k\pi \quad \text{غ ق ق}$$

$$2x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

دقت شود $\sin x$ در مخرج کسر قرار دارد و ریشه‌های $\sin x$ جزء دامنه نمی‌باشد. پس $x = k\pi$ باید از مجموعه جواب حذف شود، یعنی جواب کلی معادله برابر است با: $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باید معادله‌ی تلاقی نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ با نیم‌ساز ناحیه‌ی اول ($y = x$) ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x \Rightarrow 2x^2 + mx + m + 6 = 0 \xrightarrow{\Delta=0} m^2 - 2(2)(m+6) = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m - 12 = 0 \Rightarrow (m-12)(m+4) = 0 \Rightarrow m = 12, m = -4$$

چون تأکید شده نمودار بر نیم‌ساز ناحیه‌ی اول مماس است. ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی تلاقی (طول نقطه‌ی تماس) باید مثبت باشد.

$$m = 12 \Rightarrow 2x^2 + 13x + 18 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \quad \text{ریشه‌ی مضاعف منفی دارد.}$$

$$m = -4 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \text{ریشه‌ی مضاعف مثبت دارد.}$$

پس $m = -4$ صحیح است. نمودار بر نیم‌ساز ربع اول مماس است.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار رسم شده متوجه می‌شویم دوره‌ی تناوب تابع ۶ می‌باشد و می‌دانیم

دوره‌ی تناوب تابع $y = a \sin bx$ از رابطه‌ی $T = \frac{2\pi}{|b|}$ به دست می‌آید. پس داریم:

$$y = a \sin(b\pi x) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = 6 \Rightarrow \frac{2\cancel{\pi}}{|b|\cancel{\pi}} = 6 \Rightarrow \frac{1}{|b|} = 3 \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$$

از طرفی در تابع $y = a \sin bx$ ماکزیمم تابع برابر $|a|$ است. چون در حاصل ماکزیمم برابر ۲ است. پس:

$$|a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2 \quad \text{در انتها دقت شود با توجه به آن که تابع بلافاصله بعد از } x = 0 \text{ افزایش می‌یابد. باید علامت } a \text{ و } b$$

یکسان باشند. یعنی برای a و b دو حالت ایجاد می‌شود.

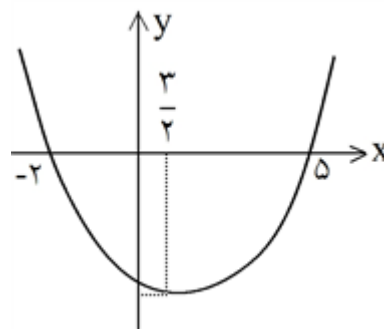
$$a = 2, b = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 2 \sin \frac{\pi x}{3} \Rightarrow a + b = \frac{7}{3}$$

$$a = -2, b = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = -2 \sin \left(\frac{-\pi x}{3} \right) = 2 \sin \frac{\pi x}{3} \Rightarrow a + b = -\frac{5}{3}$$

۱۳۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $y = x^2 - 3x - 10$ یک سهمی قائم است که محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند.

$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 5, x = -2$
طول ۲- قطع کرده است. اگر سهمی را ۲ واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم، سهمی از مبدأ خواهد گذشت و دیگر طول تلاقی‌اش با محور x ها منفی نیست. به نمودار روبه‌رو دقت کنید.



۱۳۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از تساوی‌های زیر داریم:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \text{ و } \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\frac{1}{2} (\sin(4x + 2x) + \sin(4x - 2x)) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(2x - \frac{\pi}{2} \right) \right) \Rightarrow \sin 6x + \sin 2x = 1 + \sin 2x$$

$$\Rightarrow \sin 6x = 1 \Rightarrow 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}$$

۱۳۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 12x^2 + 7x + 3 \\ -6x^2 + 2x^2 \\ \hline -6x^2 + 7x \\ +6x^2 - 4x \\ \hline 3x + 3 \\ -3x + 2 \\ \hline 5 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 3x - 2 \\ x^2 - 2x + 1 \end{array} \right| \xrightarrow{x = -1} 1 + 2 + 1 = 4$$

۱۳۵

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\cos^3 x + 3 \cos x = 4 \xrightarrow{\cos x = t} t^3 + 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t - 1)(t^2 + t + 4) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t - 1 = 0 \Rightarrow t = \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \Rightarrow \{ \dots, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \dots \} \\ t^2 + t + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 16 = -15 < 0 \Rightarrow \text{ریشه ی حقیقی ندارد.} \end{array} \right.$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، معادله‌ی فوق در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ ، تنها دو ریشه به مقادیر $x = 2\pi, x = 0$ دارد.

۱۳۶

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sin x \cos 6x = 1 - \sin 6x \cos x \Rightarrow \sin x \cdot \cos 6x + \cos x \cdot \sin 6x = 1 \Rightarrow \sin(x + 6x) = 1$$

$$\Rightarrow \sin 7x = 1 \Rightarrow 7x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div 7} x = \frac{2k\pi}{7} + \frac{\pi}{14}; k \in \mathbb{Z}$$

با جای‌گذاری $k = 1$ ، یکی از جواب‌های معادله $x = \frac{5\pi}{14}$ به دست می‌آید.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۳۷

$$\begin{aligned} \cos 3x \sin (3\pi - x) - \sin 3x \cos (\pi + x) &= \cos \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \cos 3x \cdot \sin (\pi - x) - \sin 3x \cdot (-\cos x) = . \\ \Rightarrow \cos 3x \cdot \sin x + \sin 3x \cdot \cos x &= . \Rightarrow \sin (3x + x) = . \Rightarrow \sin 4x = . \Rightarrow \\ 4x &= k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۳۸

$$\begin{aligned} 2 \tan x \cos^2 x &= 1 \Rightarrow 2 \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos^2 x = 1 \Rightarrow 2 \sin x \cdot \cos x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 1 \\ \Rightarrow 2x &= 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۳۹

$$\begin{aligned} \cos^2 x + 3 \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + 2 &= . \Rightarrow \cos^2 x + 3 \cos x + 2 = . \xrightarrow{\cos x = t} \\ t^2 + 3t + 2 &= . \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi \\ \cos x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به این که $x(x+1)(x+2)(x+3)$ بر $(x+1)(x+2)$ بخش پذیر می باشد، بنابراین

باقی مانده $f(x)$ بر $(x+1)(x+2)$ برابر است با باقی مانده $3x^2 + 5x + 1$ بر $(x+1)(x+2)$:

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 5x + 1 \quad | \quad x^2 + 3x + 2 \\ -(3x^2 + 9x + 6) \quad \quad \quad 3x - 9 \\ \hline -9x^2 - x + 1 \\ -(-9x^2 - 27x - 18) \\ \hline 26x + 19 \end{array} \rightarrow a = 26, b = 19 \rightarrow a - b = 7$$

راه دوم:

$$\begin{aligned} f(x) &= x(x+1)(x+2)(x+3)Q(x) + 3x^2 + 5x + 1 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(-1) = -7 \\ f(-2) = -33 \\ f(-3) = -95 \end{cases} \\ f(x) &= (x+1)(x+2)Q'(x) + (ax+b) \Rightarrow \begin{cases} -a+b = f(-1) = -7 \\ -2a+b = f(-2) = -33 \end{cases} \\ a &= 26, b = 19 \Rightarrow a - b = 7 \end{aligned}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا با یک دسته بندی مناسب، قسمتی از چند جمله ای $f(x)$ را که بر $x^2 + 1$ بخش پذیر

$$f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + x + 1) + x^3 - x + 2 \rightarrow \text{است، مشخص می کنیم:}$$

$$\rightarrow f(x) = (x^2 + 1) \underbrace{(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)}_{g(x)} + x^3 - x + 2$$

$$\rightarrow f(x) = (x^2 + 1)g(x) + x^3 - x + 2$$

لذا کافی است فقط باقی مانده $h(x) = x^3 - x + 2$ بر $x^2 + 1$ به دست آوریم (زیرا بقیه ی قسمت های چند

$$\begin{array}{r} x^3 - x + 2 \quad | \quad x^2 + 1 \\ -(x^3 + x) \quad \quad \quad x \\ \hline -2x + 2 = \text{باقی مانده} \end{array}$$

جمله ای $f(x)$ بر $x^2 + 1$ بخش پذیر است):

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۴۲

$$2 \cos 2x = \cot x (2 \sin x + \tan x)$$

$$\Rightarrow 2 \cos 2x = 2 \sin x \cot x + \cot x \tan x$$

$$\Rightarrow 2(2 \cos^2 x - 1) = 2 \cos x + 1 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 2 \cos x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (2 \cos x + 1)(2 \cos x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{3}{2} \text{ غ ق ق} \\ \cos x = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$|a| = 3$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به نمودار، بیشترین مقدار تابع برابر ۳ است پس: ۱۴۳

همچنین با توجه به این که تابع سه دوره تناوب طی کرده تا به ۳ رسیده، پس:

$$3T = 3 \Rightarrow T = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 1 \Rightarrow |b| = 2$$

با توجه به این که مقدار تابع در بازه $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ نزولی است بنابراین تابع به صورت‌های زیر است:

$$y = -2 \sin 2\pi x \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a \cdot b = -4$$

$$y = 2 \sin(-2\pi x) \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow a \cdot b = -4$$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ > 0 \text{ (حاصل ضرب دو ریشه)} \\ < 0 \text{ (مجموع دو ریشه)} \end{cases}$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۴۴

$$\Delta = (a + 3)^2 - 4a(-1) > 0 \Rightarrow a^2 + 10a + 9 > 0$$

$$\Rightarrow (a + 9)(a + 1) > 0 \Rightarrow a > -1 \text{ یا } a < -9 \quad (1)$$

$$(2) \quad > 0 \text{ (حاصل ضرب دو ریشه)} \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-1}{a} > 0 \Rightarrow a < 0$$

$$(3) \quad < 0 \text{ (مجموع دو ریشه)} \Rightarrow -\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{-(a + 3)}{a} < 0 \Rightarrow a > 0 \text{ یا } a < -3$$

$$(1) \cap (2) \cap (3) \Rightarrow a < -9$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۱۴۵

$$\frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)} = \sqrt{2} \Rightarrow \tan(2x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ۱۴۶

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} - 2x = k\pi \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} - k\pi \Rightarrow x = \left(\frac{1}{4} - k\right) \frac{\pi}{2}$$

$$-\pi \leq \left(\frac{1}{4} - k\right) \frac{\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -8 \leq \frac{1}{4} - k \leq 12 \Rightarrow -2/25 \leq k \leq 2/75 \Rightarrow k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$(\sin x - \tan x) \tan\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \text{ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۱۴۷}$$

$$(\sin x - \tan x) \cdot \cot x = -\cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin x \cdot \cot x - 1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} - 1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \text{ چون } \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ داریم:}$$

$$\begin{array}{r}
 2x^2 + 8x^2 - 11x \\
 -(2x^2 - 2x^2) \\
 \hline
 10x^2 - 11x \\
 -(10x^2 - 5x) \\
 \hline
 -6x \\
 -(-6x + 3) \\
 \hline
 -3
 \end{array}$$

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 3 = .$$

مقدار $2x^2 + 5x - 3$ را به ازای $x = \frac{1}{2}$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{array}{r}
 2x - 1 \\
 \hline
 2x^2 + 5x - 3
 \end{array}$$

گزینه‌ی ۱ پاسخ صحیح است. بدیهی است نقاط $(1, 0)$ و $(0, -6)$ و $(-2, -6)$ در تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ صدق می‌کنند.

$$(0, -6) \Rightarrow c = -6$$

$$(1, 0) \Rightarrow a + b - 6 = .$$

$$(-2, -6) \Rightarrow 4a - 2b - 6 = -6 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ 4a - 2b = 0 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases} \end{cases}$$

پس تابع داده شده به صورت $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ خواهد بود که $f(-1) = 2 - 4 - 6 = -8$ برابر است با:

گزینه‌ی ۴ پاسخ صحیح است. ۱۵۰

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{روش اول: } \left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3}\right) \left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x\right) \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} \cos^2 x - \frac{3}{4} \sin^2 x$$

$$\Rightarrow \cos^2 x - 3 \sin^2 x = -2 \Rightarrow 1 - \sin^2 x - 3 \sin^2 x = -2 \Rightarrow 4 \sin^2 x = 3 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\sin^2 x = \sin^2 \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\text{روش دوم: } \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\text{پس داریم: } \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \left[\cos\left(x + \frac{\pi}{3} + x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3} - x + \frac{\pi}{3}\right) \right] = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 2x + \cos \frac{2\pi}{3} = -1 \Rightarrow \cos 2x - \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق فرض نمودار تابع $f(x) = 2x^2 - 5x - x + m$ ، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند. پس:

$$f(2) = 0 \Rightarrow 16 - 10 - 2 + m = 0 \Rightarrow m = 6$$

$$f(x) = 2x^2 - 5x - x + 6$$

بنابراین با توجه به این‌که یکی از ریشه‌های این تابع $x = 2$ است، بنابراین $f(x)$ بر $x - 2$ بخش‌پذیر است. با تقسیم $f(x)$ بر $x - 2$ ، خارج قسمت تقسیم $2x^2 - x - 3$ می‌شود. بنابراین:

$$f(x) = (x - 2)(2x^2 - x - 3)$$

به این ترتیب ریشه‌های دیگر f (غیر از $x = 2$) از معادله $2x^2 - x - 3 = 0$ به دست می‌آید:

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow (x + 1)(2x - 3) = 0 \Rightarrow x = -1, \frac{3}{2}$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $f(x) = (a - 1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$.

شرط این‌که نمودار تابع درجه‌ی ۲، f بالای محور x ها باشد، این است که $\Delta < 0$ و ضریب x^2 مثبت باشد.

$$a - 1 > 0 \Rightarrow a > 1$$

$$\Delta' = (\sqrt{2})^2 - a(a - 1) = 2 - a^2 + a \xrightarrow{\Delta' < 0} 2 - a^2 + a < 0$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 2 > 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 1) > 0 \Rightarrow a < -1 \text{ یا } a > 2$$

با توجه به شرط $a > 1$ پس $a > 2$ صحیح است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sin 2x = \cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \\ 2x = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \quad (1) \\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (2) \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{4}(k + 1) \quad \text{دسته جواب ۱:}$$

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \quad \text{دسته جواب ۲:}$$

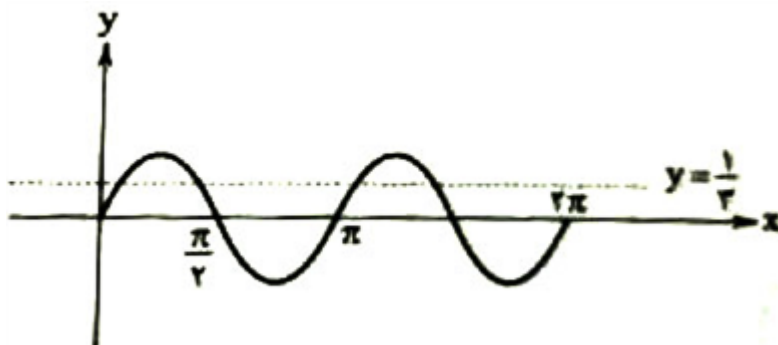
$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4} = \frac{2\pi}{4}$$

بنابراین مجموع جواب‌های متمایز این معادله برابر است با:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بایستی ریشه‌های مخرج را حساب کنیم.

$$2 \sin x \cos x - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{3}$$

معادله چهار جواب دارد، یعنی تابع $f(x)$ در چهار نقطه تعریف نمی‌شود.



۱۵۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow |b| = 6$$

$$\max f(x) = |a| = 2$$

بنابراین بیشترین مقدار $a + b$ برابر ۸ است.

۱۵۶

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$g(x) = x^2(x-2) - (x-2) = (x-2)(x^2-1) = (x-2)(x-1)(x+1)$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 1, x = -1$$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = -1 & (1) \\ f(-1) = 0 \Rightarrow a - b + c = 1 & (2) \\ f(2) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0 & (3) \end{cases}$$

$$2b = -2 \Rightarrow b = -1$$

معادله‌های ۱ و ۲ را از هم کم می‌کنیم:

اکنون معادله‌های ۲ و ۳ را در یک دستگاه حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ 3a + 2a - 2 + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ 5a + c = 2 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 4a = -2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}$$

$$f(-2) = -3a + 2a - 2 + c = -3(-\frac{1}{2}) - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

۱۵۷

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x+2) = 2(x+2) + 8 - (x+2)^2 = 2x + 4 - x^2 - 4x - 4 = -x^2 - 2x$$

$$f(x+2) = g(x) \Rightarrow -x^2 - 2x = -5x^2 \Rightarrow 4x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x(4x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, 1, -\frac{2}{5}$$

$$y = f(2x-1) \xrightarrow{A(-1,1)} f(-2) = 1$$

۱۵۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x}{2} = -3 \Rightarrow x = -6$$

$$g(-6) = \sqrt{\frac{-6 + f(-3)}{-6 + 7}} = \sqrt{\frac{-6 + 10}{1}} = 2 \Rightarrow (-6, 2) \in g(x)$$

۱۵۹

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{2}{\sin 2x} = 2 \sin 2x \cos 2x \Rightarrow \frac{1}{\sin 2x} = \sin 2x \cos 2x \Rightarrow \frac{1}{\cos 2x} = \sin 2x \cos 2x \Rightarrow \frac{1}{\cos 2x} = \sin 2x \cos 2x \Rightarrow 1 = \sin 2x \cos 2x$$

$$= 2 \sin 2x \cos 2x \Rightarrow 2 \sin 2x \cos 2x = 1 \Rightarrow \sin 4x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 4x = \frac{1}{2} \Rightarrow 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{24}$$

هیچ‌کدام از جواب‌های به دست آمده مخرج کسر معادله اصلی را صفر نمی‌کند، پس قابل قبول هستند.



$$2 \sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$$

$$I) \sin 2x = -1 \Rightarrow 1 + \sin 2x = 0 \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = 0$$

جوابهای این معادله غیرقابل قبول است، زیرا مخرج کسر را صفر می‌کند.

$$II) \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{12} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} \\ x = \frac{13\pi}{12} \end{cases} \\ 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} \\ x = \frac{17\pi}{12} \end{cases} \end{cases}$$

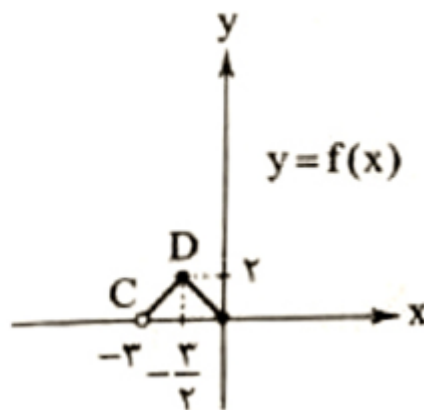
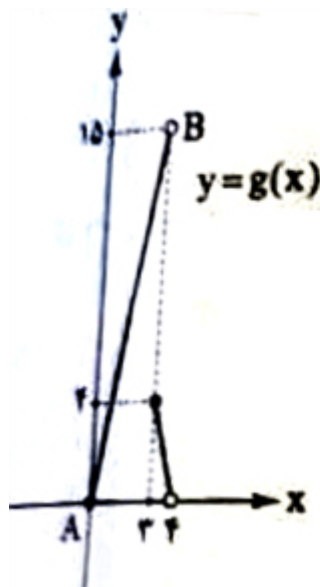
بنابراین معادله ۴ جواب در ؟

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دوره تناوب $g(x)$ برابر ۴ است. بنابراین داریم:

$$g(24) = g(24 + 4) = g(28)$$

$$g(2) = 5(2) = 10$$

در تابع $g(x)$ معادله پاره خط AB به صورت $y = 5x$ می‌باشد. بنابراین داریم:



$$f(g(24)) = f(10)$$

بنابراین داریم:

$$f(10) = f(10 - 12) = f(-2)$$

دوره تناوب تابع $f(x)$ برابر ۳ می‌باشد. پس می‌توان گفت:

برای یافتن $f(-2)$ معادله خط CD را می‌نویسیم:

$$CD: y - 0 = \frac{0 - 2}{-2 - (-\frac{2}{3})}(x + 2) \Rightarrow y = \frac{2}{3}(x + 2) \Rightarrow f(-2) = \frac{2}{3}(-2 + 2) = \frac{2}{3}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باقی‌مانده تقسیم $(f \circ f)(x+1)$ بر $x-1$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{باقی مانده} = (f \circ f)(2) = f(f(2))$$

$$\begin{cases} g(x) = 2 \Rightarrow \log_2 x = 2 \Rightarrow x = 4 \\ (f \circ g)(x) = \frac{2x+1}{x-1} \xrightarrow{x=4} f(2) = \frac{9}{3} = 3 \\ g(x) = 3 \Rightarrow \log_2 x = 3 \Rightarrow x = 8 \\ (f \circ g)(x) = \frac{2x+1}{x-1} \xrightarrow{x=8} f(3) = \frac{17}{2} \end{cases}$$

$$f(f(2)) = f(3) = \frac{17}{2}$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم برابر است با:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ضابطه اول را ساده می‌کنیم. (ضابطه اول را $f_1(x)$ و ضابطه دوم را $f_2(x)$ می‌نامیم).

$$f_1(x) = -x^2 + 3x^2 - 2x + 1 - 1 - 2a + 4 = -(x-1)^2 + 3 - 2a$$

این تابع به ازای هر مقدار از a اکیداً نزولی است. بنابراین برد تابع به ازای $x \leq 1$ برابر است با:

$$R_{f_1} = [f_1(1), +\infty) = [3 - 2a, +\infty)$$

ضابطه دوم یک سهمی است، برای آن‌که در بازه $x > 1$ اکیداً نزولی باشد لزوماً داریم:

$$-a < 0 \Rightarrow a > 0 \quad (1)$$

(توجه شود اگر $a = 0$ باشد، خط $y = 4x - 2$ اکیداً صعودی خواهد بود پس $a \neq 0$ باید باشد.)

$$R_{f_2} = (-\infty, f_2(1)] = (-\infty, -a + 2]$$

برد ضابطه دوم به شکل مقابل است:

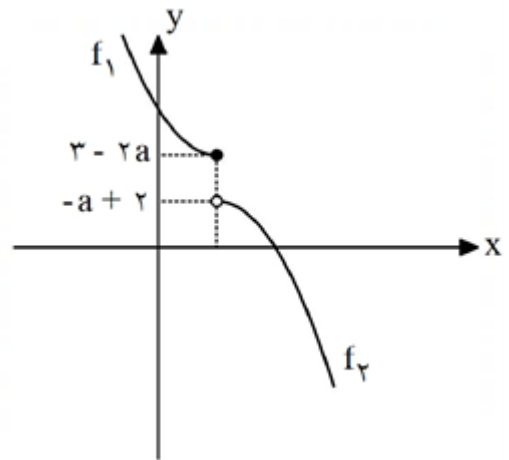
از طرفی تابع در $x = 1$ دارای پرش است و در این پرش نیز تابع $f(x)$ باید اکیداً نزولی باشد، بنابراین داریم:

$$3 - 2a \geq -a + 2 \Rightarrow a \leq 1 \quad (2)$$

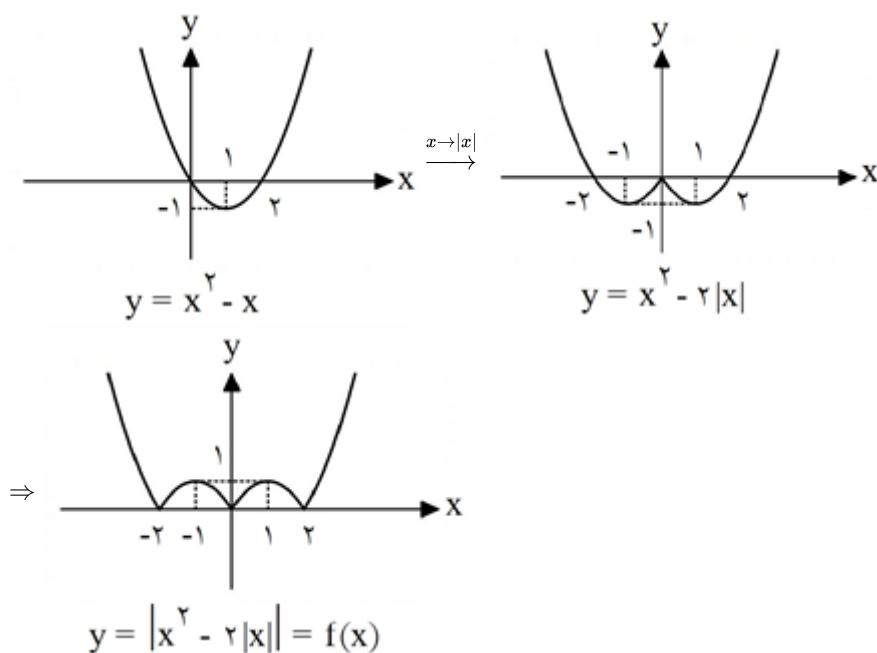
$$\frac{2}{a} \leq 1 \Rightarrow a \geq 2 \text{ یا } a < 0 \quad (3)$$

از طرفی باید طول رأس سهمی کمتر یا مساوی ۱ باشد:

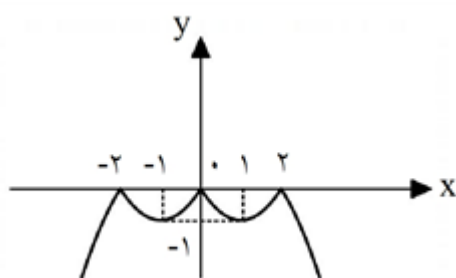
اشتراک روابط ۱، ۲ و ۳ برابر تهی است یعنی شکل زیر امکان‌پذیر نیست.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودار $f(x)$ را با مراحل زیر رسم می‌کنیم.

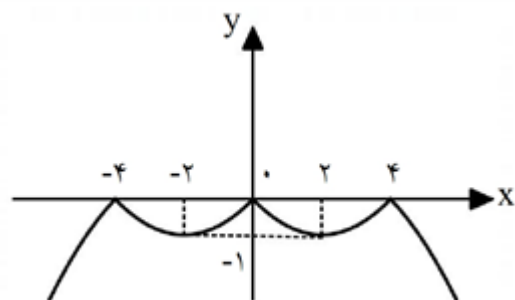


حالا تبدیلات روی تابع $f(x) = |x^2 - 2|x||$ را به ترتیب اعمال می‌کنیم.
(۱) قرینه نسبت به محور x ها

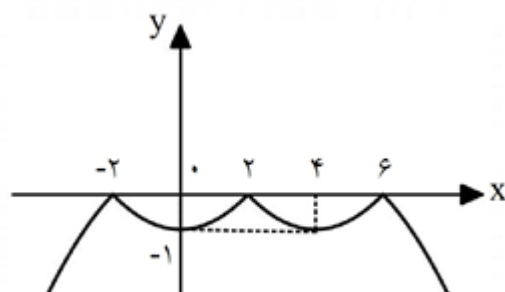


$$y = -|x^2 - 2|x||$$

(۲) انبساط ۲ برابری در راستای محور x ها



$$y = -|x^2 - 2|x| \xrightarrow{x \rightarrow \frac{x}{2}} y = -\left|\frac{x^2}{4} - |x|\right|$$



(۳)

$$y = -\left|\frac{x^2}{4} - |x|\right| \xrightarrow{x \rightarrow x-2} y = -\left|\frac{(x-2)^2}{4} - |x-2|\right|$$

ملاحظه می‌شود نمودار نهایی در بازه $[0, 2]$ و همچنین در بازه $[4, 6]$ اکیداً صعودی است. پس بیشترین مقدار α برابر ۲ و

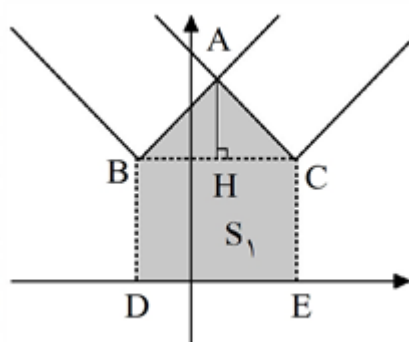
$$2 + 6 = 8$$

بیشترین مقدار β برابر ۶ خواهد بود و بیشترین مقدار $\alpha + \beta$ برابر است با:

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در جابه‌جایی تابع $y = |x - a| + ۳$ داریم: (با توجه به گزینه‌ها مقدار a مثبت است.)

$$\begin{cases} \text{واحد به راست } a \Rightarrow y = |x - a - a| + ۳ = |x - ۲a| + ۳ \\ x \rightarrow x - a \\ \text{واحد به چپ } ۲a \Rightarrow y = |x + ۲a - a| + ۳ = |x + a| + ۳ \\ x \rightarrow x + ۲a \end{cases}$$

بنابراین در شکل تشکیل شده داریم:



$$\begin{cases} BC = DE = ۲a - (-a) = ۳a \\ BD = CE = ۳ \\ \Rightarrow S_1 = ۳(۳a) = ۹a \end{cases}$$

برای یافتن مساحت مثلث ABC داریم:

$$\begin{aligned} x_A = \frac{۲a + (-a)}{۲} = \frac{a}{۲} \Rightarrow y_A = \left| \frac{a}{۲} + a \right| + ۳ = \left| \frac{۳a}{۲} \right| + ۳ \Rightarrow AH = \left| \frac{۳a}{۲} \right| \\ \Rightarrow S_{ABC} = \frac{\frac{۳a}{۲} \times ۳a}{۲} = \frac{۹a^۲}{۴} \Rightarrow S = ۱۶ \Rightarrow \frac{۹a^۲}{۴} + ۹a = ۱۶ \Rightarrow ۹a^۲ + ۳۶a - ۶۴ = ۰ \\ \Rightarrow (۳a - ۴)(۳a + ۱۶) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{۱۶}{۳} \text{ غ ق} \\ a = \frac{۴}{۳} \end{cases} \end{aligned}$$

$$۲ \sin^۲ x = ۲ \cos x \Rightarrow ۲(1 - \cos^۲ x) = ۲ \cos x \Rightarrow ۲ \cos^۲ x + ۲ \cos x - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}$$

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (۲)^۲ - ۴(۲)(-۲) = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow \Delta = ۲۵$$

$$\cos x = \frac{-۲ \pm \sqrt{۲۵}}{۲(۲)} = \frac{-۲ \pm ۵}{۴} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{۲} \text{ ق} \\ -۲ \text{ غ ق} \end{cases}$$

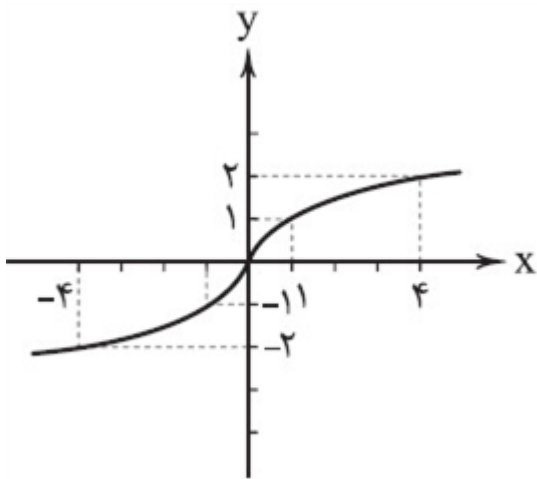
$$\cos x = \frac{۱}{۲} = \cos \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}, k \in \mathbb{Z}$$

$$T = \frac{۲\pi}{|a|} = \frac{۲\pi}{\left|\frac{۱}{۳}\right|} = ۶\pi \text{ بنابراین } T = \frac{۲\pi}{|a|} \text{ می‌دانیم که دوره تناوب تابع } y = b \cos ax + c \text{ برابر است با:}$$

$$x^۶ - ۱ = (x - ۱)(x^۵ + x^۴ + x^۳ + x^۲ + x + ۱)$$

(ب) انقباض افقی

(الف) انبساط عمودی



$y = \sqrt{x}$	x	0	1	4
	y	0	1	2

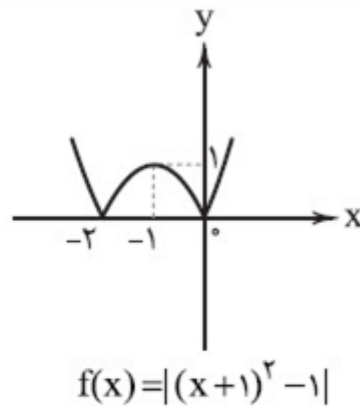
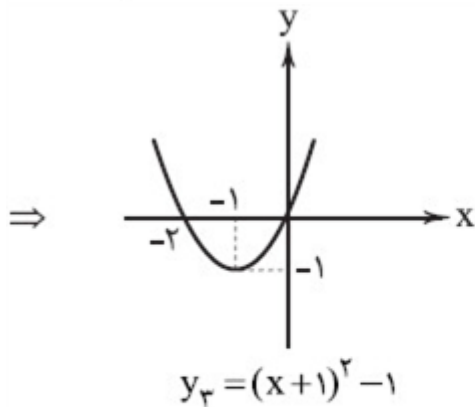
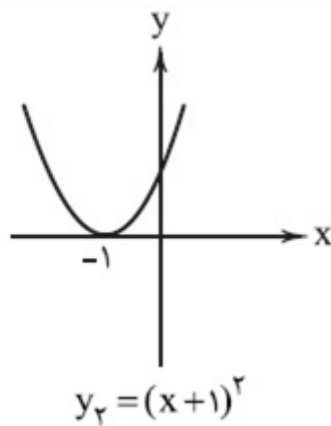
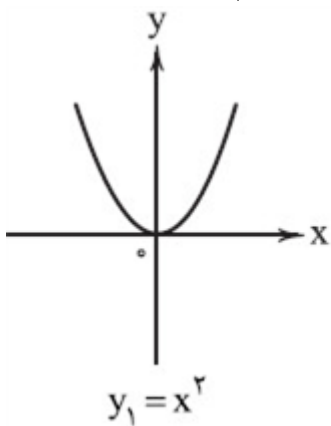
$y = -\sqrt{-x}$	x	-4	-1	0
	y	-2	-1	0

۱۷۰

این تابع اکیدا یکنوا (اکیداً صعودی) می‌باشد.

$$f(x) = |2x + x^2| = |(x+1)^2 - 1|$$

۱۷۱



$(-2, -1) \leftarrow$ صعودی

$(0, +\infty) \leftarrow$ صعودی

$(-\infty, -2) \leftarrow$ نزولی

$(-1, 0) \leftarrow$ نزولی



ابتدا ریشه‌های $x - 1$ و $x - 2$ را به دست آورده و در تابع چندجمله‌ای $P(x)$ قرار داده و باقی‌مانده آن‌ها را مساوی ۳ و ۵-

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

قرار می‌دهیم.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\begin{cases} P(1) = 3 \\ P(2) = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1)^3 + 2(1)^2 - a(1) + b = 3 \\ (2)^3 + 2(2)^2 - a(2) + b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2 - a + b = 3 \\ 8 + 8 - 2a + b = -5 \end{cases}$$

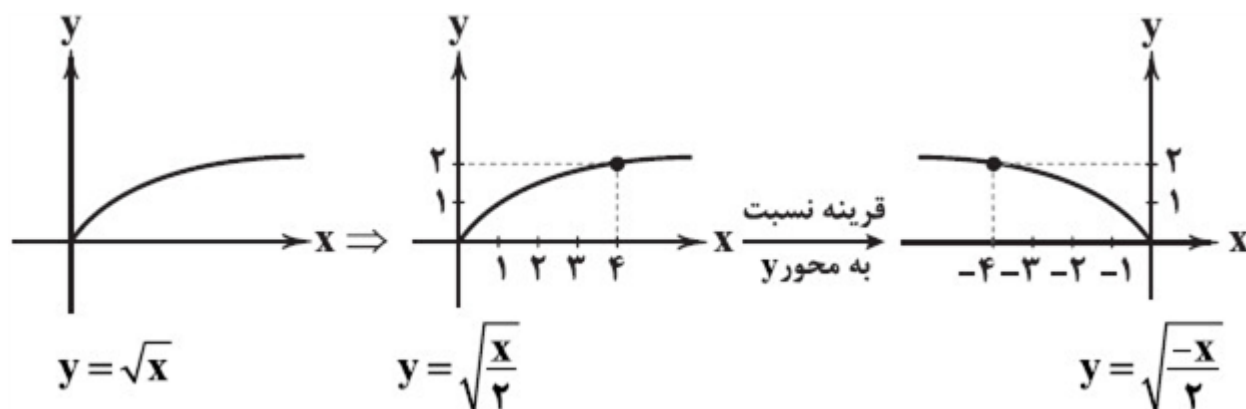
$$\Rightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ -2a + b = -13 \end{cases}$$

$$-a = -13 \Rightarrow a = 13$$

$$-a + b = 0 \Rightarrow -13 + b = 0 \Rightarrow b = 13$$

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 13$$

پس داریم که:



الف) می‌دانیم اگر $f(a) = 0$ باشد؛ آن‌گاه $f(x)$ بر $(x - a)$ بخش‌پذیر است.

$$f(1) = 3(1)^3 + 5(1)^2 - 8 = 0 \Rightarrow f(x) \text{ بر } (x - 1) \text{ بخش‌پذیر است}$$

(ب)

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 5x^2 - 8 & x - 1 \\ - (3x^3 - 3x^2) & 3x^2 + 8x + 8 \\ \hline 8x^2 - 8 & \\ - (8x^2 - 8x) & \\ \hline 8x - 8 & \\ - (8x - 8) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\text{پ)} f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 8 = (x - 1)(3x^2 + 8x + 8)$$

$$\left(\frac{1}{4} \right) \sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin x = \pm 1$$

$$\Rightarrow \sin x = +\frac{1}{2} \text{ یا } -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ یا } \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ است که $k \in \mathbb{Z}$ بنابراین:

$$\text{جواب های کلی} = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, 2k\pi - \frac{\pi}{6}, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}, (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

ب) جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ است که $k \in \mathbb{Z}$ بنابراین:

$$\cos 2x = \cos 2x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + 2x \\ 2x = 2k\pi - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ 2x = 2k\pi \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{2}$$

۱۷۶ می‌دانیم توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب

$$\frac{2\pi}{|b|} \text{ است.}$$

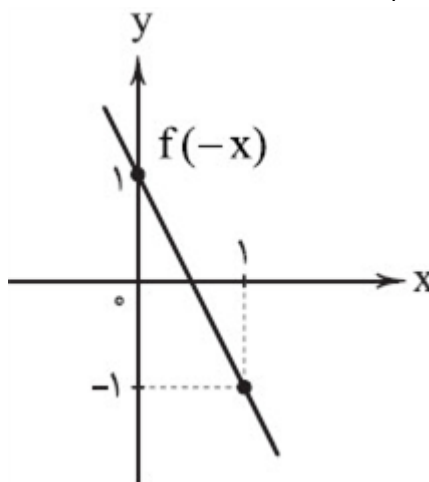
الف) دوره تناوب $= \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{2}\right|} = 4$ ، مینیمم $= -|2| + 5 = 3$ ، ماکزیمم $= |2| + 5 = 7$

ب) دوره تناوب $= \frac{2\pi}{\left|-\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$ ، ماکزیمم $= |3| + (-1) = 2$ ، مینیمم $= -|3| + (-1) = -4$

۱۷۷ الف) با توجه به دامنه تابع $f(x)$ ، عددی که وارد تابع f می‌شود، باید در بازه $[-3, 5]$ باشد؛ پس $2x$ نیز باید این گونه

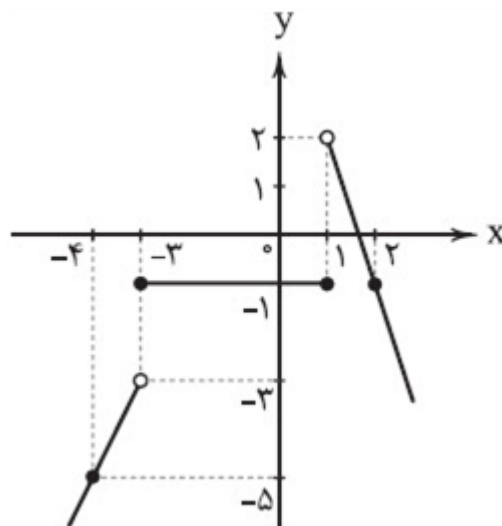
$$-3 \leq 2x \leq 5 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$

باشد:



ب) $f(-x) = 2(-x) + 1 = -2x + 1$

الف) در هر بازه با داشتن دو نقطه، نمودار آن قسمت رسم می‌شود.



ب) تابع در بازه $(-\infty, 1]$: صعودی

تابع در بازه $(1, +\infty)$: نزولی

تابع در بازه $[-3, 1]$: ثابت

۱۷۹ نادرست

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. وارون f را حساب می‌کنیم.

۱۸۰

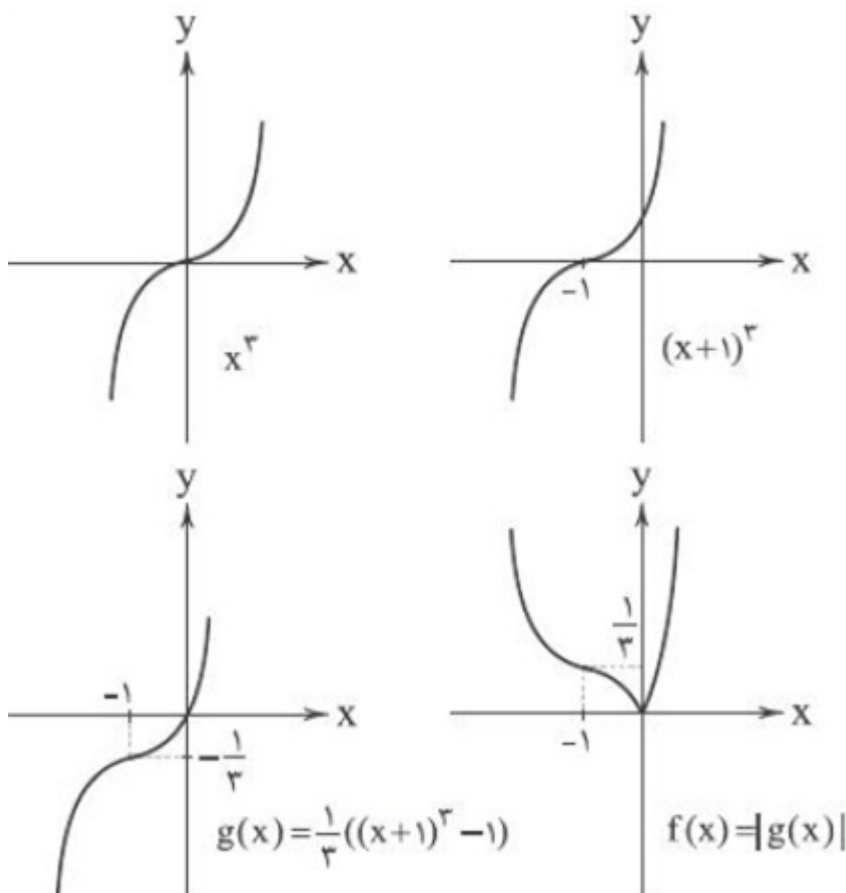
$$y = \frac{2x - 1}{x + 1} \Rightarrow yx + y = 2x - 1 \Rightarrow x(2 - y) = y + 1 \Rightarrow x = \frac{y + 1}{2 - y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{2 - x}$$

$$g(x) = f^{-1}(x) + 2 = \frac{x + 1}{2 - x} + 2 = \frac{9 - x}{2 - x}$$

$$g(x + 2) = \frac{9 - (x + 2)}{2 - (x + 2)} = \frac{7 - x}{-x} = 1 - \frac{5}{x}$$

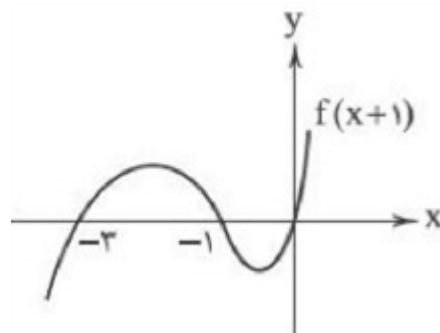
$$g(x) = x \left(\frac{1}{3}x^3 + x + 1 \right) = \frac{1}{3}x^4 + x^2 + x = \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2 + 3x)$$

$$g(x) = \frac{1}{3}((x+1)^3 - 1)$$



نمودار $f(x)$ در بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی است، پس حداکثر مقدار a برابر صفر است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار تابع $f(x+1)$ را رسم می‌کنیم.



اکنون دامنه‌ها را حساب می‌کنیم.

$$f(x)f(x+1) \geq 0$$

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)f(x+1)$	+	0	-	0	+	0	+

دامنه تابع $\sqrt{f(x)f(x+1)}$ برابر است با: $(-\infty, -3] \cup [-2, -1] \cup [1, +\infty) \cup \{0\}$

$$-x-1 > 0 \Rightarrow x < -1$$

حال دامنه $\sqrt{-x-1}$ را حساب می‌کنیم:

اشتراک جواب‌های به دست آمده $(-\infty, -3] \cup [-2, -1)$ است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع $(f \circ f)(x)$ بر $x - 1$ بخش پذیر است، بنابراین داریم:

$$(f \circ f)(1) = 0 \Rightarrow f(5 - k) = 0 \Rightarrow (5 - k)^2 + 3(5 - k) - k + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 25 - 10k + k^2 + 15 - 3k - k + 1 = 0 \Rightarrow k^2 - 14k + 41 = 0 \Rightarrow k_1 k_2 = \frac{c}{a} = 41$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. صفرهای تابع $y = 2f\left(3 - \frac{2x}{4}\right)$ اعداد $x = 1$ و $x = -4$ هستند، بنابراین صفرهای تابع

$y = f(x)$ را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\begin{cases} 3 - \frac{2}{4}(-4) = 3 + 2 = 6 \\ 3 - \frac{2}{4}(1) = \frac{9}{4} \end{cases}$$

بنابراین صفرهای تابع $-3f(3 - 2x)$ به صورت زیر خواهند بود.

$$\begin{cases} \frac{6-3}{-2} = -\frac{3}{2} \\ \frac{\frac{9}{4}-3}{-2} = \frac{-\frac{3}{4}}{-2} = \frac{3}{8} \end{cases}$$

بنابراین تابع $-3f(3 - 2x)$ بر $x + \frac{3}{2}$ و $x - \frac{3}{8}$ بخش پذیر است. یعنی تابع $-3f(3 - 2x)$ بر عبارت های $2x + 3$ و $8x - 3$ و در

نتیجه بر عبارت $(2x + 3)(8x - 3) = 16x^2 + 18x - 9$ بخش پذیر خواهد بود.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. عبارت $f(x)$ را به صورت زیر می نویسیم:

$$f(x) = (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 10)(x^2 - 7x + 12) + 2.$$

مقسوم علیه را برابر صفر قرار داده و داریم:

$$(x - 8)(x + 1) + 10 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x - 8 + 10 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x = -2$$

با قرار دادن $x^2 - 7x = -2$ در عبارت مقسوم، باقی مانده به صورت زیر به دست می آید:

$$R = (-2 + 6)(-2 + 10)(-2 + 12) + 20 = 4 \times 8 \times 10 + 20 = 320 + 20 = 340.$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$

عبارت $x^2 = -1$ را در عبارت $2x^{18} + m$ قرار داده و باقی مانده را برابر ۴ قرار می دهیم.

$$2x^{18} + m = 2(x^2)^9 + m = 2(-1)^9 + m = 2 + m = 4 \Rightarrow m = 2$$

اگر خارج قسمت تقسیم را $Q(x)$ بنامیم، باقی مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x + 1$ برابر $Q(-1)$ خواهد بود.

برای یافت $Q(-1)$ ابتدا رابطه تقسیم را برای تقسیم اصلی می نویسیم.

$$2x^{18} + 2 = (x^2 + 1)Q(x) + 4 \Rightarrow 2x^{18} - 2 = (x^2 + 1)Q(x)$$

$$\Rightarrow 2 \left[(x^2)^9 - 1^9 \right] = (x^2 + 1)Q(x) \Rightarrow 2 \left[(x^2 + 1)(x^{18} - x^{16} + x^{14} - x^{12} + x^{10} - x^8 + x^6 - x^4 + x^2 - 1) \right]$$

$$= (x^2 + 1)Q(x) \Rightarrow Q(x) = 2(x^{18} - x^{16} + x^{14} - x^{12} + x^{10} - x^8 + x^6 - x^4 + x^2 - 1)$$

$$\Rightarrow Q(-1) = 2(-1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1) = 2(-10) = -20$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع $f^{-1}(x-2) - 1$ بر $x-9$ بخش پذیر است، پس داریم:

$$x-9=0 \Rightarrow x=9 \Rightarrow f^{-1}(9-2)-1=0 \Rightarrow f^{-1}(7)=1 \Rightarrow f(1)=7$$

از طرفی تابع $f(x)$ از درجه سوم است و خارج قسمت آن بر x^2+x یک عدد است. اگر این عدد را m فرض کنیم،

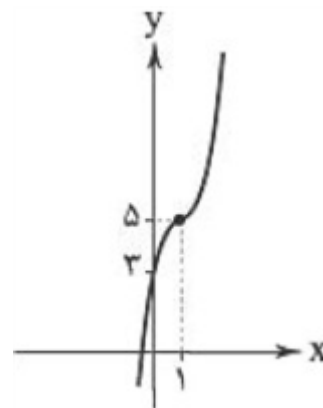
$$f(x) = m(x^2+x) + 3 \quad \text{داریم:}$$

$$f(1) = 7 \Rightarrow m(2) + 3 = 7 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow f(x) = 2x^2 + 2x + 3$$

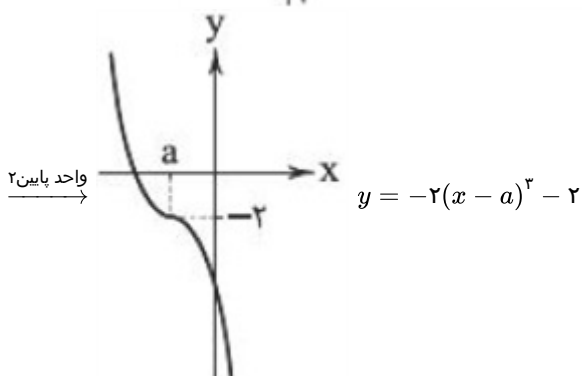
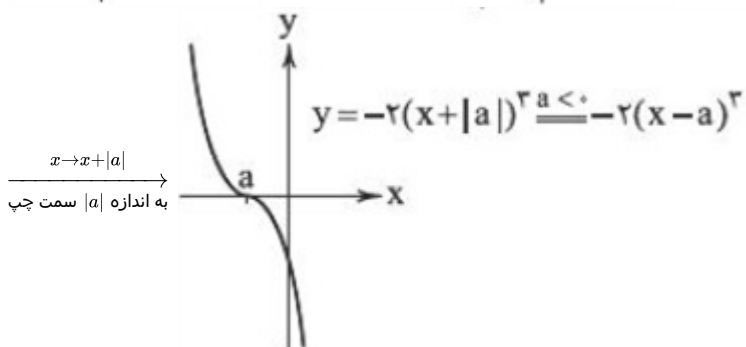
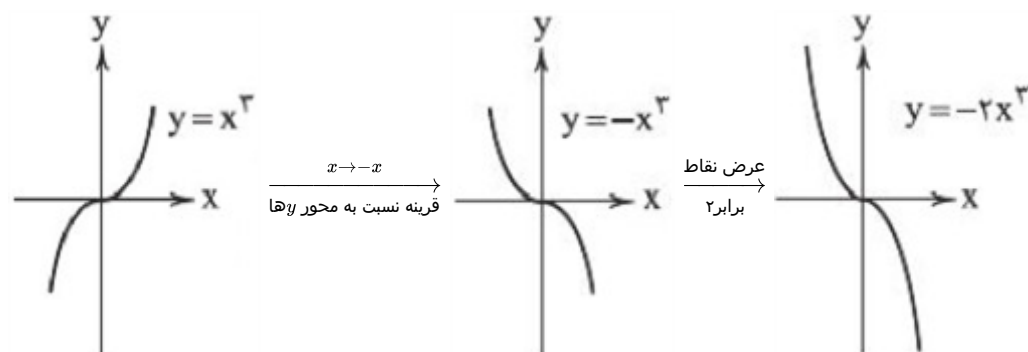
برای رسم تابع $y = f(x) + 4x - 6x^2$ داریم:

$$y = 2x^2 + 2x + 3 + 4x - 6x^2 = 2x^2 - 6x^2 + 6x + 3 = 2x^2 - 6x^2 + 6x - 2 + 5 = 2(x-1)^2 + 5$$

نمودار این تابع به صورت زیر خواهد بود و این تابع از ناحیه ۴ محورهای مختصات نمی‌گذرد.



گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از انتقال نمودار تابع $y = x^r$ با مراحل زیر داریم:



از طرفی می‌دانیم $f(0) = -18$ و داریم:

$$-18 = -r(-a)^r - r \Rightarrow (-a)^r = 8 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow f(x) = -r(x + 2)^r - r = -rx^r - 12x^r - 24x - 18$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3m = -12 \Rightarrow m = 4 \\ 4n = -24 \Rightarrow n = -6 \Rightarrow m + n + k = 7 \\ -2k = -18 \Rightarrow k = 9 \end{cases}$$

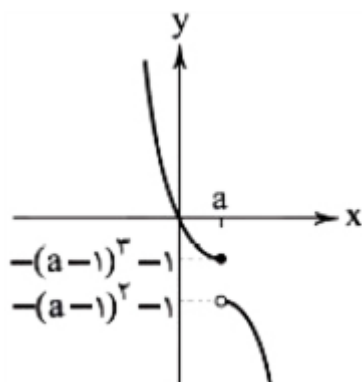
گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $f(x)$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 - 1 & x \leq a \\ -(x-1)^2 - 1 & x > a \end{cases}$$

تابع $y = -(x-1)^2 - 1$ اکیداً نزولی است. برای آن‌که $f(x)$ اکیداً یکنوا باشد، باید داشته باشیم:

الف) تابع $-(x-1)^2 - 1$ در بازه $x > a$ اکیداً نزولی باشد، برای همین باید داشته باشیم $a \geq 1$.

ب) با مشاهده نمودار تقریبی $f(x)$ برای اکیداً نزولی بودن $f(x)$ داریم:



$$\begin{aligned} -(a-1)^2 - 1 &\geq -(a-1)^2 - 1 \Rightarrow (a-1)^2 \leq (a-1)^2 \\ &\Rightarrow a-1 \leq 1 \Rightarrow a \leq 2 \end{aligned}$$

$$[1, +\infty) \cap (-\infty, 2] = [1, 2]$$

بنابراین خواهیم داشت:

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع $f(x)$ اکیداً صعودی است، بنابراین:

الف) $f(-x)$ و $-f(x)$ اکیداً نزولی هستند، بنابراین $g(x)$ اکیداً نزولی است.

ب) $g(x)$ اکیداً نزولی است، بنابراین $g^{-1}(x)$ نیز اکیداً نزولی است. برای تعیین دامنه $h(x)$ داریم:

$$g^{-1}(|2x-1|) - g^{-1}(|x+1|) \geq 0 \Rightarrow g^{-1}(|2x-1|) \geq g^{-1}(|x+1|) \xrightarrow{g^{-1} \text{ اکیدا نزولی}}$$

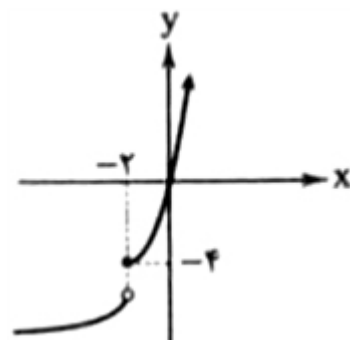
$$|2x-1| \leq |x+1| \Rightarrow (2x-1+x+1)(2x-1-x-1) \leq 0 \Rightarrow (3x)(x-2) \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_{h(x)} = [0, 2]$$

$$\max(b-a) = 2 - 0 = 2$$

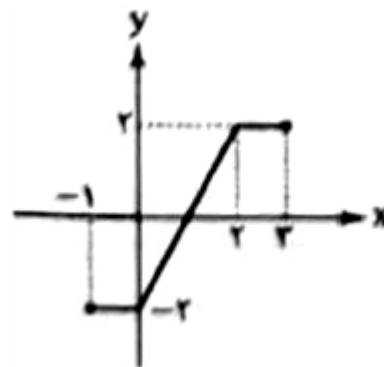
گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

اگر ضابطه اول را در بازه داده شده رسم کنیم خواهیم دید که اکیداً صعودی است. ضابطه $-\sqrt{-2-x}$ اکیداً صعودی است و فقط k واحد به صورت عمودی منتقل می‌شود. بنابراین برای آن‌که f اکیداً صعودی باشد، باید $k \leq -4$ باشد. پس حداکثر مقدار k برابر -4 است.



x	۰	۲
y	-۲	۲

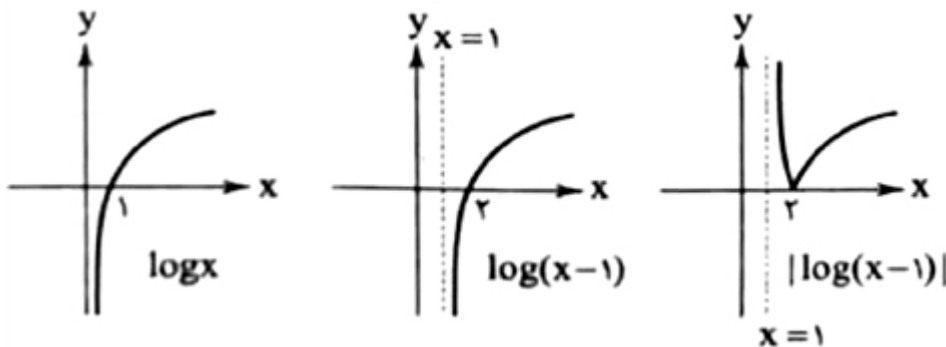
گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار تابع را رسم می‌کنیم: ۱۹۲



این تابع در بازه $[-1, 3]$ صعودی است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار تابع f را طی مراحل زیر رسم می‌کنیم: ۱۹۳

$$\log x \Rightarrow \log(x-1) \Rightarrow |\log(x-1)|$$



$$\max(b-a) = 2-1 = 1$$

تابع $|\log(x-1)|$ در بازه $(1, 2]$ اکیداً نزولی است پس:

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مرکز تقارن تابع $(1, -1)$ است بنابراین: ۱۹۴

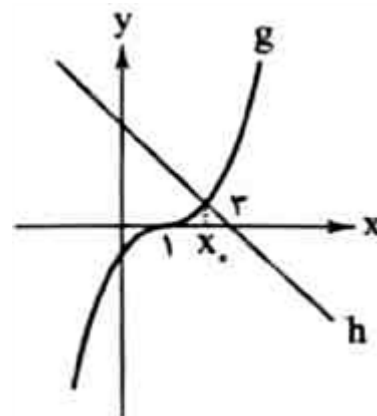
$$f(x) = -(x-1)^2 - 1 \Rightarrow f(-1) = -(-1-1)^2 - 1 = -4 - 1 = -5 \Rightarrow p = -5$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ۱۹۵

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x^2 + 3x - 1 + x - 3 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 3-x$$

نمودارهای $h(x) = 3-x$ و $g(x) = (x-1)^2$ را رسم می‌کنیم:

طبق نمودار، g و h در بازه $(1, 3)$ متقاطع‌اند.

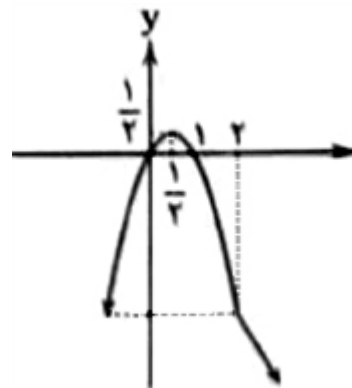


گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع x^3 اکیداً صعودی و $k^2 + 1$ مثبت است، بنابراین $f(x)$ اکیداً صعودی خواهد بود و برای

$$\frac{k-1}{2-k} > 0 \Rightarrow 1 < k < 2 \quad \text{آن که } g(x) \text{ اکیداً صعودی شود داریم:}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x & x \geq 2 \\ 2x(1-x) & x < 2 \end{cases} \quad \text{گزینه ۴ پاسخ صحیح است.}$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



تابع f در بازه $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ اکیداً نزولی است بنابراین حداقل مقدار k برابر $\frac{1}{2}$ است.

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع $\log \frac{1}{x}$ که برابر $-\log x$ است اکیداً نزولی و تابع 2^{-x} نیز اکیداً نزولی است بنابراین تابع f اکیداً نزولی است.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای آن که f بازه هم صعودی، هم نزولی داشته باشد، باید در آن بازه تابع f ثابت باشد، در نتیجه:

$$|b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

$$b = 2 \Rightarrow f(x) = |2x - 1| + 2x \xrightarrow{x \leq \frac{1}{2}} f(x) = 1 - 2x + 2x = 1$$

$$b = -2 \Rightarrow f(x) = |2x - 1| - 2x \xrightarrow{x \geq \frac{1}{2}} f(x) = 2x - 1 - 2x = -1$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون f نزولی اکید است پس از رابطه داده شده نتیجه می‌شود که:

$$\frac{1}{4-x} > 1 \Rightarrow \frac{1}{4-x} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x-3}{4-x} > 0 \Rightarrow 3 < x < 4$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

نمودار f یک سهمی است که غیریکنواست.

$-\sqrt{x}, \sqrt{1-x}$ نزولی اکیداند. پس $h(x)$ نزولی اکید است. تابع $-\frac{1}{x}$ هم غیریکنواست.

$$g(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 6x^2 + 12x) = \frac{1}{3}((x-2)^3 + 8)$$

تابع x^3 صعودی اکید است، بنابراین $g(x)$ نیز صعودی اکید خواهد بود.

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مراحل تغییر را ببینید:

$$f(3x-1) \Rightarrow f(x-1) \Rightarrow f(x+1) \Rightarrow f\left(\frac{x}{2}+1\right)$$

$$[-1, 4] \Rightarrow [-3, 12] \Rightarrow [-5, 10] \Rightarrow [-10, 20]$$

دامنه نیز به همین ترتیب تغییر می‌کند:

۲۰۳

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مراحل زیر برای تابع اتفاق می‌افتد.

$$\frac{1}{x} + 1 \Rightarrow \frac{1}{x-1} + 1 \Rightarrow \frac{1}{2x-1} + 1 \Rightarrow \frac{1}{2x-1} \Rightarrow \frac{2}{2x-1}$$

$$\frac{2}{2x-1} = \frac{1}{x} + 1 \xrightarrow{\times x(2x-1)} 2x = 2x-1 + 2x^2 - x \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$$

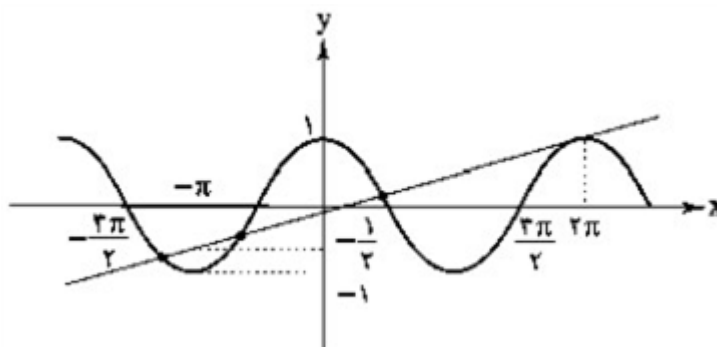
$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow y=2 \\ x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=-1 \end{cases}$$

بنابراین نقاط برخورد $A(1, 2)$ و $B(-\frac{1}{2}, -1)$ خواهد بود.

$$|AB| = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 9} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

۲۰۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. خط $y = \frac{x}{2\pi}$ از دو نقطه $(2\pi, 1)$ و $(-\pi, -\frac{1}{2})$ عبور می‌کند.



ملاحظه می‌کنید که تعداد نقاط برخورد در بازه $(-\frac{2\pi}{2}, \frac{2\pi}{2})$ برابر ۳ تا است.

۲۰۵

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \notin \left\{ \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{3\pi}{4}, \dots \right\}$$

$$\left(\frac{\pi}{4} - x \right) \left(x - \frac{5\pi}{4} \right) > 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow D_f = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right) - \left\{ \frac{3\pi}{4} \right\}$$

$$\Rightarrow a + b + c = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$$

۲۰۶

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به محل برخورد $f(x)$ با محور x داریم:

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = (x - \alpha)(x^2 - (\beta + \gamma)x + \beta\gamma)$$

$$f(x) = x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma$$

با مقایسه داریم:

$$\alpha\beta\gamma = -3 \Rightarrow d = 3$$

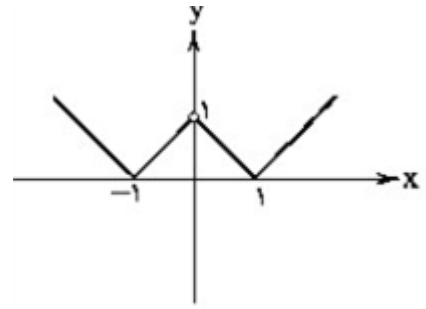
$$f(1) = 1 - 4 + c + 3 = 5 \Rightarrow c = 5$$

$$c^2 + d^2 = 25 + 9 = 34$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نمودار f را رسم می‌کنیم: ۲۰۷

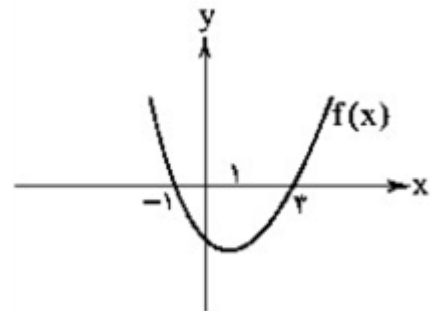
$$x > 0 \Rightarrow f(x) = |x - 1|$$

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = |-x - 1| = |x + 1|$$

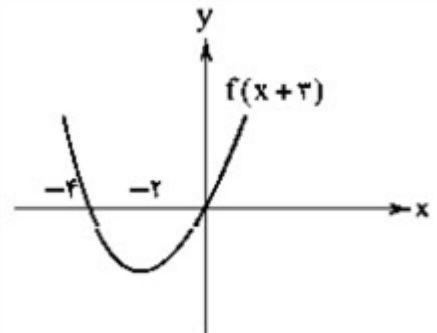


تابع در بازه‌های $(-\infty, -1]$, $(0, 1]$ اکیداً نزولی است بنابراین در بازه $(0, \frac{1}{2})$ نیز اکیداً نزولی خواهد بود.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. یک نمودار تقریبی برای $f(x)$ به صورت زیر خواهد بود. ۲۰۸



اکنون $f(x+3)$ را با انتقال ۳ واحدی $f(x)$ رسم می‌کنیم:



برای حل نامعادله $f(x)f(x+3) \geq 0$ جدول تعیین علامت رسم می‌کنیم:

X	$-\infty$	-4	-1	0	3	$+\infty$
$f(x)f(x+3)$	+	+	-	+	-	+

$$f(x)f(x+3) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -4] \cup [-1, 0] \cup [3, +\infty)$$

$$\tan^2 x \sin^2 x = \tan^2 x - \sin^2 x$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. به راحتی ثابت می‌شود: ۲۰۹

$$f(x) = 1 + \frac{1}{v} \cos vx \Rightarrow T = \frac{2\pi}{v} = \frac{\pi}{2}$$

$$2k - \pi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow k = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow g(x) = \sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}x}{\pi}\right) = \sin\left(\frac{3}{4}x\right)$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق نمودار باید $\frac{1}{4-m}$ و m هم‌علامت باشند. ۲۱۰

$$\frac{m}{4-m} > 0 \Rightarrow 0 < m < 4$$

در بین گزینه‌ها $0 < \pi < 4$ است.



۲۱۱

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فاصله بین یک max و یک min متوالی برابر نصف دوره تناوب است.

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}$$

اگر طول max برابر ۲ باشد، طول min می‌تواند $2 + \frac{\pi}{4}$ یا $2 - \frac{\pi}{4}$ باشد.

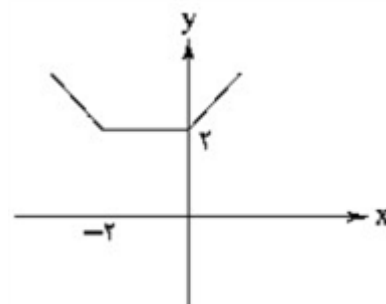
۲۱۲

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. فرایند تبدیل تابع به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} g(x) &\rightarrow g(x-1) \rightarrow g(-x-1) \rightarrow g\left(-\frac{x}{2}-1\right) \\ h(x) &= g\left(\frac{-x}{2}-1\right) = f\left(1-2\left(\frac{-x}{2}-1\right)\right) = f(2+x) \\ h\left(\frac{1}{2}\right) &= f\left(2+\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) \end{aligned}$$

۲۱۳

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نمودار تابع گلدانی $f(x)$ به صورت زیر است:



این تابع در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی و ضابطه آن $g(x) = 2x + 2$ و در نتیجه وارون آن $g^{-1}(x) = \frac{x-2}{2}$ با دامنه $x \geq 2$ خواهد بود.

۲۱۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ضابطه‌ی تابع $g(x)$ در بازه $[-2, 1]$ را با استفاده از مشخصات سهمی می‌نویسیم:

$$\text{رأس } (-1, -2) \Rightarrow y = a(x+1)^2 - 2$$

این سهمی از مبدأ مختصات می‌گذرد بنابراین داریم:

$$0 = a(0+1)^2 - 2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow g(x) = 2(x+1)^2 - 2$$

از طرفی توابع f و g متناوب با دوره تناوب ۳ هستند بنابراین برای هر دو تابع به ازای هر مقدار صحیح k داریم:

$$\begin{cases} f(x+3k) = f(x) \\ g(x+3k) = g(x) \end{cases}$$

یعنی در این دو تابع می‌توان هر مضرب صحیحی از ۳ را به ورودی اضافه یا کم کرد تا ورودی هر یک از دو تابع در بازه $[-2, 1]$ قرار بگیرند، بنابراین داریم:

$$f(-21/5) = f(-21/5 + 21) = f(-1/5) = (-1/5)[0/5] + |-1/5| = (-1/5)(-1) + 0/5 = 0/5 + 0/5 = 1$$

$$g(21/5) = g(21/5 - 21) = g(-1/5) = 2(0/5 + 1)^2 - 2 = 2(2/5) - 2 = 4/5 - 2 = -6/5$$

$$f(-21/5) + g(21/5) = 1 - 6/5 = -1/5$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از رابطه‌ی $\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ ضابطه‌ی تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = a \frac{\left[\sqrt{2} \sin\left(bx - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right]}{\sqrt{2}} + c = a \sin\left(bx - \frac{\pi}{2}\right) + c = -a \cos(bx) + c$$

از روی نمودار سؤال داریم:

$$T + \frac{T}{4} = \frac{5\pi}{12} \Rightarrow \frac{5T}{4} = \frac{5\pi}{12} \Rightarrow T = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow |b| = 6 \Rightarrow b = \pm 6$$

بیشترین و کمترین مقدار تابع ۴ و -۴ هستند و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} -|a| + c = 4 \\ |a| + c = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ |a| = 4 \Rightarrow a = \pm 4 \end{cases}$$

از آنجا که شروع تابع کسینوس در $x = 0$ به صورت نزولی است بنابراین ضریب کسینوس باید مثبت باشد یعنی

$$-a > 0 \Rightarrow a < 0 \Rightarrow a = -4$$

داریم:

بنابراین برای مقدار $a + b + c$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a + b + c = -4 + 6 + 0 = 2 \\ a + b + c = -4 - 6 + 0 = -10 \end{cases}$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع $y = \tan x$ در بازه‌هایی یکنواست که در آن بازه مجانب قائم نداشته باشیم، یعنی برای

یکنوایی تابع $\tan x$ ، بازه‌ی x باید بین دو نقطه تعریف نشده متوالی، محدود شود. از طرفی مجانب‌های قائم یا نقاط

تعریف نشده در تابع $\tan x$ به صورت $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ خواهد بود. بنابراین برای یافتن مجانب‌های قائم یا نقاط تعریف نشده

تابع $f(x)$ داریم:

$$3x - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{2\pi}{9}$$

$$\frac{k\pi}{3} + \frac{2\pi}{9} = -\frac{7\pi}{9} \Rightarrow \frac{k\pi}{3} = -\pi \Rightarrow k = -3$$

بنابراین نقطه تعریف شده بعد از $-\frac{7\pi}{9}$ به ازای $k = -2$ به دست می‌آید و داریم:

$$2m\pi = \frac{-2\pi}{3} + \frac{2\pi}{9} \Rightarrow 2m\pi = \frac{-4\pi}{9} \Rightarrow m = -\frac{2}{9}$$

یعنی بیشترین مقدار برای m که تابع در بازه‌ی موردنظر اکیداً نزولی باشد عدد $-\frac{2}{9}$ خواهد بود.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

از روابط $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$ و $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ و $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$ استفاده کرده ابتدا ضابطه‌ی دو تابع را تا

حد امکان ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{-\tan x(1 - \tan^2 x)}{(\tan^2 x + 1)^2} = -\frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} \times \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = -\frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = -\frac{1}{4} \sin 4x$$

از آنجا که دوره تناوب تابع $y = a \sin bx$ برابر $\frac{2\pi}{|b|}$ می‌باشد، دوره تناوب تابع $f(x)$ برابر است با:

$$T = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$g(x) = \frac{3}{\sin 2kx} = \frac{3}{2} \sin 2k\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|2k|} = \frac{\pi}{|k|}$$

برای تابع $g(x)$ داریم:

با مساوی قرار دادن دوره تناوب دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ داریم:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{|k|} \Rightarrow |k| = 2 \Rightarrow k = \pm 2 \Rightarrow k_1 k_2 = -4$$

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با عددگذاری در رابطه‌ی $(x-2)f(x+2) = (x+2)f(x+1)$ داریم:

$$x = -2 \Rightarrow -2f(\cdot) = \cdot \Rightarrow f(\cdot) = \cdot$$

$$x = -1 \Rightarrow -2f(1) = f(\cdot) = \cdot \Rightarrow f(1) = \cdot$$

$$x = \cdot \Rightarrow -2f(2) = 2f(1) = \cdot \Rightarrow f(2) = \cdot$$

$$x = 1 \Rightarrow -f(2) = 2f(2) = \cdot \Rightarrow f(2) = \cdot$$

در نتیجه $f(x)$ بر $x-1, x-2, x-3$ و $x-2$ بخش‌پذیر است و داریم:

$$f(x) = kx(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$720 = k \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \Rightarrow k = 2$$

از طرفی داریم $f(6) = 720$ و می‌توان نوشت:

$$\Rightarrow f(x) = 2x(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$\Rightarrow f(x) = 2[x(x-3)][(x-1)(x-2)] = 2(x^2-3x)(x^2-3x+2)$$

$$x^2-3x+3 = \cdot \Rightarrow x^2-3x = -3$$

برای یافتن باقی‌مانده $f(x)$ بر x^2-3x+3 داریم:

$$\Rightarrow R = 2(-3)(-1) = 6$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا باقی‌مانده تقسیم $x^{12} + 3$ بر $x^2 + 1$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$x^2 + 1 = \cdot \Rightarrow x^2 = -1$$

$$\Rightarrow \text{باقی مانده} = (x^2)^6 + 3 = (-1)^6 + 3 = 1 + 3 = 4$$

رابطه تقسیم را به صورت زیر می‌نویسیم و $Q(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$x^{12} + 3 = (x^2 + 1)Q(x) + 4 \Rightarrow x^{12} - 1 = (x^2 + 1)Q(x)$$

$$\Rightarrow (x^2)^6 - 1 = (x^2 + 1)Q(x)$$

$$\Rightarrow (x^2 + 1)(x^{10} - x^8 + x^6 - x^4 + x^2 - 1) = (x^2 + 1)Q(x)$$

$$\Rightarrow Q(x) = x^{10} - x^8 + x^6 - x^4 + x^2 - 1$$

$$x^2 + 1 = \cdot \Rightarrow x^2 = -1$$

برای یافتن باقی‌مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x^2 + 1$ داریم:

$$\Rightarrow R = (-1)^5 - (-1)^4 + (-1)^3 - (-1)^2 + (-1) - 1 = -1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = -6$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع دو ضابطه‌ای که دارای پرش در نقطه‌ی مرزی است برای آن‌که اکیداً صعودی باشد، باید شرط زیر برقرار باشد:

(۱) قبل پرش اکیداً صعودی باشد، برای این‌کار باید تابع $y = (2a - 4)x^2 - 2$ در بازه $x \leq 1$ اکیداً صعودی باشد:

$$2a - 4 > 0 \Rightarrow a > 2$$

یعنی باید داشته باشیم:

(۲) بعد پرش اکیداً صعودی باشد: یعنی سهمی $y = ax^2 - 2x + 3$ در بازه $x > 1$ اکیداً صعودی باشد. برای این‌کار دو شرط لازم است:

(الف) $a > 0$ باشد تا شاخه‌ی سهمی در $x > 1$ اکیداً صعودی باشد.

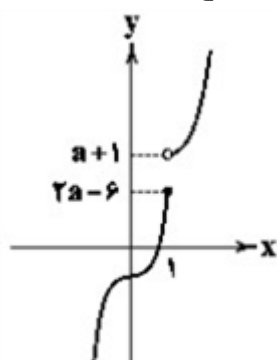
(ب) طول رأس یعنی $\frac{1}{a}$ (همان $(x = -\frac{b}{2a})$) از عدد یک بزرگ‌تر نباشد یعنی:

$$\frac{1}{a} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{a} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1-a}{a} \leq 0 \Rightarrow a < 0 \text{ یا } a \geq 1$$

اشتراک شرط‌های (الف) و (ب) به صورت $a \geq 1$ خواهد بود.

(۳) پرش اکیداً صعودی باشد.

به شکل تقریبی زیر دقت کنید. برای آن‌که در نقطه پرش تابع رفتار نزولی نداشته باشد باید داشته باشیم:



$$a + 1 \geq 2a - 4 \Rightarrow a \leq 7$$

از اشتراک شرط‌های (۱)، (۲) و (۳) داریم: $(1) \cap (2) \cap (3) \Rightarrow 2 < a \leq 7$

بزرگ‌ترین عدد صحیح برای a عدد ۷ و کوچک‌ترین عدد ۳ می‌باشد و اختلاف این دو عدد برابر $7 - 3 = 4$ خواهد بود.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع $f(-x+2)$ اکیداً صعودی خواهد بود و از نقطه‌ی $(3, 0)$ می‌گذرد.

تابع $f(x+2)$ اکیداً نزولی خواهد بود و از نقطه‌ی $(-3, 0)$ می‌گذرد.

برای تعیین دامنه‌ی تابع $g(x) = \sqrt{\frac{x(x^2-1)f(-x+2)}{f(x+2)}}$ جدول تعیین علامت را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم.

	$-\infty$	-3	0	1	3	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 - 1$	$-$	$-$	0	$-$	$+$	$+$
$f(-x+2)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x+2)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
عبارت زیر رادیکال	$-$	$+$	0	$-$	$+$	$-$

بنابراین دامنه‌ی تابع $g(x)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$D_g = (-3, 0] \cup [1, 3]$$

و در این بازه اعداد صحیح $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ یعنی ۶ عدد صحیح قرار دارند.

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای آن که ورودی $2x - 1$ به ورودی $3x - 2$ و ورودی $-x + 2$ به ورودی $\frac{-3x + 5}{2}$ تبدیل

شوند داریم:

$$\begin{cases} 2x - 1 = 3t - 2 \Rightarrow x = \frac{3t-1}{2} \\ -x + 2 = \frac{-3t+5}{2} \Rightarrow -x = \frac{-3t+1}{2} \Rightarrow x = \frac{3t-1}{2} \end{cases}$$

یعنی برای آن که معادله $2f(2x - 1) = 3g(-x + 2)$ به معادله $f(3x - 2) = \frac{3}{2}g\left(\frac{-3x + 5}{2}\right)$ تبدیل شود باید از تبدیل

$x \rightarrow \frac{3x - 1}{2}$ استفاده کنیم یعنی هر یک از ریشه‌های معادله داده شده به ترتیب در ۲ ضرب می‌شوند، سپس به علاوه

یک می‌شوند و در آخر بر ۳ تقسیم می‌شوند تا تبدیل به ریشه معادله جدید شوند.

اگر $x_1, x_2, \dots, x_5$ ریشه‌های معادله داده شده باشند داریم:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10.$$

اگر $x'_1, x'_2, \dots, x'_5$ ریشه‌های معادله جدید باشند داریم:

$$\begin{cases} x'_1 = \frac{2x_1 + 1}{3} \\ x'_2 = \frac{2x_2 + 1}{3} \\ \vdots \\ x'_5 = \frac{2x_5 + 1}{3} \end{cases}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x'_1 + x'_2 + \dots + x'_5 &= \frac{2x_1 + 1}{3} + \frac{2x_2 + 1}{3} + \dots + \frac{2x_5 + 1}{3} \\ &= \frac{2}{3}(x_1 + x_2 + \dots + x_5) + 5\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}(10) + \frac{5}{3} = \frac{25}{3} \end{aligned}$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع $y = -2f(3x - 1) - 1$ در بازه $[-1, 2]$ ثابت است یعنی هم صعودی است و هم نزولی

است. بازه متناظر آن را در تابع $y = \frac{f(3 - 2x) - 1}{5}$ به دست می‌آوریم.

ابتدا بازه متناظر را در تابع $f(x)$ به صورت زیر می‌یابیم:

$$[3(-1) - 1, 3(2) - 1] = [-4, 5]$$

حال این بازه را به بازه متناظر در تابع $y = \frac{f(3 - 2x) - 1}{5}$ تبدیل می‌کنیم به صورت زیر:

$$\left[\frac{5 - 3}{-2}, \frac{-4 - 3}{-2}\right] = \left[-1, \frac{7}{2}\right]$$

یعنی تابع $y = \frac{f(3 - 2x) - 1}{5}$ در بازه $\left[-1, \frac{7}{2}\right]$ هم صعودی است و هم نزولی.

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۳	۱	۲	۳	۴
۲۴	۱	۲	۳	۴
۲۵	۱	۲	۳	۴
۲۶	۱	۲	۳	۴
۲۷	۱	۲	۳	۴
۲۸	۱	۲	۳	۴
۲۹	۱	۲	۳	۴
۳۰	۱	۲	۳	۴
۳۱	۱	۲	۳	۴
۳۲	۱	۲	۳	۴

۳۳	۱	۲	۳	۴
۳۴	۱	۲	۳	۴
۳۵	۱	۲	۳	۴
۳۶	۱	۲	۳	۴
۳۷	۱	۲	۳	۴
۳۸	۱	۲	۳	۴
۳۹	۱	۲	۳	۴
۴۰	۱	۲	۳	۴
۴۱	۱	۲	۳	۴
۴۲	۱	۲	۳	۴
۴۳	۱	۲	۳	۴
۴۴	۱	۲	۳	۴
۴۵	۱	۲	۳	۴
۴۶	۱	۲	۳	۴
۴۷	۱	۲	۳	۴
۴۸	۱	۲	۳	۴
۴۹	۱	۲	۳	۴
۵۰	۱	۲	۳	۴
۵۱	۱	۲	۳	۴
۵۲	۱	۲	۳	۴
۵۳	۱	۲	۳	۴
۵۴	۱	۲	۳	۴
۵۵	۱	۲	۳	۴
۵۶	۱	۲	۳	۴
۵۷	۱	۲	۳	۴
۵۸	۱	۲	۳	۴
۵۹	۱	۲	۳	۴
۶۰	۱	۲	۳	۴
۶۱	۱	۲	۳	۴
۶۲	۱	۲	۳	۴
۶۳	۱	۲	۳	۴
۶۴	۱	۲	۳	۴

۶۵	۱	۲	۳	۴
۶۶	۱	۲	۳	۴
۶۷	۱	۲	۳	۴
۶۸	۱	۲	۳	۴
۶۹	۱	۲	۳	۴
۷۰	۱	۲	۳	۴
۷۱	۱	۲	۳	۴
۷۲	۱	۲	۳	۴
۷۳	۱	۲	۳	۴
۷۴	۱	۲	۳	۴
۷۵	۱	۲	۳	۴
۷۶	۱	۲	۳	۴
۷۷	۱	۲	۳	۴
۷۸	۱	۲	۳	۴
۷۹	۱	۲	۳	۴
۸۰	۱	۲	۳	۴
۸۱	۱	۲	۳	۴
۸۲	۱	۲	۳	۴
۸۳	۱	۲	۳	۴
۸۴	۱	۲	۳	۴
۸۵	۱	۲	۳	۴
۸۶	۱	۲	۳	۴
۸۷	۱	۲	۳	۴
۸۸	۱	۲	۳	۴
۸۹	۱	۲	۳	۴
۹۰	۱	۲	۳	۴
۹۱	۱	۲	۳	۴
۹۲	۱	۲	۳	۴
۹۳	۱	۲	۳	۴
۹۴	۱	۲	۳	۴
۹۵	۱	۲	۳	۴
۹۶	۱	۲	۳	۴

۹۷	۱	۲	۳	۴
۹۸	۱	۲	۳	۴
۹۹	۱	۲	۳	۴
۱۰۰	۱	۲	۳	۴
۱۰۱	۱	۲	۳	۴
۱۰۲	۱	۲	۳	۴
۱۰۳	۱	۲	۳	۴
۱۰۴	۱	۲	۳	۴
۱۰۵	۱	۲	۳	۴
۱۰۶	۱	۲	۳	۴
۱۰۷	۱	۲	۳	۴
۱۰۸	۱	۲	۳	۴
۱۰۹	۱	۲	۳	۴
۱۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۱۵	۱	۲	۳	۴
۱۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۱۹	۱	۲	۳	۴
۱۲۰	۱	۲	۳	۴
۱۲۱	۱	۲	۳	۴
۱۲۲	۱	۲	۳	۴
۱۲۳	۱	۲	۳	۴
۱۲۴	۱	۲	۳	۴
۱۲۵	۱	۲	۳	۴
۱۲۶	۱	۲	۳	۴
۱۲۷	۱	۲	۳	۴
۱۲۸	۱	۲	۳	۴

۱۲۹	۱	۲	۳	۴
۱۳۰	۱	۲	۳	۴
۱۳۱	۱	۲	۳	۴
۱۳۲	۱	۲	۳	۴
۱۳۳	۱	۲	۳	۴
۱۳۴	۱	۲	۳	۴
۱۳۵	۱	۲	۳	۴
۱۳۶	۱	۲	۳	۴
۱۳۷	۱	۲	۳	۴
۱۳۸	۱	۲	۳	۴
۱۳۹	۱	۲	۳	۴
۱۴۰	۱	۲	۳	۴
۱۴۱	۱	۲	۳	۴
۱۴۲	۱	۲	۳	۴
۱۴۳	۱	۲	۳	۴
۱۴۴	۱	۲	۳	۴
۱۴۵	۱	۲	۳	۴
۱۴۶	۱	۲	۳	۴
۱۴۷	۱	۲	۳	۴
۱۴۸	۱	۲	۳	۴
۱۴۹	۱	۲	۳	۴
۱۵۰	۱	۲	۳	۴
۱۵۱	۱	۲	۳	۴
۱۵۲	۱	۲	۳	۴
۱۵۳	۱	۲	۳	۴
۱۵۴	۱	۲	۳	۴
۱۵۵	۱	۲	۳	۴
۱۵۶	۱	۲	۳	۴
۱۵۷	۱	۲	۳	۴
۱۵۸	۱	۲	۳	۴
۱۵۹	۱	۲	۳	۴
۱۶۰	۱	۲	۳	۴

۱۶۱	۱	۲	۳	۴
۱۶۲	۱	۲	۳	۴
۱۶۳	۱	۲	۳	۴
۱۶۴	۱	۲	۳	۴
۱۶۵	۱	۲	۳	۴
۱۸۰	۱	۲	۳	۴
۱۸۱	۱	۲	۳	۴
۱۸۲	۱	۲	۳	۴
۱۸۳	۱	۲	۳	۴
۱۸۴	۱	۲	۳	۴
۱۸۵	۱	۲	۳	۴
۱۸۶	۱	۲	۳	۴
۱۸۷	۱	۲	۳	۴
۱۸۸	۱	۲	۳	۴
۱۸۹	۱	۲	۳	۴
۱۹۰	۱	۲	۳	۴
۱۹۱	۱	۲	۳	۴
۱۹۲	۱	۲	۳	۴
۱۹۳	۱	۲	۳	۴
۱۹۴	۱	۲	۳	۴
۱۹۵	۱	۲	۳	۴
۱۹۶	۱	۲	۳	۴
۱۹۷	۱	۲	۳	۴
۱۹۸	۱	۲	۳	۴
۱۹۹	۱	۲	۳	۴
۲۰۰	۱	۲	۳	۴
۲۰۱	۱	۲	۳	۴
۲۰۲	۱	۲	۳	۴
۲۰۳	۱	۲	۳	۴
۲۰۴	۱	۲	۳	۴
۲۰۵	۱	۲	۳	۴
۲۰۶	۱	۲	۳	۴

۲۰۷	۱	۲	۳	۴
۲۰۸	۱	۲	۳	۴
۲۰۹	۱	۲	۳	۴
۲۱۰	۱	۲	۳	۴
۲۱۱	۱	۲	۳	۴
۲۱۲	۱	۲	۳	۴
۲۱۳	۱	۲	۳	۴
۲۱۴	۱	۲	۳	۴
۲۱۵	۱	۲	۳	۴
۲۱۶	۱	۲	۳	۴
۲۱۷	۱	۲	۳	۴
۲۱۸	۱	۲	۳	۴
۲۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۲۰	۱	۲	۳	۴
۲۲۱	۱	۲	۳	۴
۲۲۲	۱	۲	۳	۴
۲۲۳	۱	۲	۳	۴



